

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

INTRODUÇÃO À RELATIVIDADE GERAL:
ULTRAPASSANDO A BARREIRA DA VELOCIDADE DA
LUZ

ANDERSON CARLOS DOS SANTOS

AGOSTO, 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

INTRODUÇÃO À RELATIVIDADE GERAL:
ULTRAPASSANDO A BARREIRA DA VELOCIDADE DA
LUZ

Relatório submetido à Universidade Federal do ABC,
com informações sobre o projeto de iniciação científica.

Orientadora: Prof(a). Dr(a). Cecilia B. M. H. Chirenti
Centro de Matemática, Computação e Cognição (CMCC) - UFABC

ANDERSON CARLOS DOS SANTOS

AGOSTO, 2013

RESUMO

Viagens mais rápidas do que a velocidade da luz são ficções científica fascinantes, a possibilidade de poder conhecer algo além do nosso mundo ou talvez do nosso universo foram usadas com sucesso em best sellers como “Contato” de Carl Sagan e a série “Star Trek, Jornada nas estrelas”. Contudo, a física permite tais ficções científicas no mundo real, e modelos matemáticos comprovam a possibilidade de um dia podermos ter essa tecnologia. Este relatório contém a primeira parte do projeto que consiste em um estudo de relatividade restrita, relatividade geral e consequentemente estudos de modelos de viagens mais rápidas do que a da luz. Ao longo do relatório serão apresentados conceitos e cálculos a partir da teoria da Relatividade proposta por Albert Einstein.

ABSTRACT

Travel faster than the speed of light is fascinating science fiction, and the possibility of being able to know something beyond our world or our universe was used successfully in best sellers such as "Contact" by Carl Sagan and the "Star Trek" series. However, Physics allows such fictions in the real world and mathematical models show the possibility that one day we could have this technology. This report contains the first part of a project that consists of a study of special relativity, general relativity and consequently studies models travel faster than light. Throughout the report will be presented concepts and calculations from the theory of relativity proposed by Albert Einstein.

SUMÁRIO

Notações.....	6
1. Introdução	7
2. Objetivos	8
3. Materiais e Métodos.....	9
3.1 Literatura.....	9
3.2 Recursos Computacionais	9
4. Desenvolvimento e Resultados	9
4.1 Espaço-Tempo de Minkowski	10
4.2 Geometria Não-Euclidiana	13
4.3 Solução de Schwarzschild	15
4.4 O Wormhole de Morris-Thorne	20
5. Conclusões.....	25
6. Cronograma.....	25
7. Referências.....	26

NOTAÇÕES

Lista de Símbolos:

$c = \textit{velocidade da luz}$

$\rho = ct$

$\beta = \frac{v}{c}$

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

Lista de Figuras

- 1 Cone de Luz
- 2 Círculo inscrito na esfera
- 3 Wormhole de Morris-Thorne
- 4 Wormholes com diferentes valores de b

Lista de Abreviações

TL = Transformações de Lorentz

Observações importantes:

Os símbolos de somatória durante a análise tensorial foram todos omitidos, assim como nos livros usados como referência.

O símbolo ' $'$, é usado em vários momentos do relatório expressando diferentes significados, podendo ser a representação de um novo referencial, um operador diferencial ou um versor. No contexto será mostrado qual o devido significado diante da seção analisada.

1. INTRODUÇÃO

Em 1862 James Clerk Maxwell publica um artigo unificando as forças elétricas e magnéticas em quatro fórmulas e dando origem ao eletromagnetismo. Como um dos resultados, surge a velocidade das ondas eletromagnéticas “c” no vácuo dada por $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$. Porém os físicos da época acreditavam que as equações de Maxwell deveriam expressar o eletromagnetismo apenas no referencial inercial do éter; uma substância hipotética que seria o meio de propagação da luz, assim como o ar é o do som, e seria o referencial absoluto de todo o universo.

Contudo as equações de Maxwell continham um problema, elas não obedeciam ao princípio de relatividade proposto por Newton, composto pelas transformações de Galileu considerando um referencial em velocidade uniforme no eixo x em relação a um inercial:

$$\begin{aligned} (1a) \quad & x' = x - vt, \\ (1b) \quad & y' = y, \\ (1c) \quad & z' = z, \\ (1d) \quad & t' = t. \end{aligned}$$

Parecia óbvio que as equações de Maxwell deveriam estar erradas, então a coisa a ser fazer era mudá-las de modo que, sob a transformação de Galileu, o princípio da relatividade fosse satisfeito. Quando isso foi tentado, os novos termos que tiveram de ser inseridos nas equações levaram a previsões de novos fenômenos elétricos que não existiam de forma alguma quando testados experimentalmente, então a tentativa foi abandonada [1]. Porém em 1904 Hendrick Antoon Lorentz observou que as equações de Maxwell permaneciam fascinantemente com a mesma forma quando aplicadas a elas outro tipo de transformação dada por:

$$\begin{aligned}
(2a) \quad x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\
(2b) \quad y' &= y, \\
z' &= z, \\
(2c) \quad t' &= \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\
(2d) \quad &
\end{aligned}$$

Como resultado essa transformação mostrava que não era o eletromagnetismo que deveria ser alterado, e sim a mecânica de Newton.

