



Fundação Universidade Federal do ABC

Modelos de discos de acreção ao redor de buracos negros

Caio Almeida Alves de Souza

Orientador: Prof^a Dr^a Cecilia B. M. H. Chirenti

Centro de Matemática, Computação e Cognição (CMCC)

Santo André, 2017

Fundação Universidade Federal do ABC

Modelos de discos de acreção ao redor de buracos negros

Relatório final de iniciação em desenvolvimento
tecnológico e inovação com todas as informações e
resultados do projeto, como parte dos requisitos das
atividades do bolsista, realizado com auxílio de bolsa
PIBITI (CNPq).

Bolsista: Caio Almeida Alves de Souza
Orientador: Prof^a Dr^a Cecilia B. M. H. Chirenti
Centro de Matemática, Computação e Cognição (CMCC)

Santo André, 2017

Resumo

O projeto foi desenvolvido sob a orientação da Prof.^a Dr.^a Cecilia Bertoni Martha Hadler Chirenti e fomentado pelo CNPq, na modalidade PIBITI.

Como proposto desde o início, o objetivo final da pesquisa trata-se do estudo de um modelo geometricamente fino dos discos de acreção no contexto relativístico. Neste relatório final, a discussão acerca da relatividade geral, iniciada no relatório parcial, fora concluída com a complexidade adequada. Além disso, para auxiliar na implementação das correções relativísticas à acreção do gás, introduzimos uma seção inteiramente dedicada ao estudo dos conceitos de hidrodinâmica. Por fim, apresentamos um desenvolvimento matemático cauteloso quanto ao modelo relativístico dos discos de acreção. Ao determinarmos as equações que regem a estrutura do disco, apontamos as soluções analíticas e realizamos as estimativas de magnitude. No mais, algumas discussões já apresentadas no relatório parcial foram reduzidas por motivos de concisão.

Palavras-chave: *buracos negros, discos de acreção, gravitação, mecânica clássica, relatividade geral*

Abstract

The project was developed under the guidance of Prof.^a Dr.^a Cecilia Bertoni Martha Hadler Chirenti and promoted by CNPq, in the PIBITI modality.

As proposed since the beginning, the research final objective covers the study of the *thin accretion disk* model in the relativistic context. In this final report, the discussion over general relativity, started at the partial report, was concluded with the proper complexity. Beyond that, to help us implement the relativistic corrections to the gas accretion, we introduced a section entirely dedicated to the study of hydrodynamics concepts. At last, we present a cautious mathematical development with respect to the relativistic model of accretion disks. After setting the equations that govern the disk's structure, we point the analytical solutions and perform the magnitude evaluation. Furthermore, some discussions that have already been presented in the partial report were reduced for briefness motivations.

Keywords: *black holes, accretion disks, gravitation, classical mechanics, general relativity*

Sumário

1	Introdução	3
2	Desenvolvimento e Resultados	3
2.1	Fenômeno de Acreção	3
2.1.1	Viabilidade do processo	3
2.1.2	Origens da acreção em sistemas binários	4
2.2	Modelo newtoniano dos discos de acreção	6
2.2.1	Premissas iniciais e definições	6
2.2.2	Desenvolvimento matemático	7
2.2.3	Soluções analíticas	9
2.2.4	Análise das soluções	11
2.3	Formalismo Lagrangiano	13
2.3.1	Equações de Lagrange à partir do Princípio de Hamilton	13
2.3.2	Leis de Kepler	14
2.4	Relatividade Restrita	17
2.4.1	Sistemas de coordenadas e diagramas de Minkowski	17
2.4.2	Transformações de Lorentz	18
2.4.3	Espaço-tempo de Minkowski	19
2.5	Relatividade Geral	20
2.5.1	Métrica	20
2.5.2	Geodésicas	21
2.5.3	Derivada Covariante	22
2.5.4	Curvatura	23
2.5.5	Equações de Einstein	24
2.5.6	Métrica de Schwarzschild	24
2.5.7	Geodésicas tipo-tempo na métrica de Schwarzschild	25
2.6	Hidrodinâmica	26
2.6.1	Conceitos de hidrodinâmica não-relativística	27
2.6.2	Conceitos de hidrodinâmica relativística	29
2.6.3	Aspectos do fluido	32
2.6.4	Problema em Acreção Esférica	34
2.7	Modelo relativístico dos discos de acreção	37
2.7.1	Suposições e notação	38
2.7.2	Desenvolvimento matemático	40
2.7.3	Soluções analíticas	46
2.7.4	Análise das soluções	49
3	Conclusões	56
4	Cronograma	57
5	Bibliografia	57

1 Introdução

Para os físicos do século XIX, a gravidade era a única fonte aceitável de energia nos corpos celestes, [1]. Na astrofísica moderna, esta noção é bem ultrapassada. Atualmente, a liberação de energia potencial gravitacional pela matéria que sofre acreção em direção a um corpo gravitacional é tida como a principal fonte de energia em diversos tipos de sistemas binários fechados, [1]. Este crescente reconhecimento acerca da importância do fenômeno de acreção tem acompanhado uma dramática evolução das técnicas de observação, [1]. Em particular, a exploração sobre todo o intervalo do espectro eletromagnético; i.e. das ondas de rádio até os raios-X, [1].

