Sequências e Séries

Prof.ª Cecilia Chirenti

Lista 3 - Séries e Critérios de Convergência II

1. Use o Teste da Integral para determinar se a série é convergente ou divergente:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-n^3}$

2. Explique por que o Teste da Integral não pode ser usado para determinar se a série é convergente:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos \pi n}{\sqrt{n}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{1+n^2}$

3. Encontre os valores de p para os quais a série é convergente

   (a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n(1+n^2)^p$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^p}$

4. Leonard Euler foi capaz de calcular a soma exata da série p com $p = 2$:

   $$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\ .$$

   Utilize este fato para encontrar a soma de cada série:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$

5. (a) Use o Teste da Integral para mostrar que, se s_n é a n-ésima soma parcial da série harmônica, então $s_n \leq 1 + \ln n$.

   (b) A série harmônica diverge, mas muito lentamente. Use a parte (a) para mostrar que a soma do primeiro milhão de termos é menor que 15, e a soma do primeiro bilhão de termos é menor que 22.

6. É verdade que, se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série divergente de números positivos, também existe uma série divergente $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ de números positivos com $b_n < a_n$ para cada n? Existe uma “menor"série divergente de números positivos? Justifique suas respostas.

7. Existe uma “maior"série convergente de números positivos? Explique.

8. **Teste de condensação de Cauchy:** Seja $\{a_n\}$ uma sequência decrescente ($a_n \geq a_{n+1}$ para todo n) de termos positivos que converge para 0. Então $\sum a_n$ converge se, e somente se, $\sum 2^n a_{2^n}$ converge. Por exemplo, $\sum(1/n)$ diverge porque $\sum 2^n \cdot (1/2^n) = \sum 1$ diverge. Mostre por que esse teste funciona.

9. Use o teste de condensação de Cauchy do exercício anterior para mostrar que

   (a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ diverge;

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge se $p < 1$ e diverge se $p \geq 1$

10. Determine se a série converge ou diverge:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{2n^3+1}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n\sqrt{n}}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{3+10^n}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+\operatorname{sen} n}{10^n}$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 e^{-n}$

   (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n}$

11. O significado da representação decimal de um número $0, d_1 d_2 d_3 \ldots$ (onde o algarismo d_i é um dos algarismos 0,1,2,. . . ,9) é que

$$0, d_1 d_2 d_3 \ldots = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \frac{d_4}{10^4} + \cdots$$

   Mostre que essa série sempre converge.

12. (a) Suponha que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sejam séries com termos positivos e que $\sum b_n$ seja convergente. Demonstre que se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0\,,$$

   então $\sum a_n$ também é convergente.

   (b) Use a parte (a) para mostrar que as séries convergem:

   i. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$

   ii. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n} e^n}$

13. Dê um exemplo de um par de séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ com termos positivos para as quais $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = 0$ e $\sum b_n$ diverge, mas $\sum a_n$ converge. Compare com o exercício anterior.

14. Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ forem ambas séries convergentes com termos positivos, é verdade que $\sum a_n b_n$ também será convergente?