Em 1887, Albert Michelson e Edward Morley desenvolveram um experimento que levou os seus nomes. A intenção do experimento era medir a velocidade do éter em relação à Terra usando uma fonte de luz e espelhos, partindo da velocidade da luz proposta pelas Equações de Maxwell e da relatividade Galileana, o experimento porém não apresentou resultados, e em todas medições se encontrou uma velocidade 0, a qual levaram ao abandono do conceito de éter e ao choque com as Transformações de Lorentz 17 anos depois.

Em 1905, 18 anos após o experimento de Michelson-Morley, entra em cena Albert Einstein que publica a teoria da Relatividade Restrita, explicando os resultados obtidos por Michelson e Morley, e usando como base as transformações de Lorentz. No entanto a Relatividade Restrita teve grande impacto na ciência e na filosofia, a noção de tempo absoluto se perdia, a física de Newton se tornava apenas uma aproximação dos fenômenos naturais e novos conceitos nasciam alterando a visão de mundo e se focando em um único valor absoluto: a velocidade da luz.

Em 1915, 10 anos após a publicação da Relatividade Restrita, Albert Einstein reformula sua teoria e apresenta a Relatividade Geral, agora com a inserção de campos de gravitacionais e de espaços não curvos. Com isso a gravidade passa a ser vista como uma deformação no espaço-tempo, possuindo aspectos muito mais geométricos.

A Relatividade Geral passa ser a principal teoria do comportamento do universo em grandes escalas, ela aponta para a existência de buracos negros, ondas gravitacionais e outros fenômenos possivelmente presentes no universo. A solução para buracos de

minhocas ou wormholes, foi encontrada pelo próprio Einstein alguns anos depois da publicação da teoria, e ela permitiria ligar dois pontos do espaço-tempo por um “atalho”. Em 1994, o físico mexicano Miguel Alcubierre propôs um método de contração e expansão do espaço-tempo que através de uma “bolha” seria possível viajar mais rápido que a velocidade da luz, esse método recebeu o nome de dobra espacial ou warp drive. Porém ambas as soluções dependem de conhecimentos físicos mais avançados e de uma possível matéria exótica para serem realidades.

2. OBJETIVOS

Este projeto tem como objetivo:

- Iniciativa a pesquisa de literatura;
- Iniciativa a elaboração de relatórios;
- Revisão de conceitos de relatividade restrita e geometria diferencial;
- Estudo da teoria da relatividade geral;
- Obter uma estimativa das limitações que devem ser superadas para que viagens mais rápidas do que a velocidade da luz sejam possíveis.

3. MATERIAS E MÉTODOS

Por se tratar de um projeto teórico, foram necessários recursos computacionais bastante modestos além da bibliografia.

3.1 Literatura

As obras consultadas durante o projeto encontram-se todas na seção de Referências.

3.2 Recursos Computacionais

Foram usadas ferramentas como o WolframAlpha, o Winplot e o Mathematica como recursos numéricos e gráficos, além de editores de texto como o Word para elaboração do relatório.

4. DESENVOLVIMENTO E RESULTADOS

4.1 Espaço-Tempo de Minkowski

A Relatividade Restrita se baseia em dois princípios:

1. Princípio da Relatividade Restrita: As leis físicas são as mesmas em todos os referenciais inerciais:
2. O Princípio da Constância da Velocidade da Luz: A velocidade da luz, no vácuo, c , é a mesma em todas as direções e em todos os referenciais inerciais, e é independente do movimento da fonte [3].

O espaço de Minkowski foi usado na primeira parte do projeto, por ser um espaço plano torna mais fáceis as resoluções e envolvem apenas conceitos de relatividade restrita. Temos como característica desse espaço, a métrica:

$$(3) \quad dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - cdt^2.$$

Para facilitar os cálculos foi usado $c=1$, também poderíamos ter usado a componente temporal como imaginária pura, por formalismo matemático (mais detalhes podem ser vistos na referência [4] e no apêndice A da referência [5]).

Partimos então para as seguintes definições:

$$(4a) \quad dS > 0 \text{ (vetor do tipo espaço),}$$

$$(4b) \quad dS = 0 \text{ (vetor do tipo luz),}$$

$$(4c) \quad dS < 0 \text{ (vetor do tipo tempo).}$$

Podemos assim representar a trajetória de uma partícula no espaço de Minkowski através de um diagrama. Para um caso mais interessante podemos representar um fóton da seguinte maneira:

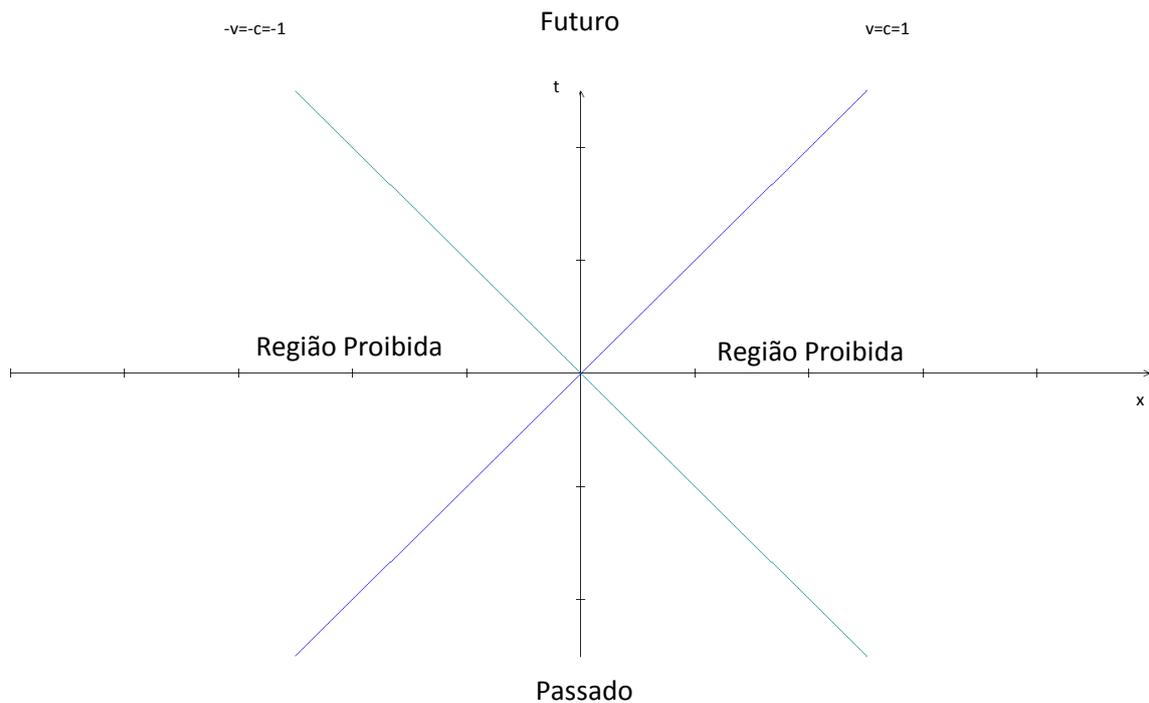


Figura 1: A trajetória do fóton no espaço de Minkowski gerando um cone de luz.

A figura mostra como o fóton se move no espaço de Minkowski em relação a um observador inercial, sendo $t(x)=x$. O eixo t representa o tempo, enquanto o eixo x representa o espaço percorrido por um fóton se movendo unidimensionalmente. Se realizarmos uma rotação em um eixo z , encontraríamos então dois cones, um superior ao eixo x e outro inferior. Esses cones são denominados “cones de luz” e determinam a região por onde qualquer outra partícula deve ser representada. As regiões proibidas representam regiões que não podem influenciar e nem serem influenciadas pelo evento na origem (presente), pois ultrapassaria a velocidade da luz. Como a componente temporal é imaginária pura é comum encontrarmos funções hiperbólicas descrevendo o movimento de uma partícula nesse espaço.

As transformações de Lorentz apresentadas na introdução do relatório podem ser escritas de maneira matricial e através de novos termos explícitos na seção de notação, assim temos que as transformações de Lorentz representam a seguinte matriz:

$$(5) \quad \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podemos também definir a matriz como um tensor de 2ª ordem representado por: Λ_n^m que é chamado de tensor das transformações de Lorentz. As TL podem ser representadas como uma rotação no espaço, transformando:

$$(5.1a) \quad \gamma = \cosh(\theta),$$

$$(5.1b) \quad \gamma\beta = \sinh(\theta).$$

Pois:

$$(5.2) \quad \cosh(\theta)^2 - \sinh(\theta)^2 = 1,$$

$$(5.3) \quad \gamma^2 - \gamma^2\beta^2 = \gamma^2(1 - \beta^2) = 1.$$

Podemos então escrever a matriz da TL como:

$$(5.4) \quad \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & -\sinh(\theta) & 0 & 0 \\ -\sinh(\theta) & \cosh(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Para melhor representar o diagrama utilizado, deixaremos em duas coordenadas e evidenciaremos a variável t , lembrando que $c=1$;

$$(5.5) \quad \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & -\sinh(\theta) \\ -\sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix}.$$

Podemos conferir que o determinante dessa matriz é igual a 1 e que a transposta dela é igual a sua inversa, provando que essa matriz representa uma rotação hiperbólica no espaço de Minkowski.

O espaço de Minkowski é eficaz em demonstrar um diagrama sobre o espaço-tempo. Em qualquer espaço-tempo podemos trabalhar com as coordenadas aplicadas ao exemplo anterior, com isso encontramos os quadri-vetores que descrevem as leis de Newton no espaço-tempo. Para isso necessitamos fazer a conversão de todas as grandezas físicas para quatro coordenadas, por exemplo, o vetor velocidade agora passa a ter uma componente imaginária pura relacionada ao tempo.

4.2 Geometria Não-euclidiana

Foram abordadas durante o projeto noções de geometria em espaços curvos e como o espaço plano pode ser considerado uma aproximação da mesma. Como exemplo, podemos demonstrar que uma figura geométrica, como o círculo, possui propriedades diferentes quando está inscrito na superfície de uma esfera de raio a . A área de círculo inscrito sobre uma esfera pode ser considerado como a área de uma calota e usando a simetria esférica qualquer círculo pode se comportar como na fig. 2. Assim resta a calcular a área dessa superfície, a qual pode ser feita através da seguinte equação:

(6.1)

$$A = \iint d\sigma = \iint \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \hat{u}|} dA.$$

Onde σ representa o elemento de integração de uma superfície tridimensional a ser projetada em um plano, \hat{u} o versor perpendicular ao plano projetado e ∇f é o gradiente da função da figura a qual o círculo está inscrito, que nesse caso se resume a equação de esfera (ver ref. [6]).