Dessa maneira, surge um novo papel para a gravidade, uma vez que a acreção sobre objetos compactos, e.g. buracos negros, anãs brancas, etc., denota um mecanismo natural e poderoso para a produção de radiação de alta energia, [1]. Apesar de introduzirmos algumas ideias simples sobre a relevância acadêmica dos fenômenos de acreção, os detalhes quanto ao processo, juntamente com suas causas, serão apresentados num outro momento.

Por fim, enunciaremos os objetivos designados a serem alcançados no desenvolvimento deste projeto,

- Estudar a viabilidade da acreção;
- Desenvolver e solucionar, analiticamente, o modelo newtoniano para os discos de acreção;
- Estudar as equações da gravitação universal;
- Derivar, analiticamente, as leis de Kepler;
- Dominar os conceitos físicos básicos da teoria da relatividade geral;
- Resolver numericamente as equações de movimento (geodésicas) relativísticas e visualizar as trajetórias;
- Desenvolver e solucionar, analiticamente, o modelo relativístico para os discos de acreção.

2 Desenvolvimento e Resultados

Neste segmento, exibimos as informações principais acerca do processo metodológico adotado ao projeto, bem como os detalhes do seu desenvolvimento. Além disso, optamos por apresentar os resultados ao longo das discussões. Tal decisão emprega um encaminhamento mais efetivo das ideias e, com isso, garante maior fluidez na leitura.

Em relação aos detalhes desta estrutura, os diversos tópicos estudados foram separados de acordo com os temas. Cada seção principal é construída através da conjugação entre a revisão da literatura associada, a aplicação dos princípios estudados ao contexto adequado e os resultados pertinentes obtidos.

2.1 Fenômeno de Acreção

2.1.1 Viabilidade do processo

Quando as primeiras ideias acerca do fenômeno de acreção foram apresentadas à comunidade científica por volta do século XVIII, houveram muitas discussões acerca da viabilidade deste processo astrofísico [1], uma vez que certas equações utilizadas no contexto da Física possuem soluções matemáticas, porém estas podem vir a não representar algum aspecto da realidade. Os estudos quantitativos de grande prestígio para a teoria de acreção se perpetuaram no século XX, com embasamento teórico forte e um conjunto de evidências observacionais [1]. Sendo assim, nada mais justo que iniciarmos o projeto verificando de maneira simples, porém seguramente fundamentada, a viabilidade do fenômeno de acreção.

Imaginemos duas partículas, m_1 e m_2 , que orbitam circularmente um corpo central de massa M , tal que $M \gg m_1, m_2$. As partículas se encontram, inicialmente, a uma distância r do corpo. Devido a algum tipo de interação entre elas, e.g. a existência de estresse viscoso, as partículas dirigem-se para órbitas distintas. A partícula m_1 passa a realizar uma órbita circular de raio r_1 , onde $r_1 < r$, enquanto que a partícula m_2 descreve uma outra, de raio r_2 , onde $r_2 > r$.

Uma maneira simples de verificar se o processo descrito acima é viável, pelo menos do ponto de vista energético, consiste em verificar a diferença na energia do sistema entre os estados inicial e final. Se tal variação for positiva, significa que é necessário inserir energia ao sistema para que o fenômeno ocorra. Caso seja negativa, então o sistema perde energia ao realizar esse processo, logo, o fenômeno é espontâneo e, portanto, viável.

Como estamos tratando de um sistema mecânico com rotação, é necessário impor uma condição bastante importante: a conservação de momento angular do sistema. Sendo assim, é natural inferir que a variação do momento angular é nula, uma vez que os torques envolvidos são internos ao sistema. Matematicamente, temos

$$\Delta J = 0. \tag{1}$$

O momento angular para massas pontuais é definido $\mathbf{J}_i \equiv \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$, onde \mathbf{r}_i é o vetor posição e \mathbf{p}_i é o vetor momento linear, ambos respectivos à i -ésima partícula. Neste problema, o índice i pode assumir unicamente os valores 1 e 2. No contexto da gravitação clássica, a velocidade angular de um corpo qualquer em órbita circular pode ser determinada pela equação $\omega = \sqrt{GM}r^{-3}$, onde G é a constante gravitacional universal, M , a massa do corpo central e r , o raio de sua órbita, [1, 2]. Aplicando esta ao módulo do momento angular da i -ésima partícula, J_i , obtemos

$$J_i = m_i \sqrt{GM r_i}.$$

Investindo os módulos do momento angular de cada partícula, respectivos aos instantes inicial e final do sistema, na Eq.(1), e utilizando um pouco de trabalho algébrico, esta pode ser explicitada conforme

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\sqrt{r} - \sqrt{r_1}}{\sqrt{r_2} - \sqrt{r}}. \quad (2)$$

Neste contexto simplificado, a conservação de momento angular implica numa relação específica entre a razão das massas das partículas e os raios das órbitas.

