

Funções de Várias Variáveis

Prof.^a Cecilia Chirenti

Lista 3 - Diferenciação, regra da cadeia e funções homogêneas

1. Mostre pela definição que a função $f(x, y) = 3x^2 + 4y^2$ é diferenciável no ponto $(1, 1)$ e calcule a diferencial de f nesse ponto para $\Delta x = \Delta y = 0,01$.
2. Mostre pela definição que a função $f(x, y) = xy^2$ é diferenciável no ponto $(3, 4)$ e calcule a diferencial de f nesse ponto para $\Delta x = \Delta y = 0,001$.
3. Mostre pela definição que a função $f(x, y) = 2x + 3y$ é diferenciável no ponto $(5, 7)$ e calcule a diferencial de f nesse ponto para $\Delta x = 0,1$ e $\Delta y = 0,5$.
4. Dada a função $f(x, y) = x^2 + y$ calcule exatamente $f(1,01, 2,01) - f(1, 2)$. Calcule também a diferencial de f no ponto $(1, 2)$ para $\Delta x = \Delta y = 0,01$ e compare os resultados.
5. Dada a função $f(x, y) = ax + by + c$, mostre que f é diferenciável em qualquer ponto (x, y) e que a diferencial de f é exatamente igual a Δf quaisquer que sejam Δx e Δy (grandes ou pequenos).
6. Calcule df nos seguintes casos:
 - (a) $f(x, y) = \frac{x^2}{x+y}$
 - (b) $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$
7. Verifique se cada função é diferenciável nos pontos de seu domínio. Em caso afirmativo, calcule a diferencial de f num ponto (x_0, y_0) .
 - (a) $f(x, y) = 2x - y$
 - (b) $f(x, y) = \ln(2x^2 + 3y^2)$
 - (c) $f(x, y) = \cos(2x + y^3)$
 - (d) $f(x, y) = x^2 \operatorname{sen} y$
 - (e) $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$
8. O período de um pêndulo simples é $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Achar o erro cometido na apreciação de T , admitindo um erro de 1% na determinação de l e de g .
9. Determinando-se g por meio da fórmula $h = 1/2gt^2$, achar o erro resultando de um erro de 1% na medição de h e t .
10. O seno de um ângulo agudo de um triângulo retângulo deve ser calculado medindo a hipotenusa e o cateto oposto. Sejam 5cm e 4cm respectivamente os seus valores. Admitindo um erro possível de $0,5\text{mm}$ nas medições efetuadas, achar o erro máximo cometido na avaliação do seno. Qual o erro admissível na avaliação do ângulo?
11. Calcule a diferencial total de 2^a ordem.

$$(a) z = y/x \qquad (b) u = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 - y^2}}{x - \sqrt{x^2 - y^2}}$$

12. Obtenha $\frac{dF}{dt}$ diretamente e pela regra da cadeia, sendo F a função composta de f com x e y :

$$(a) f(x, y) = 3x + 6y - 9, \quad x(t) = 3t, \quad y(t) = t^2 - 1$$

$$(b) f(x, y) = 3x + y^2, \quad x(t) = \text{sen } t, \quad y(t) = \text{cos } t$$

$$(c) f(x, y) = \ln(x^2 + y^2), \quad x(t) = 3t, \quad y(t) = t - 1$$

$$(d) f(x, y) = e^{x+y}, \quad x(t) = t^2, \quad y(t) = 2t^3 - 1$$

$$(e) f(x, y) = x^2y^3 + x^3y^2, \quad x(t) = \frac{1}{t}, \quad y(t) = \frac{1}{t^2}$$

13. Encontre a equação da tangente às curvas abaixo, nos pontos indicados, e identifique cada curva:

$$(a) x^2 + y^2 = 1, \text{ no ponto } (x_0, y_0) \qquad (c) y^2 = 2ax - x^2, \text{ no ponto } (0, a)$$

$$(b) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ no ponto } (x_0, y_0) \qquad (d) y^2 = 2ax, \text{ no ponto } (\frac{a}{2}, a)$$

14. Verifique se são homogêneas as seguintes funções e, em caso afirmativo, dê o grau de homogeneidade.

$$(a) f(x, y) = x^2 + y^2 + xy \log \frac{y}{x} \qquad (c) f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$(b) f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+xy+y^2} \qquad (d) f(x, y) = e^{x+y}$$

15. Mostre que, se $f(x, y)$ é homogênea de grau m , então

$$f(x, y) = x^m \phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

onde $\phi\left(\frac{y}{x}\right)$ é uma função de $\frac{y}{x}$. (Sugestão: tome $\lambda = 1/x$.)

16. Verificar o teorema de Euler nas seguintes funções:

$$(a) f(x, y) = (x + y)^2 \qquad (c) z = x^3 \text{sen}(y/x)$$

$$(b) f(x, y) = \frac{x+y}{x^3+y^3} \qquad (d) z = \text{arctg} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x-y}$$