Sequências e Séries - Atividade para nota 4

Prof.ª Cecilia Chirenti

1. Seja $\{a_k\}, k \geq 1$, uma sequência numérica dada. Suponha que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ convirja uniformemente em $[-\pi, \pi]$. Seja $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ com $x \in [-\pi, \pi]$. Prove que, para todo natural $k \geq 1$,
$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos kx dx \,.$$

2. Sejam $\{a_k\}, k \geq 0$ e $\{b_k\}, k \geq 1$, duas sequências numéricas dadas. Suponha que a série
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \text{sen}\, nx]$$
convirja uniformemente em $[-\pi, \pi]$. Seja
$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \text{sen}\, nx] \,.$$
Prove que
$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos kx dx \,, k \geq 0 \quad e \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \text{sen}\, kx dx \,, k \geq 1 \,.$$

3. Seja f definida e integrável em $[-\pi, \pi]$. A série
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \text{sen}\, nx]$$
onde
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \,,$$
e
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \,, n \geq 1 \quad e \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{sen}\, nx dx \,, n \geq 1 \,,$$
denomina-se *série de Fourier* de f. Os números $a_n, n \geq 0$ e $b_n, n \geq 1$, são os *coeficientes de Fourier* de f. Determine a série de Fourier da função dada e verifique que a série obtida converge uniformemente em $\mathbb{R}$. Finalmente, faça no computador o gráfico da função f junto com as 10 primeiras somas parciais da série.

   (a) $f(x) = x^2, -\pi \leq x \leq \pi$

   (b) $f(x) = |x|, -\pi \leq x \leq \pi$

   (c) $f(x) = \begin{cases} \pi + x, \text{ se } -\pi \leq x < 0 \\ \pi - x, \text{ se } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$,