Voltando nossa atenção à meta definida em alguns parágrafos acima, calculamos a variação da energia total do sistema,

$$\Delta E = \frac{GM}{2} \left[m_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) + m_2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2} \right) \right]. \quad (3)$$

Precisamos avaliar se esta expressão é positiva ou negativa. Caso seja negativa, significa que o sistema sai de uma configuração para outra de menor energia e, portanto, o processo é energeticamente favorável. Caso seja positivo, indicará um grande problema conceitual na análise que buscamos desenvolver.

Inserindo a conservação de momento angular à Eq.(3), obtemos

$$\Delta E = \frac{GMm_1}{2} \left[\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) + \left(\frac{\sqrt{r} - \sqrt{r_1}}{\sqrt{r_2} - \sqrt{r}} \right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2} \right) \right].$$

Entretanto, apesar de notarmos que o primeiro termo multiplicativo da equação imediatamente anterior é positivo, i.e.

$$\frac{GMm_1}{2} > 0,$$

ainda é necessário avaliar o conteúdo dos colchetes para determinar se a variação de energia, ΔE , é positiva ou negativa. Através de um trabalho algébrico relativamente extenso, é possível demonstrar que o termo entre colchetes é, de fato, negativo. Portanto, isso significa demonstrar que, no contexto do problema apresentado, temos $\Delta E < 0$. Deste resultado, conclui-se que o fenômeno de acreção é energeticamente viável diante considerações físicas adequadas; no caso, a conservação de momento angular do sistema.

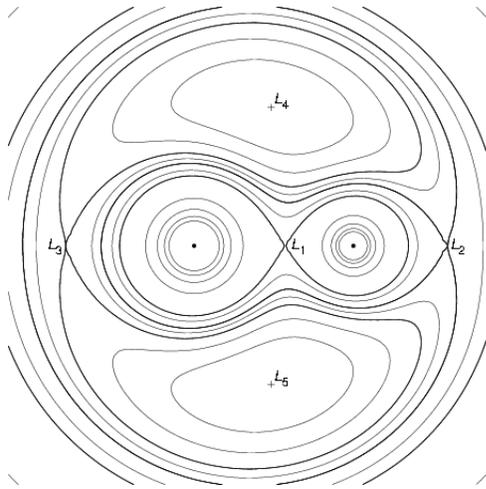
2.1.2 Origens da acreção em sistemas binários

Antes de discutirmos sobre os discos de acreção em si, precisamos compreender como se dá o fenômeno de acreção. Para isso, partiremos de um panorama qualitativo geral desta ocorrência num sistema binário. Para adequar o estudo dentro da proposta deste projeto, suponhamos um sistema binário formado por um buraco negro de Schwarzschild e uma estrela normal.

Primeiramente, para tornar o texto mais claro, introduziremos dois conceitos importantes. O primeiro deles trata-se dos *pontos de Lagrange*. Quando estudamos sistemas astrofísicos que envolvem dois corpos interagindo gravitacionalmente entre si, i.e. um sistema binário, é importante calcular, por diversas razões, os pontos nos quais a resultante sobre uma partícula externa é nula, [1]. Estas posições, chamadas pontos de Lagrange, caracterizam as soluções estacionárias às equações de movimento para uma partícula neste sistema, [1]. Na Figura 1, os pontos de Lagrange estão representados pela letra L . Em resumo, os pontos de Lagrange são pontos de equilíbrio num sistema binário; para estudos mais detalhados, precisaríamos ainda discutir sobre a estabilidade de cada um destes.

Quanto ao segundo conceito, discutiremos sobre o chamado *lóbulo de Roche*. Num sistema binário, como os corpos massivos estão orbitando um ao outro, podemos, através da mudança para um referencial girante, definir uma nova função potencial que, além de levar em conta o potencial gravitacional, considera também termos de correção devido às forças fictícias, e.g. força centrífuga, [1]. Este é conhecido como *potencial de Roche*. Na Figura 1, as curvas de nível traçadas na imagem representam superfícies equipotenciais, i.e. superfícies nas quais o potencial de Roche assume um valor constante, [1]. Para o contexto físico adotado por este projeto, a mais importante delas é aquela que conecta os dois “vales” presentes na Figura 1, cuja junção encontra-se no ponto de Lagrange L_1 , [1]. Esta superfície equipotencial envolve cada um dos corpos na região que denominamos lóbulo de Roche.

Esclarecidas tais definições, podemos seguir com a descrição do fenômeno de acreção e das causas que o regem.



