Geometria Analítica - Prof.ª Cecilia Chirenti

Lista 4 - Produto Vetorial e Produto Misto

Nos exercícios a seguir, quando não houver menção sobre bases, deve-se entender que as coordenadas dos vetores estão sendo dadas em relação a uma base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, ortonormal e positiva.

1. Sendo $\vec{w} = (\vec{u}+2\vec{v})\times(\vec{u}+\vec{v})$, determine o ângulo dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sabendo que $|\vec{u}| = |\vec{v}| = |\vec{w}| = 2$ e $\vec{u}\cdot\vec{v} < 0$.

2. Dados $\vec{u} = (1, 2, -1)$ e $\vec{v} = (1, 3, -2)$, determine um vetor $\vec{a}$, ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$, de módulo 3, que forma com $\vec{k}$ um ângulo obtuso.

3. Sendo $\vec{u} = (-1, -1, m)$, $\vec{v} = (7, 5, 1)$ e $\vec{w} = (a, b, c)$, pede-se:
   (a) o valor de m para que a equação $\vec{v} = \vec{u}\times\vec{w}$ possa ter solução;
   (b) para o valor de m encontrado em (a), resolva a equação $\vec{v} = \vec{u}\times\vec{w}$, sabendo que $|\vec{w}| = \sqrt{14}$ e $\vec{u}\cdot\vec{w} < 0$.

4. São dados: $|\vec{x}| = 3$, $|\vec{v}| = 4$, $\vec{x}\perp\vec{y}$, $\overrightarrow{AB} = 3\vec{x} - 4\vec{y}$ e $\overrightarrow{AC} = \vec{x} + 5\vec{y}$. Calcule a área do triângulo ABC e a distância de B à reta AC.

5. Determine a, b e $\vec{K}$ para que $C = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1); (0, a, b); \vec{K}\right)$ seja uma base ortonormal positiva.

6. $B = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é uma base ortonormal positiva.
   (a) Determine $\vec{u}$, sabendo que ele é paralelo ao vetor $(2, -1, 2)$.
   (b) Determine $\vec{v}$, sabendo que é da forma $(x, y, 0)$.
   (c) Determine $\vec{w}$.

7. Dados os vetores $\vec{u} = (2, 2, 4)$ e $\vec{v} = (1, 1, 0)$, determine uma base ortonormal positiva tal que seu primeiro vetor seja paralelo a $\vec{u}$ e seu segundo vetor seja uma combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Determine, na base achada, as coordenadas de $\vec{x} = (1, 0, 0)$.

8. Verdadeiro ou falso? Se verdadeiro, demonstre, se falso, dê contra-exemplo:
   (a) se $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$, então $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{c} = \vec{c}\times\vec{a}$;
   (b) se $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{a}$, então $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são paralelos;
   (c) $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\times\vec{c}$ implica $\vec{b} = \vec{c}$.

9. O vetor $\vec{w}$ é ortogonal aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, $|\vec{u}| = 1$, $|\vec{v}| = 2$, $|\vec{w}| = 3$ e o ângulo formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ mede 30°.

(a) Calcule $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, sabendo que é um número positivo.

(b) Se $\vec{a} = 2\vec{u}$, $\vec{b} = \vec{v} + \vec{w}$ e $\vec{c} = \vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$, calcule $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$.

10. Sejam $\overrightarrow{AB} = (1, -1, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 3, 2)$ e $\overrightarrow{AD} = (2, 1, 0)$. Pede-se:

    (a) a área do triângulo ABC e sua altura relativa ao vértica A;

    (b) o volume do paralelepípedo $ABCD$ e a distância do ponto D ao plano determinado por A, B e C.

11. Sejam $\overrightarrow{AB} = (3, 6, 3)$, $\overrightarrow{AC} = (1, 3, -2)$ e $\overrightarrow{AD} = (2, 2, \alpha - 2)$. Encontre os valores do parâmetro α para os quais o volume V do tetraedro $ABCD$ fica igual a 3.

12. Demonstre $[\vec{u} + \vec{v}, \vec{v} + \vec{w}, \vec{u} + \vec{w}] = 2[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

13. Prove: $[\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$.

14. Exercícios dos Capítulos 11 e 12 do livro do Boulos.