Sequências e Séries

Prof.ª Cecilia Chirenti

Lista 5 - Sequências e séries de funções - Convergência pontual e uniforme

1. Determine os valores de x para os quais cada uma das séries a seguir converge:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx^{2n}}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{nx}}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1-x)^n}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \operatorname{sen}^n x}{n^2}$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2}$

   (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n \ln(n+1)}$

2. Mostre que cada uma das séries a seguir é uniformemente convergente no conjunto de valores de x dado:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2+1}\,, \quad x \in \mathbb{R}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{2^n}\,, \quad x \leq \ln\frac{3}{2}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,, \quad -1 \leq x \leq 1$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n\,, \quad -a \leq x \leq a\,, \quad a < 1$

3. Mostre: Se $\sum u_n(x)$ é uniformemente convergente para $a \leq x \leq b$, então a série é uniformemente convergente em todo intervalo menor contido no intervalo $a \leq x \leq b$.

4. Mostre: Se $\sum v_n(x)$ é uniformemente convergente para um conjunto E de valores de x e $|u_n(x)| \leq v_n(x)$ para $x \in E$, então $\sum u_n(x)$ é uniformemente convergente para $x \in E$.

5. Mostre: Se $0 < u_n(x) < 1/n$ e $u_{n+1}(x) \leq u_n(x)$ com $a \leq x \leq b$, então a série $(-1)^n u_n(x)$ é uniformemente convergente em $a \leq x \leq b$.

6. Mostre: Se a série $\sum M_n$ de constantes M_n é convergente e $f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq M_n$ para $x \in E$, então a *sequência* $\{f_n(x)\}$ é uniformemente convergente para $x \in E$.

7. Mostre que as sequências abaixo são uniformemente convergentes no intervalo de x dado (use o problema 6):

   (a) $\left\{\frac{n+x}{n}\right\}\,, \quad 0 \leq x \leq 1$

   (b) $\left\{\frac{x^n}{n!}\right\}\,, \quad -1 \leq x \leq 1$

   (c) $\left\{\frac{\ln(1+nx)}{n}\right\}\,, \quad 1 \leq x \leq 2$

   (d) $\left\{\frac{n}{e^{nx^2}}\right\}\,, \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1$

8. Para cada $n \geq 1$, seja $f_n(x) = \frac{1}{nx^2}$.

   (a) Determine o domínio da função f dada por

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,.$$

(b) Esboce os gráficos de f e das f_n.

(c) f_n, $n \geq 1$, converge uniformemente a f em $]0, +\infty[$? E em $]1, +\infty[$?

9. Para cada $n \geq 1$, seja $f_n(x) = n\operatorname{arctg} \frac{x}{n}$.

   (a) Determine o domínio da função f dada por
   $$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,.$$

   (b) Mostre que f_n, $n \geq 1$, converge uniformemente a f em $[-r, r[$, onde $r > 0$ é um real dado.

   (c) Mostre que a sequência f_n não converge uniformemente a f em $\mathbb{R}$.

10. Dê um exemplo de uma sequência de funções $\{f_n(x)\}$, sendo cada f_n descontínua em todos os números reais, e tal que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ seja contínua.

11. Para cada $n \geq 1$, seja $f_n(x) = \frac{1}{n}\operatorname{sen} nx$. Verifique que f_n converge uniformemente, em $\mathbb{R}$ à função f dada por $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. É verdade que para todo x, $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x)$? Justifique.

12. Mostre que a função $s = s(x)$ dada por $s(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{x^2 + k^2}$ é contínua em $\mathbb{R}$.

13. Seja $s = s(x)$ dada por $s(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)x^k$. Prove que, para todo $t \in]-1, 1[$,
    $$\int_0^t s(x)dx = \frac{t^2}{1-t}\,.$$
    Conclua que, para todo $x \in]-1, 1[$,
    $$\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)x^k = \frac{2x - x^2}{(1-x)^2}\,.$$