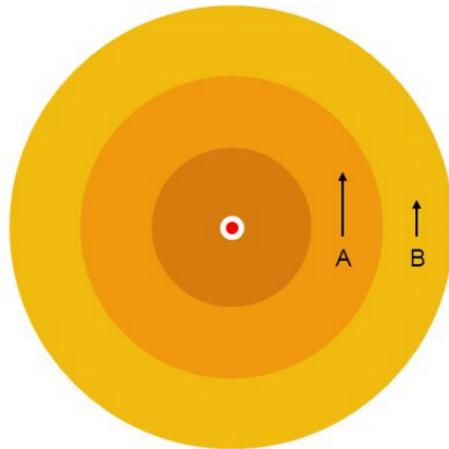
(Figura 1. Superfícies equipotenciais em um sistema binário com a demarcação dos pontos de Lagrange. Fonte: INSPIRE HEP. <http://inspirehep.net/record/846517/plots>)

Uma das principais propriedades de estrelas é o escoamento de matéria através de sua superfície – geralmente, material gasoso. A taxa com a qual massa é liberada depende do tipo de estrela que estamos considerando. Além disso, durante o processo de evolução estelar, existe um estágio no qual a estrela começa a “inflar”, [1, 2, 3]. Em sistemas binários, quando essa expansão da estrela é tal que preenche o lóbulo de Roche, a matéria passa a ser deslocada para o buraco negro, uma vez que atravessou o limite das superfícies equipotenciais, determinado aqui pelo ponto de Lagrange interno, L_1 , [1, 2, 3]. Este, e outros pontos de Lagrange num sistema binário, estão ilustrados na Figura 1.

Como a estrela, em geral, possui rotação em torno do próprio eixo, isso impede que a matéria descreva uma trajetória de queda livre radial em direção ao buraco negro, [1, 2, 3]. Sendo assim, a existência de momento angular não nulo das partículas do gás em acreção faz com que estas movam-se em órbitas quase-circulares ao redor do buraco negro, [1, 2, 3]. A partir do momento em que este evento se sucede, é possível a formação de um disco gasoso ao redor do buraco negro; à este, daremos o nome de *disco de acreção*, [1, 2, 3].

A composição desse tipo de estrutura requer algum tipo de torque viscoso entre as partículas do gás em acreção, fazendo com que as mesmas percam energia e promovam a transferência de momento angular para fora do disco, [1, 2, 3]. As causas dessa viscosidade ainda nos são enigmáticas, mas há evidências de que os campos magnéticos desempenham um papel importante nesse aspecto através do que chamamos de *instabilidade magneto-rotacional*, um fenômeno que engendra turbulência no gás e torna instável o fluido, [1, 2, 3].

Para entender como esse torque viscoso age para o desenvolvimento da estrutura do disco, imaginemos duas camadas sucessivas de matéria deste: uma mais interna, A, e outra, mais externa, B, conforme ilustrado na Figura 2.



(Figura 2. Camadas sucessivas do disco de acreção sob ação de torques viscosos. Fonte: C.P. Dullemond. Structure and evolution of protoplanetary disks. Accretion disk theory lecture. <http://slideplayer.com/slide/5124157/>)

Entre estes anéis, a presença de atrito gera um torque negativo em A, o que leva à diminuição de seu momento angular e, conseqüentemente, à redução de seu raio orbital, [1]. Sendo assim, a camada B sofre a ação de um torque positivo, que aumenta seu momento angular e, portanto, amplia seu raio orbital, [1]. Portanto, momento angular é transportado para fora do disco, enquanto matéria flui para dentro do buraco negro, [1, 2, 3]. A diferença de energia do sistema é liberada na forma de energia térmica e radiação, [1, 2, 3].

A eficiência energética desse fenômeno cósmico é uma das maiores conhecidas, configurando discos de acreção como os objetos astrofísicos mais luminosos do Universo. No caso de um buraco negro de Schwarzschild, a eficiência energética de acreção é $\eta \approx 0,06$, [3].

2.2 Modelo newtoniano dos discos de acreção

De modo a estudar analiticamente um primeiro modelo para discos de acreção, decidiu-se abordar o conteúdo presente no artigo *Black Holes in Binary Systems. Observational Appearance*, publicado em 1973 pelos pesquisadores soviéticos N. I. Shakura e R. A. Sunyaev; referência [3]. Este é um dos mais importantes e reconhecidos artigos científicos para o desenvolvimento da teoria de acreção, uma vez que os modelos de discos de acreção foram primeiramente formulados através de mecânica newtoniana por Shakura & Sunyaev. Aqui, percebe-se a clara motivação por trás dessa escolha.

2.2.1 Premissas iniciais e definições

A ideia principal apresentada em Shakura & Sunyaev (1973) era descrever um disco geometricamente fino através de equações hidrodinâmicas ao longo da espessura do mesmo. Dizer que o disco é “geometricamente fino” significa dizer que a escala da espessura H do disco é muito menor que a da distância radial r em relação ao buraco negro, i.e. $H \ll r$, [1, 2, 3]. Além disso, é válido atentar que, diante da geometria deste objeto astrofísico, é conveniente utilizarmos coordenadas cilíndricas em nossos cálculos.

O processo mais importante que governa a acreção da matéria em rotação é a ação de estresse viscoso dentro do fluxo, [1, 2, 3]. Esses estresses dirigem a acreção, como já explicado, transportando momento angular para fora e matéria para dentro; é também uma forma de converter a energia gravitacional da matéria em calor, o qual será transferido para as faces superior e inferior do disco, e então, radiado, [1, 2, 3].