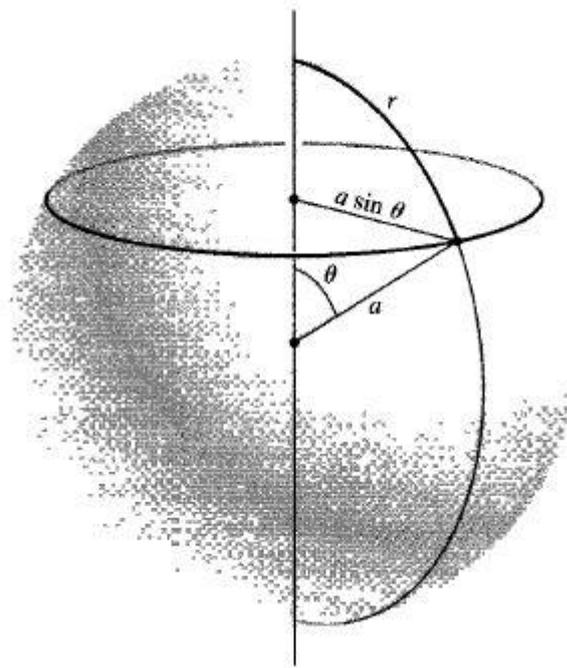


Figura 2: Representação de um círculo inscrito sobre a superfície de uma esfera. Retira da referência [5].

Substituindo os valores da equação e alterando para coordenadas cilíndricas encontramos:

$$(6.2) \quad A = \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{aR}{\sqrt{a^2 - R^2}} dRd\varphi;$$

$$(6.3) \quad A = 2\pi a^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \right).$$

Onde a é o raio da esfera e r o comprimento de arco que representa o raio da calota em três dimensões.

Para um $a \gg r$, é válida a seguinte aproximação por série de Taylor:

$$(6.4) \quad 2\pi a^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \right) = 2\pi a^2 \left(1 - 1 + \frac{r^2}{2a^2} \right) = \pi r^2.$$

Mostrando assim que para espaços de grandes curvaturas a geometria se resume a euclidiana.

Também podemos trabalhar com outros sistemas de coordenadas quando usamos espaços curvos, essas coordenadas são chamadas de coordenadas curvilíneas e seus versores estão diretamente relacionados com a métrica do espaço usado. A vantagem de se usar um novo eixo ortonormal curvo é que a métrica após a mudança passa a se comportar como a de Minkowski além de facilitar nos cálculos de operadores diferenciais, assim como usado na ref. [10].

4.3 Solução de Schwarzschild

Após uma introdução a os espaços curvos, começaram os estudos da teoria dos tensores e da Relatividade Geral. Assim foram analisados espaços que possuíam algum tipo de curvatura através da teoria proposta por Einstein.

A primeira solução estudada foi a de Schwarzschild que descreve como o espaço-tempo deve se comportar diante um buraco negro. Embora um buraco negro teoricamente não represente um meio de transporte no espaço-tempo o seu estudo é útil para o entendimento das soluções das equações de Einstein.

A métrica de um espaço-tempo em volta de um buraco negro deverá ter a seguinte forma (em coordenadas esféricas):

(7.1)

$$dS^2 = A(r, t)dr^2 + B(r, t)(r^2)(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2) + C(r, t)drdt - D(r, t)dt^2.$$

Onde A, B, C e D são funções a serem determinadas.

A métrica não deve se alterar se invertermos o sinal após a igualdade, assim podemos representar a mesma métrica por:

(7.2)

$$dS^2 = -A(r, t)dr^2 - B(r, t)(r^2)(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2) - C(r, t)drdt + D(r, t)dt^2.$$

Devemos supor que a métrica possua simetria esférica e que suas componentes espaciais sejam independentes do tempo. Além disso, quando $r \rightarrow \infty$, a métrica deve se comportar como a de Minkowski, pois longe do buraco negro não deve haver ação do campo gravitacional. Com isso a métrica pode ser escrita da seguinte forma:

$$(7.3) \quad dS^2 = -A(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2) + D(r)dt^2.$$

Para facilitar os cálculos dos tensores a seguir, realizamos as seguintes mudanças de variáveis:

$$(8) \quad A(r) = e^{2\alpha}, D(r) = e^{2\beta}.$$

As exponenciais são escolhidas pela facilidade do cálculo das derivadas, enquanto a multiplicação por dois da variável é escolhida por se anular com o divisor da definição do símbolo de Christoffel, de modo que tais alterações não alteram o resultado final.

Estamos interessados em encontrar as funções representadas, tal que concordem com a equação de Einstein dada por:

$$(9) \quad G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}.$$

Onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, $R_{\mu\nu}$ o tensor de Ricci, R o escalar de curvatura, $T_{\mu\nu}$ o tensor energia-momento e G a constante gravitacional de Newton.

Desse modo, resta-se agora encontrar os valores dos tensores de Riemann, Ricci e o escalar de curvatura.

