Sequências e Séries

Prof.ª Cecilia Chirenti

Lista 2 - Séries e Critérios de Convergência I

1. Em cada caso, encontre as quatro primeiras somas parciais; determine uma fórmula para a n-ésima soma parcial; determine se a série converge e, em caso afirmativo, calcule a soma.

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{5^{k-1}}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k-1}}{4}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$

2. Determine se as séries abaixo são convergentes ou divergentes. Se a série for convergente, encontre a soma.

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{5^k}$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}4^{k-1}$

   (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{7}{6^{k-1}}$

   (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\left(\frac{1}{k+3}-\frac{1}{k+4}\right)$

3. Encontre uma fórmula para a n-ésima soma parcial da série

$$\ln 2+\ln\frac{2}{3}+\ln\frac{3}{4}+\cdots+\ln\frac{n}{n+1}+\cdots$$

   e determine se a série converge.

4. Mostre que

   (a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=-\ln 2$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}}=1$

5. Use séries geométricas para mostrar que

   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k=\frac{1}{1+x}$ se $-1<x<1$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(x-3)^k=\frac{1}{4-x}$ se $2<x<4$

   (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}=\frac{1}{1+x^2}$ se $-1<x<1$

6. Uma bola cai de uma altura de 10 metros. Cada vez que a bola bate no chão, ela quica verticalmente até uma altura que é 3/4 da altura anterior. Encontre a distância total percorrida pela bola, se ela continuar quicando indefinidamente.

7. Encontre a soma das séries abaixo:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^k}+\frac{1}{4^k}\right]$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{5^k}-\frac{1}{k(k+1)}\right]$

   (c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\left[\frac{1}{k^2-1}-\frac{7}{10^{k-1}}\right]$

   (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{7}{3^k}+\frac{6}{(k+3)(k+4)}\right]$

8. Determine se as séries abaixo convergem ou divergem:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+6}$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{1+k^2}$

   (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k+5}}$

   (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{e}}$

   (e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{\ln(k+1)}$

   (f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}ke^{-k^2}$

   (g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} k}{1+k^2}$

   (h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{sech}^2 k$

   (i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}k^2\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{k}\right)$

9. Prove:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(\ln k)^p}$ converge se $p>1$ e diverge se $p\leq 1$.

   (b) $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k(\ln k)[\ln(\ln k)]^p}$ converge se $p>1$ e diverge se $p\leq 1$.

10. Prove: Se $\sum u_k$ converge e $\sum v_k$ diverge, então $\sum(u_k+v_k)$ diverge e $\sum(u_k-v_k)$ diverge.

11. Encontre exemplos para mostrar que $\sum(u_k+v_k)$ e $\sum(u_k-v_k)$ podem convergir ou divergir se $\sum u_k$ e $\sum v_k$ ambas divergem.

12. Use o exercício 10 para determinar se as séries abaixo convergem ou divergem:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}+\frac{1}{k}\right]$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{k^2}{1+k^2}+\frac{1}{k(k+1)}\right]$

   (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{k^{3/2}}\right]$

   (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k(\ln k)^2}-\frac{1}{k^2}\right]$