O modelo original também supõe um disco de acreção opticamente espesso na direção vertical e um fluido turbulento descrito por um tensor de estresse viscoso proporcional à pressão total, P , [3]. Este é então parametrizado conforme

$$w_{r\varphi} = -\alpha P = -\alpha \rho v_s^2, \quad (4)$$

onde v_s é a velocidade do som no fluido, ρ representa a densidade deste, e α é uma constante adimensional, que pode ser fixada para valores entre 0 (quando a acreção é interrompida) e próximos a 1, [3].

Deve ficar claro que este modelo não é uma teoria real de viscosidade em discos de acreção, mas apenas uma forma de esconder nossa ignorância acerca da viscosidade através do parâmetro α , o qual é suposto $\lesssim 1$, [3].

Foi considerado que o disco não possui auto-gravitação, o que significa que a massa deste é muito menor que a massa do objeto central (i.e. $M_{\text{disco}} \ll M_{\text{buraco negro}}$), portanto, a influência gravitacional do disco é desprezível, [2, 3].

O modelo assume que o disco está em equilíbrio térmico local, não transporta calor para dentro e pode irradiar o calor viscoso eficientemente como um corpo negro, [2, 3].

Além das considerações prévias, de modo a ajustar o conteúdo nas concepções do projeto, assumiremos que:

- O disco é estável, i.e. $\partial/\partial t \equiv 0$;
- O disco possui simetria axial, i.e. $\partial/\partial\varphi \equiv 0$;
- A velocidade tangencial é muito maior que a radial, i.e. $v_\varphi \gg v_r$;
- Há balanço hidrostático na direção vertical;
- Não há presença de campos magnéticos no disco.

Durante o progresso analítico, posteriormente apresentado neste relatório, iremos nos utilizar de alguns aspectos importantes para descrever a estrutura do disco de acreção. Um destes é a densidade superficial de matéria do disco a uma distância r do buraco negro, u_0 . Considerando z_0 como sendo a meia-espessura do disco, definimos u_0 conforme

$$u_0 \equiv 2 \int_0^{z_0} \rho dz \approx 2 z_0 \rho, \quad (5)$$

onde ρ representa a densidade volumétrica do gás e z é a coordenada que aponta na direção vertical, perpendicular ao plano do disco, [2, 3].

É necessário determinar também o estresse viscoso que age sobre as camadas adjacentes de matéria, viabilizando assim o fenômeno de acreção e a estruturação do disco. Definimos $W_{r\varphi}$ como sendo o estresse entre os elementos fluidos na órbita de raio r em elementos vizinhos numa órbita $r + dr$, estando relacionado ao tensor de estresse de acordo com

$$W_{r\varphi} = 2 \int_0^{z_0} w_{r\varphi} dz. \quad (6)$$

Calculando o resultado desta integral, com o auxílio das Eqs.(4) e (5), obtemos

$$W_{r\varphi} = -\alpha u_0 v_s^2. \quad (7)$$

2.2.2 Desenvolvimento matemático

A descrição analítica para a formulação das equações que regem a estrutura do disco de acreção será elaborada através do uso de mecânica newtoniana, tal como apresentado em Shakura & Sunyaev (1973), porém com as devidas alterações diante do contexto do projeto.

Iremos assumir que o disco orbita um buraco negro de massa M e que o gás é depositado no disco à uma taxa constante, \dot{M} . A taxa de acreção sobre o objeto central é a mesma, \dot{M} . Consideraremos também que o plano central do disco se encontra no plano equatorial do buraco negro, definido por $z = 0$. [2, 3]

Em condições estáveis, a estrutura do disco pode ser determinada através da solução simultânea de quatro equações de conservação, em conjunto à especificação de leis para a viscosidade e para o transporte de radiação do centro à superfície do disco, [1, 2, 3].

Conservação de Massa A equação referente à conservação de massa no escoamento de fluidos é a chamada *equação de continuidade*, [1, 2, 4]. Relembrando que estamos considerando um disco de acreção estável, a equação de continuidade com a qual iremos trabalhar reduz-se a,

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (8)$$

onde \mathbf{v} representa o campo de velocidades dos elementos de fluido.

Integrando a Eq.(8) em relação ao elemento de volume dV do disco, obtemos

$$2\pi r v_r u_0 = \text{constante}, \quad (9)$$

onde v_r denota a componente radial da velocidade do gás.

Além disso, utilizando o Teorema de Ostrogradski-Gauss, podemos concluir que

$$\dot{M} = 2\pi r v_r u_0 = \text{constante}. \quad (10)$$

Conservação de Momento Angular Neste sistema, trabalhamos com a transferência de momento angular de dentro para fora do disco, entretanto, este processo deve obedecer uma lei fundamental da cinemática de rotação, a conservação do momento angular. Sabemos que uma variação temporal no módulo do momento angular de um sistema é igual ao módulo do torque aplicado sobre este,

$$\tilde{\tau} = \frac{d\tilde{J}}{dt}, \quad (11)$$

onde $\tilde{\tau}$ representa o torque viscoso por unidade de área e \tilde{J} representa o momento angular referente à densidade superficial de matéria, u_0 .

