Nome:____

Geometria Diferencial I

Prova 1 - 22/03/2016

1. (2,5 pts) Seja α uma curva regular em $\mathbb{R}^3$.

   (a) Mostre que existe uma reparametrização β de α tal que β possui velocidade unitária.

   (b) Se β possui $\kappa(0) > 0$, mostre que existe um (e apenas um) círculo γ com parametrização unitária

   $$\gamma(s) = c + r\cos\frac{s}{r}e_1 + r\mathrm{sen}\,\frac{s}{r}e_2\,, \quad (\text{com } e_i \cdot e_j = \delta_{ij})$$

   tal que γ aproxima β próximo de $\beta(0)$ de tal forma que

   $$\gamma(0) = \beta(0)\,, \quad \gamma'(0) = \beta'(0) \quad \text{e} \quad \gamma''(0) = \beta''(0)\,.$$

   Encontre o centro c e o raio r de γ, e mostre que γ pertence ao plano que passa por $\beta(0)$ e é ortogonal a B_0.

2. (2,5pts)A curva $\alpha(t) = (t\cos t, t\mathrm{sen}\,t, t)$ pertence a um cone duplo e passa pelo seu centro em $t = 0$.

   (a) Calcule T, N, B, κ, τ para α em $t = 0$.

   (b) Esboce a curva para $-2\pi \leq 2\pi$, mostrande T, N, B em $t = 0$.

3. (2,5pts) A derivada covariante $\nabla_v W$ mede a taxa de variação inicial de $W(p)$ à medida que p se move na direção de v. Seja o campo vetorial $X = \sum x_i U_i$, onde x_1, x_2, x_3 são as funções coordenadas naturais de $\mathbb{R}^3$. Mostre que $\nabla_V X = V$ para todo campo vetorial V.

4. (2,5pts) As formas de conexão ω_{ij} de um campo referencial E_1, E_2, E_3 são dadas por $\omega_{ij}(v) = \nabla_v E_i \cdot E_j(v)$.

   (a) Mostre que cada ω_{ij} é uma 1-forma.

   (b) Calcule as formas de conexão para o campo referencial cilíndrico.