Primeiro iremos usar a notação de Einstein:

$$(10) \quad \begin{cases} x^0 = r, \\ x^1 = \theta, \\ x^2 = \varphi, \\ x^3 = t. \end{cases}$$

Depois devemos definir os coeficientes métricos covariantes e contravariantes:

$$(11a) \quad g_{mn} = \begin{pmatrix} -e^{2\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \text{sen}^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2\beta} \end{pmatrix},$$

$$(11b) \quad g^{mn} = \begin{pmatrix} -e^{-2\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2}\text{sen}^{-2}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2\beta} \end{pmatrix},$$

$$0 \leq m, n \leq 3.$$

Onde g_{mn} é o tensor métrico covariante e g^{mn} é o tensor métrico contravariante, tal que $g_{mn}g^{hn} = \delta_m^h$ (Delta de Kronecker). Os tensores métricos podem ser considerados como operados abaixadores ou levantadores de índices, não havendo, quando de sua aplicação, a criação de um novo tensor, porém de uma nova representação do mesmo ente geométrico [7]. Os coeficientes métricos são facilmente encontrados relacionando a métrica proposta com a fórmula generalizada de uma métrica: $dS^2 = g_{mn}dx^m dx^n$.

Após isso, devemos calcular os símbolos de Christoffel o qual é necessário para o cálculo dos tensores. Os símbolos de Christoffel embora aparentemente sejam bem parecidos com os tensores, não representam tensores, porém são vistos frequentemente no cálculo tensorial. Esses símbolos estão relacionados com o transporte paralelo e a aceleração de uma partícula em certo espaço métrico. Um símbolo de Christoffel de 1ª espécie é definido como:

$$(12.1) \quad \Gamma_{j,nk} = \Gamma_{j,kn} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^n} + \frac{dg_{nj}}{dx^k} - \frac{\partial g_{kn}}{\partial x^j} \right), 0 \leq j, k \leq 3.$$

Assim podemos calcular os símbolos de Christoffel de 1ª espécie para esse espaço métrico. Desconsiderando as componentes iguais, devido a simetria dos índices após a vírgula, serão ao todo 40 componentes dos quais 31 serão nulos. Um exemplo do símbolo não nulo:

$$(12.2) \quad \Gamma_{0,11} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{01}}{\partial x^2} + \frac{dg_{10}}{dx^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} \right) = r.$$

Assim conseguimos encontrar todos os símbolos de Christoffel de 1ª espécie. Após o cálculo de alguns símbolos é fácil notar que, símbolos que possuam três índices diferentes irão ser nulos devido todas as componentes da métrica utilizadas serem nulas.

Para encontrar os tensores desejados, precisamos calcular os símbolos de Christoffel de 2ª espécie que podem ser definidos como:

$$(13) \quad \Gamma_{kn}^p = g^{pj} \Gamma_{j, kn}, 0 \leq p \leq 3.$$

É fácil notar que p deve ser igual a j para que não encontremos valores nulos. Assim com os valores dos símbolos de 1ª espécie encontramos facilmente os símbolos de 2ª espécie.

O próximo passo para encontrar os valores das funções desejadas é calcular os tensores de Riemann. Eles são importantes pois sua contração resulta no tensor de Ricci presente na equação de campo de Einstein, além de precisarmos do tensor de Ricci para o cálculo do escalar de curvatura. O tensor de Riemann por sua vez está inteiramente ligado aos símbolos de Christoffel já calculados, podemos defini-los como:

$$(14) \quad R_{mnpk} = \frac{1}{2} (\partial_k \partial_n g_{pm} + \partial_p \partial_m g_{nk} - \partial_k \partial_m g_{np} - \partial_p \partial_n g_{km} + g_{lj} (\Gamma_{nk}^l \Gamma_{mp}^j - \Gamma_{np}^l \Gamma_{mk}^j)),$$

$$0 \leq l \leq 3.$$

Para simplificar a expressão foi usada a convenção da ref.[8] onde: $\partial_\emptyset = \frac{\partial}{\partial \emptyset}$.

Assim é possível calcular todos os tensores de Riemann. O tensor de Ricci é dado pela contração de um tensor de Riemann por isso se torna interessante transformar o tensor que foi encontrado em um tensor misto, que pode ser feito da seguinte maneira:

$$(15) \quad R_{nkp}^l = g^{ml} R_{mnpk}.$$

Com o tensor de Riemann calculado basta igualarmos um dos índices inferiores ao superior para contrairmos e encontrar o tensor de Ricci:

$$(16) \quad R_{nlp}^l = R_{np}.$$

É válido lembrar que o tensor de Riemann é antissimétrico em relação a uma permutação de índices inferiores.

Os tensores de Ricci também podem ser calculados diretamente através dos símbolos de Christoffel através da relação:

$$(17) \quad R_{kn} = \partial_n \Gamma_{kj}^j - \partial_j \Gamma_{kn}^j + \Gamma_{kj}^p \Gamma_{p0}^j - \Gamma_{kn}^p \Gamma_{pj}^j.$$

No caso da solução de Schwarzschild o cálculo direto dos tensores de Ricci através dos símbolos de Christoffel pode ser uma melhor opção pois é possível fazer uma relação entre os valores possíveis afim de mostrar mais rapidamente que todos os valores que não estão na diagonal principal serão nulos [8], porém na métrica de Morris-Thorne, que será exibida a seguir, o cálculo dos tensores de Riemann é importante pois estão presentes no artigo (ref.[10]).