Vamos entender, mais uma vez, como isso acontece. Devido ao atrito entre as camadas adjacentes, uma componente de velocidade radial ($v_r < 0$) surge, e então, as partículas começam a espiralar em direção ao buraco negro, [3]. Sendo assim, temos

$$\frac{d\tilde{J}}{dt} = u_0 \frac{d\omega}{dt} r^2 = -u_0 v_r \frac{d\omega}{dr} r^2. \quad (12)$$

Construindo a expressão para o torque viscoso por unidade de área, $\tilde{\tau}$, obtemos

$$\tilde{\tau} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} W_{r\varphi} r^2. \quad (13)$$

Aplicando as duas relações anteriores à Eq.(11), obtemos

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} W_{r\varphi} r^2 = -u_0 v_r \frac{d\omega}{dr} r^2. \quad (14)$$

Integrando ambos os lados da Eq.(14) em relação ao elemento de área dA , encontramos

$$-2\pi W_{r\varphi} r^2 + C = 2\pi u_0 v_r r^3 \omega. \quad (15)$$

Aplicando o resultado concedido pela imposição de conservação de massa, apresentado na Eq.(10), auferimos

$$-2\pi W_{r\varphi} r^2 + C = \dot{M} \omega r^2. \quad (16)$$

No caso de um buraco negro sem rotação, a constante C na equação anterior é simplesmente o momento angular referente à taxa de acreção do gás na órbita circular marginalmente estável, $r_{\text{ISCO}} \equiv r_0 = 6GM/c^2$, portanto a Eq.(16) representa a variação do momento angular do fluxo de matéria no disco entre um órbita de raio r até sua “queda” ao r_0 , relacionando esta diferença ao estresse viscoso que promove os torques necessários para que este fenômeno aconteça e, além disso, leva em consideração a conservação de massa, [1, 2, 3]. Finalmente, sabendo que $C = \dot{M} \omega_0 r_0^2$, temos

$$\dot{M} \omega \left[1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^{1/2} \right] = 2\pi \alpha u_0 v_s^2. \quad (17)$$

Conservação de Energia Conforme certas partículas do gás vão perdendo momento angular, elas diminuem seu raio orbital e acabam por perder também suas respectivas energias gravitacionais, [1, 2, 3]. Parte desta última vai para o aumento da energia cinética de rotação e a outra parte é convertida em energia térmica, podendo ser irradiada pela superfície do disco, [1, 2, 3].

As forças que levam à transferência de momento angular em um sistema em rotação também estão induzindo um fluxo de energia P , podendo ser facilmente desenvolvido com ajuda da Eq.(16), [1, 2, 3]. Sabemos que a potência de um corpo em rotação, em função do torque τ aplicado sobre ele e de sua velocidade angular ω , é $P = \tau\omega$. Logo,

$$P = -2\pi W_{r\varphi} r^2 \omega. \quad (18)$$

A energia deve ser conservada, logo, se considerarmos a transferência de energia devido ao torque viscoso, em conjunto com o aumento da energia cinética orbital e a perda de energia gravitacional das partículas em acreção, temos que o resultado da soma de todos os termos deverá ser a quantidade de energia restante para ser irradiada pelo disco através de sua superfície, i.e.

$$P_{rad} = \frac{1}{2} \dot{M} v_\varphi^2 - \dot{M} \left(\frac{GM}{r} \right) - 2\pi W_{r\varphi} r^2 \omega. \quad (19)$$

A área efetiva por onde a radiação pode escapar é aquela relacionada às faces superior e inferior do disco, portanto, se quisermos calcular a energia que será radiada por unidade de área dA_s , temos

$$Q = \frac{dP_{rad}}{dA_s},$$

onde dA_s se refere à área total disponível para emissão de radiação, portanto, $dA_s = 4\pi r dr$. Sendo assim,

$$Q = \frac{1}{4\pi r} \frac{d}{dr} \left[\dot{M} \left(\frac{1}{2} v_\varphi^2 - \frac{GM}{r} \right) - 2\pi W_{r\varphi} r^2 \omega \right]. \quad (20)$$

Aplicando as relações dadas pelas Eqs.(10) e (17), realizando o devido tratamento algébrico e considerando os fatores corretos ao sistema em análise, a Eq.(20) pode ser reescrita conforme

$$Q = \frac{3}{8\pi} \dot{M} \frac{GM}{r^3} \left[1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^{1/2} \right]. \quad (21)$$

Como queremos determinar algumas das características do espectro de radiação do disco, precisamos apresentar parâmetros acerca da temperatura, da distribuição de energia da radiação e dos processos que estão relacionados à absorção/emissão da mesma ao longo da estrutura do disco, [1, 3].

