Sequências e Séries

Prof.ª Cecilia Chirenti

Lista 6 - Séries de Potências - Séries de Taylor - Aplicações

1. Encontre uma representação em série de potências para cada função e determine o intervalo de convergência

   (a) $f(x) = \frac{2}{3-x}$

   (b) $f(x) = \frac{x}{9+x^2}$

   (c) $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$

   (d) $f(x) = \frac{x^2}{a^3-x^3}$

2. Expresse a função como a soma de uma série de potências usando primeiro frações parciais. Encontre o intervalo de convergência.

   (a) $f(x) = \frac{3}{x^2-x-2}$

   (b) $f(x) = \frac{x+2}{2x^2-x-1}$

3. Encontre uma representação em série de potências para a função e determine o raio de convergência.

   (a) $f(x) = \ln(5-x)$

   (b) $f(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2}$

   (c) $f(x) = x^2 \operatorname{arctg}(x^3)$

   (d) $f(x) = \left(\frac{x}{2-x}\right)^3$

4. Calcule as integrais indefinidas como uma série de potências e use uma série de potências para aproximar as integrais definidas com precisão de 6 casas decimais.

   (a) $\int \frac{t}{1-t^8} dt$

   (b) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$

   (c) $\int_0^{0,2} \frac{1}{1+x^5} dx$

   (d) $\int_0^{0,4} \ln(1+x^4) dx$

5. A função de Bessel de ordem 1 é definida por

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1!)2^{2n+1}}$$

   (a) Mostre que J_1 satisfaz a equação diferencial

$$x^2 J_1''(x) + x J_1'(x) + (x^2-1) J_1(x) = 0$$

   (b) Mostre que $J_0'(x) = -J_1(x)$.

6. Considere

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

   Encontre os intervalos de convergência para f, f' e f''.

7. Encontre a série de Maclaurin de $f(x)$ e encontre também o raio de convergência associado.

(a) $f(x) = (1-x)^{-2}$

(b) $f(x) = \operatorname{sen} \pi x$

(c) $f(x) = 2^x$

(d) $f(x) = \cosh x$

8. Encontre a série de Taylor centrada no valor de a dado e encontre também o raio de convergência associado.

(a) $f(x) = x - x^3$, $a = -2$

(b) $f(x) = \cos x$, $a = \pi$

(c) $f(x) = 1/x$, $a = \pi/2$

(d) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 16$

9. Use a série binomial para expandir a função como uma série de potências e encontre o raio de convergência.

(a) $\sqrt{1}2 + x^3$

(b) $(1-x)^{2/3}$

10. Use séries para calcular as integrais indefinidas e as integrais definidas com a precisão indicada.

(a) $\int x \cos(x^3) dx$

(b) $\int \frac{e^x - 1}{x} dx$

(c) $\int_0^1 \operatorname{sen}(x^4) dx$ (quatro casas decimais)

(d) $\int_0^{0,4} \sqrt{1 + x^4} dx$ ($|\text{erro}| < 5 \times 10^{-6}$)

11. Use séries para calcular o limite

(a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{1 + x - e^x}$

(b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x - \ln(1+x)}{x^2}$

12. Mostre que a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

não é igual à sua série de Maclaurin. Faça o gráfico de $f(x)$ e comente o seu comportamento próximo da origem.

13. Pode-se mostrar que o comprimento da elipse $x = a \operatorname{sen} \theta$, $y = b \cos \theta$, onde $a > b > 0$ é

$$L = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \theta} d\theta$$

onde $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ é a excentricidade da elipse. Expanda o integrando como uma série binomial para expressar L como uma série de potências da excentricidade até os termos em e^6. Qual é o resultado para $e \to 0$?

14. Encontre o comprimento de um arco da função $y = \operatorname{sen} x$.