Podemos calcular o escalar de curvatura como:

$$(18) \quad R = R_m^m = g^{mn} R_{mn}.$$

A métrica que consideramos é uma solução para uma distribuição estática, com simetria esférica localizada na origem. Para pontos exteriores a distribuição, deve valer a solução em vácuo, que se caracteriza pelo tensor Energia-momento nulo:

$$(19) \quad T_{\mu\nu} = 0 = G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}.$$

Isso faz com que o tensor de Einstein também se anule, e conseqüentemente o tensor de Ricci. Assim para encontrarmos a solução das funções desejadas, basta igualarmos os tensores de Ricci encontrados a zero e resolver as equações diferenciais. Os tensores de Ricci e as respectivas equações são:

$$(20a) \quad R_{11} = \frac{\beta''}{2} + \left(\frac{\beta'}{2}\right)^2 - \alpha' \beta' - \frac{\alpha'}{r} = 0,$$

$$(20.b) \quad R_{22} = e^{-\alpha} \left(\frac{r\beta'}{2} - r\alpha' + 1 \right) - 1 = 0,$$

$$(20.c) \quad R_{33} = R_{22} \text{sen}^2 \theta = 0,$$

$$(20.d) \quad R_{00} = c^2 e^{(\beta-\alpha)} \left(-\frac{\beta''}{2} - \left(\frac{\beta'}{2} \right)^2 + \frac{\alpha'\beta'}{4} - \frac{\beta'}{r} \right) = 0.$$

Ao resolvermos as equações diferenciais e relacionarmos a constante de contorno com a massa, e substituindo os valores das funções na métrica proposta inicialmente, encontrará a métrica de Schwarzschild:

$$(21) \quad dS^2 = -\frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2) + c^2 \left(1 - \frac{2m}{r} \right) dt^2.$$

4.4 O Wormhole de Morris-Thorne

A solução de Schwarzschild embora possa ser trabalhada e utilizada para se criar uma “ponte de Einstein-Rosen” ou wormhole de Schwarzschild [9], essa solução levaria ao acontecimento de horizontes de eventos o que impossibilitaria de ser usada como meio de transporte no futuro. Perante isso, Michael S. Morris e Kip S. Thorne deduziram uma nova métrica que apresenta um buraco no espaço-tempo sem a presença de horizonte de eventos que seria fisicamente “mais” possível de ser atravessado.

A métrica do wormhole de Morris-Thorne estático e esfericamente simétrico [10] deve ter a seguinte forma:

$$(22) \quad dS^2 = -e^{2\Phi} c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{b}{r}} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2).$$

Onde Φ e b são funções arbitrárias dependentes somente do raio, sendo b a função que determina a forma espacial do wormhole e Φ determina o redshift gravitacional.

Para estabelecer as equações de campo de Einstein e as forças de marés sentidas pelos viajantes devemos calcular os tensores de Riemann e de Einstein. Embora a ref.

[10] utilize outra fórmula para o cálculo de tensores e dos símbolos de Christoffel mais simplificada, os tensores podem ser obtidos da mesma maneira como feita na seção 4.2, porém agora com diferentes tensores métricos dados por:

(23a)

$$g_{mn} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{1-\frac{b}{r}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \text{sen}^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2\Phi} \end{pmatrix},$$

(23b)

$$g^{mn} = \begin{pmatrix} -(1-\frac{b}{r}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} \text{sen}^{-2} \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2\Phi} \end{pmatrix}.$$

Foi utilizada aqui a convenção usada em (10).

Assim de modo análogo às definições da seção 4.3 é possível calcular os tensores de Riemman. Embora foram conferidos os tensores durante o projeto optou-se por não exibir a mesma demonstração nesta seção já que são pequenas diferenças entre esta e a seção 4.3.

Após encontrarmos todos os tensores de Riemann, podemos trocar as bases para um novo sistema de coordenadas curvilíneas próprio do espaço usado. Para isso definimos novos versores:

$$(24) \quad \begin{pmatrix} r' \\ \theta' \\ \varphi' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}.$$

Onde $r', \theta', \varphi', t'$ são os novos versores ortonormais do sistema adotado, geralmente os versores são denotados por $\hat{}$ porém por limitações do editor de texto foi utilizado $'$ para representa-los. Os versores podem ser calculados em relação aos antigos versores da seguinte maneira para esse caso:

$$(25) \quad \phi' = \sqrt{g_{\phi\phi}} \phi.$$

No final da mudança de coordenadas deveremos encontrar uma métrica na forma de Minkowski, porém não representa que o espaço é plano já que os versores não são os cartesianos.

$$(26) \quad dS^2 = dr'^2 + d\theta'^2 + d\phi'^2 - c^2 dt'^2.$$

A partir das novas coordenadas é possível encontrar os tensores de Riemann, de Ricci e o escalar de curvatura além do tensor de Einstein que agora é necessário já que a única solução em vácuo possível é a de Schwarzschild. Com o cálculo de todos os tensores é possível encontrar o tensor energia-momento e as funções explícitas em função de r usadas na métrica no início da seção. Nessa parte irão aparecer novas funções como ρ, τ e p que depende também de r e respectivamente representa a densidade de massa-energia, tensão por unidade de área e a pressão.