Para um dado fluxo Q , a densidade de energia da radiação dentro da camada com densidade superficial u_0 é determinada pela relação

$$\varepsilon = \frac{3}{4} \frac{Q}{c} \sigma u_0 = \frac{9}{32\pi} \dot{M} \frac{GM}{r^3} \frac{\sigma u_0}{c} \left[1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^{1/2} \right], \quad (22)$$

onde σ é a opacidade do gás, [3]. Nas condições que estamos considerando, a maior contribuição para a opacidade surge do espalhamento Thomson em elétrons livres e da absorção livre-livre para a qual $\sigma_{ff} = 0.11 T^{-7/2} n \frac{cm^2}{g}$, [3]. Dentro do disco, que é opticamente espesso em relação à “verdadeira” absorção, $\tau = \sigma_{ff} u_0$, ou mesmo $\tau^* = \sqrt{\sigma_T \sigma_{ff} u_0}$, caso $\sigma_T > \sigma_{ff}$, existe equilíbrio termodinâmico completo e a densidade de energia da radiação é igual à $\varepsilon = bT^4$, [3].

Conservação de Momento Vertical Visto que não há movimento resultante do gás na direção vertical, a conservação de momento ao longo de \hat{z} se reduz a uma condição de equilíbrio hidrostático, [1, 2, 3]. Matematicamente, este se apresenta na seguinte equação

$$\nabla P = -\rho \mathbf{g}, \quad (23)$$

onde P representa a pressão no gás e $\mathbf{g} = (GM/r^2) \hat{\mathbf{r}}$. Como já dito anteriormente, o equilíbrio hidrostático se instaura na direção vertical perpendicular ao plano do disco, portanto, podemos considerar apenas a contribuição do gradiente de pressão nesta direção. Assim, a Eq.(23) reduz-se para

$$\frac{dP}{dz} = -\rho \frac{GM}{r^2} \sin \theta, \quad (24)$$

onde θ é o ângulo entre o vetor posição de um elemento de fluido no disco e a projeção deste sobre o plano central, $z = 0$. Fazendo as seguintes aproximações, [3],

$$\sin \theta \approx \frac{z_0}{r} \quad \text{e} \quad \frac{dP}{dz} \approx -\frac{P}{z_0},$$

podemos determinar uma importante relação que possibilite resolver analiticamente a estrutura do disco de acreção através de mecânica newtoniana. Portanto, realizando as devidas passagens algébricas, tendo em mente que $P = \rho v_s^2$, obtemos

$$z_0 = \frac{v_s}{v_\varphi} r. \quad (25)$$

2.2.3 Soluções analíticas

Uma vez auferidas as equações necessárias, e definidas as particularidades de cada uma destas regiões, é possível compôr as funções que descrevem o disco de acreção com um nível de detalhamento notável, observando o fato de que não utilizamos artifícios matemáticos insensatos ou hipóteses físicas ilógicas para tal elaboração. Além disso, para valores fixos de M e \dot{M} , o disco pode ser convenientemente dividido em três regiões distintas, dependendo de r , [2, 3]. Estas são:

- Uma região interna, para pequenos valores de r , na qual a pressão de radiação é muito maior que a pressão do gás, e onde $v_s^2 = \varepsilon/3\rho$. Em relação à opacidade, a influência do espalhamento domina sobre a absorção.
- Uma região intermediária, para valores um pouco maiores de r , na qual a pressão do gás é dominante e onde $v_s^2 = kT/m_p$. Em relação à opacidade, a maior contribuição parte do espalhamento pelos elétrons.
- Uma região externa, para valores grandes de r , na qual a pressão do gás é dominante e onde $v_s^2 = kT/m_p$. Em relação à opacidade, esta é determinada pela absorção livre-livre e outros mecanismos.

O desenvolvimento das soluções é longo e tedioso, portanto, são apresentadas apenas as expressões finais. Para a região a), recapitulando, temos a seguinte relação entre as pressões envolvidas: $P_{\text{radiação}} \gg P_{\text{gás}}$. Além disso, em relação à opacidade, sabe-se que $\sigma_T \gg \sigma_{ff}$. Sendo assim, uma vez encontradas as soluções para esta porção do disco, obtemos

