Funções Complexas e Transformadas Integrais

Prof.ª Cecilia Chirenti

Lista 6 - Integral de Fourier e Transformadas de Fourier

1. Encontre a transformada de Fourier de

   $$f(x) = \begin{cases} 1/2\epsilon & |x| < \epsilon \\ 0 & |x| > \epsilon \end{cases}$$

   e determine o limite desta transformada quando $\epsilon \to 0^+$ e discuta o resultado.

2. Encontre a transformada de Fourier de

   $$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & |x| < 1 \\ 0 & 0|x| > 1 \end{cases}$$

   e calcule

   $$\int_0^\infty \left(\frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^3} \right) \cos \frac{x}{2} dx\,.$$

3. Para a função

   $$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$$

   determine a transformada seno e a transformada cosseno de Fourier de $f(x)$. Em cada caso, faça o gráfico de $f(x)$ e de sua transformada.

4. (a) Encontre a transformada seno de e^{-x}, $x \geq 0$.

   (b) Mostre que

   $$\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} mx}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-m}\,,\ m > 0$$

   utilizando o resultado do item (a).

   (c) Explique, do ponto de vista do teorema da integral de Fourier, por que o resultado do item (b) não vale para $m = 0$.

5. Resolva em relação a $y(x)$ a equação integral

   $$\int_0^\infty y(x) \operatorname{sen} xt dx = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 2 & 1 \leq t < 2 \\ 0 & t \geq 2 \end{cases}$$

   e verifique a solução or substituição direta.

6. Calcule

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}^{2}$ (b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2}$

utilizando a identidade de Parseval. (Sugestão: use as transformadas seno e cosseno de Fourier de e^{-x}, $x > 0$.)

7. Verifique o teorema da convolução para as funções

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

8. Verifique o teorema da convolução para as funções $f(x) = g(x) = e^{-x^2}$.

9. Resolva a equação integral $\int_{-\infty}^{\infty} y(u)y(x-u)du = e^{-x^2}$.

10. Prove que $f * (g + h) = f * g + f * h$.

11. Prove que $f * (g * h) = (f * g) * h$.

12. Um sólido semi-infinito ($x > 0$) tem temperatura inicial dada por $f(x) = u_0 e^{-bx^2}$. Se a face $x = 0$ é isolada, mostre que a temperatura em um ponto x no instante t é

$$u(x,t) = \frac{u_0}{\sqrt{1 + 4\kappa bt}} e^{-bx^2/(1+4\kappa bt)}\,.$$

13. Dá-se a uma corda infinita, coincidindo com o eixo x, uma forma inicial $f(x)$ e uma velocidade inicial $g(x)$. Admitindo desprezível a ação da gravidade, mostre que o deslocamento de um ponto x no instante t é dado por

$$y(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(u)du\,.$$