A visualização da métrica é de grande importância para notarmos como é o espaço-tempo que agora trabalhamos. Embora seja difícil fazer uma visualização de algo quadridimensional, podemos representa-la de modo bidimensional para que possamos entendê-la.

Considerando a métrica de Minkowski (em coordenadas cilíndricas) com um tempo fixo, e possuindo simetria esférica, podemos sem perda de informações muito importantes [10], expressar a métrica como:

$$(27) \quad dS^2 = \left[\left(\frac{dz}{dr} \right)^2 + 1 \right] dr^2 + r^2 d\phi^2.$$

Também podemos expressar a métrica proposta por Morris e Thorne como:

$$(28.1) \quad \frac{dy}{dx} = \pm \left(\frac{r}{b} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Onde b depende de r , e z é a superfície que procuramos. Integrando e utilizando a parametrização proposta na referência [10] encontramos a nova superfície a qual a métrica Morris e Thorne representa:

$$(28.2) \quad z = \pm b \ln \left(\frac{r}{b} + \sqrt{\left(\frac{r}{b}\right)^2 - 1} \right),$$

$$(28.3) \quad r = b \cosh \theta,$$

$$(28.4) \quad z = \pm \cosh^{-1} \left(\frac{r}{b} \right).$$

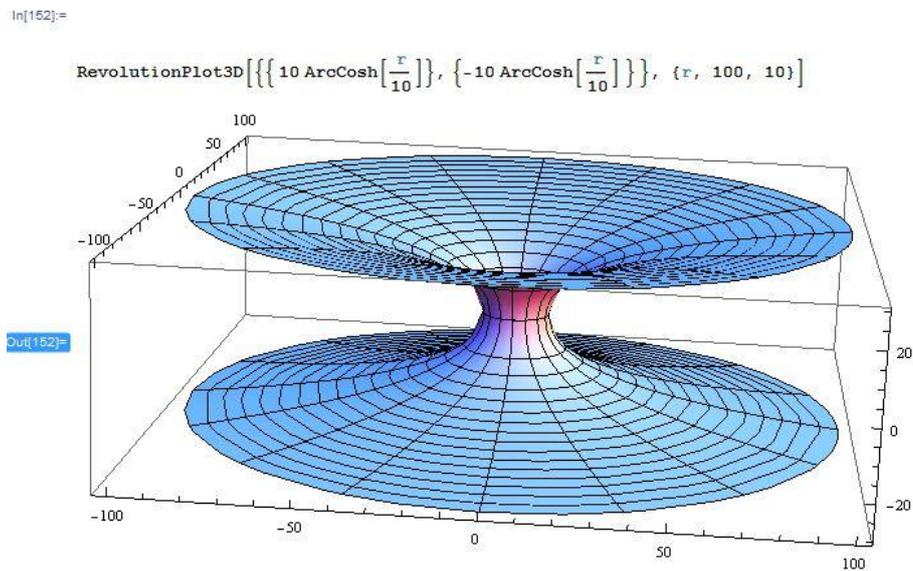


Figura 3: Superfície de um Wormhole de Morris-Thorne.

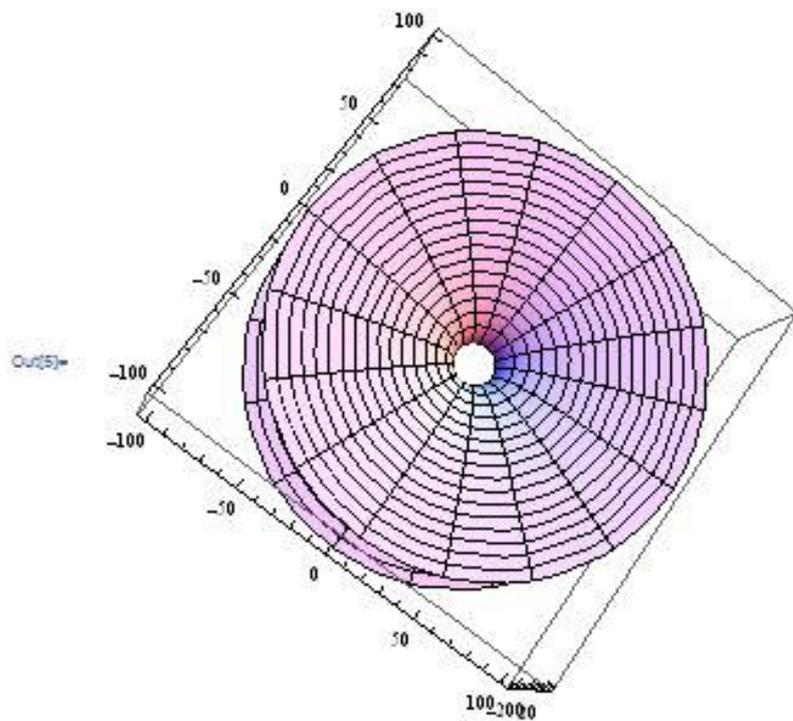
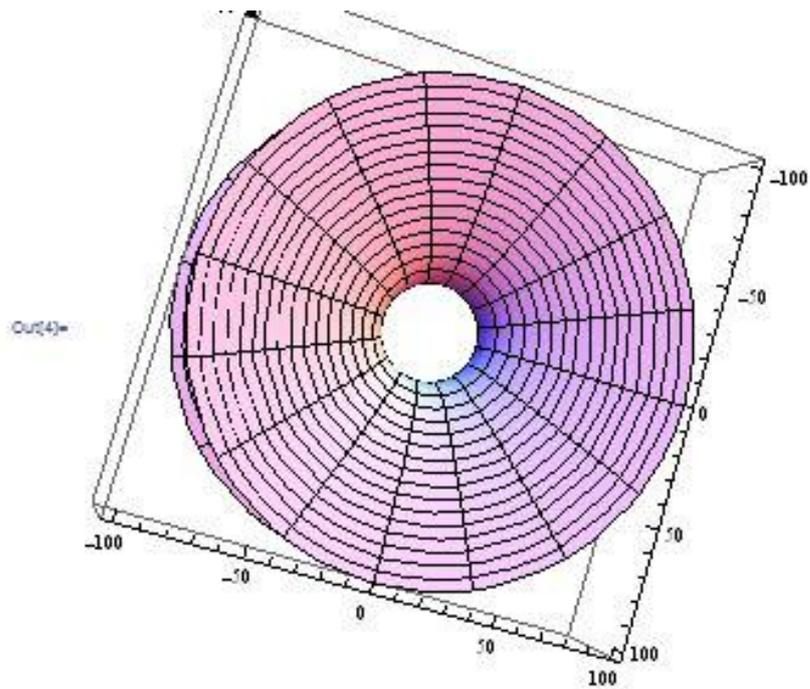


Figura 4. Wormholes de Morris-Thorne com valores de b diferente, mostrando qual a influência da função na métrica. As regiões mais distantes tende a comportamento plano e a garganta do wormhole representada ao meio representa um dos problemas topológico que a métrica possui que é a de criar um “rasgo” no espaço-tempo.

5. CONCLUSÕES

Com o projeto foi possível iniciar os estudos de Relatividade passando pela Relatividade Especial até a uma introdução pela Relatividade Geral. Foi possível também uma revisão da mecânica clássica com outros formalismos matemáticos como as equações de Lagrange e a teoria dos tensores. O espaço-tempo de Minkowski foi analisado assim como de maneira mais simples os espaços-tempo que representam as soluções de Schwarzschild e Morris-Thorne. Alguns dos problemas de viajar mais rápido do que a luz já foram notados durante o projeto como a topologia do espaço-tempo do wormhole de Morris-Thorne e a presença da matéria exótica para criá-lo. O projeto foi renovado com finalidade de usar as ferramentas aprendidas durante esse projeto para realizar um estudo mais detalhados dos espaços métricos que podem servir como meio de transportes futurísticos e visualiza-los computacionalmente.

6. CRONOGRAMA

01/08/2012 a 30/09/2012: Revisão da literatura. Estudo da teoria da relatividade especial, transformações de Lorentz.

01/10/2012 a 31/12/2012: Mecânica de Lagrange. Princípio de Hamilton. Espaço-Tempo de Minkowski. Quadri-vetores. Simultaneidade. Mecânica Relativística.

01/01/2013 a 31/03/2013: Fundamentos físicos da teoria da relatividade geral. Princípio da equivalência. Introdução a espaços curvos. Elaboração do relatório parcial.

01/04/2013 a 31/05/2013: Coordenadas Curvilíneas. Métrica. Tratamento Tensorial. Tensor de Riemann. Tensor de Ricci. Escalar de Curvatura. Símbolos de Christoffel.

01/06/2013 a 31/07/2013: Equação de Einstein. Tensor de Einstein. Solução de Schwarzschild. Solução do Wormhole de Morris-Thorne. Visualização. Elaboração do relatório final.

7. REFERÊNCIAS

- [1] FEYNMAN, Richard P.; LEIGHTON, Robert B.; SANDS, Matthew. Lições de física de Feynman: edição definitiva. Porto Alegre: Bookman, 2008. v. 2. 42-13 p.
- [2] SCHUTZ, Bernard. Gravity from the ground up. New York: Cambridge University Press, 2003. 462 p.
- [3] NUSSENZVEIG, H. Moysés. Curso de física básica: 4 ótica, relatividade, física quântica. São Paulo: E. Blücher, 1998. v. 4. 437 p.
- [4] GAZZINELLI, Ramayna. Teoria da relatividade especial. 2 ed. São Paulo: Editora Blucher, 2009. 147 p.
- [5] HARTLE, James B. Gravity: an introduction to Einstein's general relativity. San Francisco, EUA: Addison Wesley, c2003. xxii, 582 p.
- [6] THOMAS, GEORGE B. Cálculo vol. 2. São Paulo: Pearson - Adison-Wesley, 2009. v. 2 . 647 p.
- [7] MARCELO S. BERNAN, FERNANDO M. GOMIDE. Cálculo Tensorial e Relatividade Geral – Uma Introdução. McGraw-Hill 2ª edição. São Paulo. 1987
- [8] MIRJANA DALARSSON, NILS DALARSSON. Tensors, Relativity and Cosmology: a first course. Burlington, USA: Academic Press, c2005. xi, 280.
- [9] WANG, FRANK Y. “The images of a wormhole”. Disponível em: arxiv.org/pdf/physics/0505108v1.pdf
- [10] M.S. MORRIS, K.S. THORNE e U. Yurtsever, "Wormholes, Time Machines, and the Weak Energy Condition", Phys. Rev. Lett. 61, 1446-1449