$$\begin{aligned}
 z_0 &= \frac{3}{8\pi} \frac{\sigma_T}{c} \dot{M} \left[1 - \left(\frac{6GM}{c^2 r} \right)^{1/2} \right] \\
 \varepsilon &= 2\sqrt{G} \frac{c}{\sigma_T} \alpha^{-1} M^{1/2} r^{-3/2} \\
 u_0 &= \frac{64\pi}{9} \frac{c^2}{\sigma_T^2 \sqrt{G}} \alpha^{-1} \dot{M}^{-1} M^{-1/2} r^{3/2} \left[1 - \left(\frac{6GM}{c^2 r} \right)^{1/2} \right]^{-1} \\
 v_r &= \frac{9}{128\pi^2} \frac{\sigma_T^2}{c^2} \sqrt{G} \alpha \dot{M}^2 M^{1/2} r^{-5/2} \left[1 - \left(\frac{6GM}{c^2 r} \right)^{1/2} \right] \\
 n &= \frac{256\pi^2}{27m_p} \frac{c^3}{\sigma_T^3 \sqrt{G}} \alpha^{-1} \dot{M}^{-2} M^{-1/2} r^{3/2} \left[1 - \left(\frac{6GM}{c^2 r} \right)^{1/2} \right]^{-2} \\
 T &= G^{1/8} \left(\frac{2c}{\sigma_T b} \right)^{1/4} \alpha^{-1/4} M^{1/8} r^{-3/8} \\
 \tau^* &= \left\{ G^{-31/32} \sqrt{0.11 \cdot \frac{256\pi^2}{27m_p} \frac{c^3}{\sigma_T^2}} \left(\frac{64\pi}{9} \frac{c^2}{\sigma_T^2} \right) \left(\frac{2c}{b\sigma_T} \right)^{-7/16} \right\} \alpha^{-17/16} \dot{M}^{-2} M^{-31/32} r^{93/32} \left[1 - \left(\frac{6GM}{c^2 r} \right)^{1/2} \right]^{-2}
 \end{aligned}$$

Para a região b), onde $P_{gas} \gg P_{rad}$ e $\sigma_T \gg \sigma_{ff}$, as soluções são

$$\begin{aligned}
T &= \left[\left(\frac{9m_p G^{3/2} \sigma_T}{64\pi^2 k b c} \right)^{1/5} \right] \alpha^{-1/5} \dot{M}^{2/5} M^{3/10} r^{-9/10} \left[1 - \left(\frac{6GM}{c^2 r} \right)^{1/2} \right]^{2/5} \\
u_0 &= \left[\frac{m_p \sqrt{G}}{2\pi k} \left(\frac{64\pi^2 k b c}{9m_p G^{3/2} \sigma_T} \right)^{1/5} \right] \alpha^{-4/5} \dot{M}^{3/5} M^{1/5} r^{-3/5} \left[1 - \left(\frac{6GM}{c^2 r} \right)^{1/2} \right]^{3/5} \\
z_0 &= \left[\sqrt{\frac{k}{m_p G}} \left(\frac{9m_p G^{3/2} \sigma_T}{64\pi^2 k b c} \right)^{1/10} \right] \alpha^{-1/10} \dot{M}^{1/5} M^{-17/20} r^{21/20} \left[1 - \left(\frac{6GM}{c^2 r} \right)^{1/2} \right]^{1/5} \\
n &= \left[\frac{G}{4\pi k} \sqrt{\frac{m_p}{k}} \left(\frac{64\pi^2 k b c}{9m_p G^{3/2} \sigma_T} \right)^{3/10} \right] \alpha^{-7/10} \dot{M}^{2/5} M^{21/20} r^{-33/20} \left[1 - \left(\frac{6GM}{c^2 r} \right)^{1/2} \right]^{2/5} \\
\tau^* &= \left[\frac{m_p G}{2\pi k} \left(\frac{m_p}{k} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{0.11\sigma_T}{4\pi k}} \left(\frac{64\pi^2 k b c}{9m_p G^{3/2} \sigma_T} \right)^{7/10} \right] \alpha^{-4/5} \dot{M}^{1/10} M^{1/5} r^{3/20} \left[1 - \left(\frac{6GM}{c^2 r} \right)^{1/2} \right]^{1/10} \\
v_r &= \left[\frac{k}{\sqrt{G} m_p} \left(\frac{9m_p G^{3/2} \sigma_T}{64\pi^2 k b c} \right)^{1/5} \right] \alpha^{4/5} \dot{M}^{2/5} M^{-1/5} r^{-2/5} \left[1 - \left(\frac{6GM}{c^2 r} \right)^{1/2} \right]^{-3/5}
\end{aligned}$$

Para a região c), onde $P_{gas} \gg P_{rad}$ e $\sigma_T \ll \sigma_{ff}$, obtiveram-se as seguintes expressões

$$\begin{aligned}
u_0 &= \left[\frac{m_p \sqrt{G}}{2\pi k} \left(\frac{256\pi^3 c}{0.99G^{5/2}} \sqrt{\frac{k^5}{m_p^3}} \right)^{1/10} \right] \alpha^{-4/5} \dot{M}^{7/10} M^{1/4} r^{-3/4} \left[1 - \left(\frac{6GM}{c^2 r} \right)^{1/2} \right]^{7/10} \\
T &= \left[\frac{0.99G^{5/2}}{256\pi^3 c} \sqrt{\frac{m_p^3}{k^5}} \right]^{1/10} \alpha^{-1/5} \dot{M}^{3/10} M^{1/4} r^{-3/4} \left[1 - \left(\frac{6GM}{c^2 r} \right)^{1/2} \right]^{3/10} \\
z_0 &= \left[\sqrt{\frac{k}{G m_p}} \left(\frac{0.99G^{5/2}}{256\pi^3 c} \sqrt{\frac{m_p^3}{k^5}} \right)^{1/20} \right] \alpha^{-1/10} \dot{M}^{3/20} M^{-3/8} r^{9/8} \left[1 - \left(\frac{6GM}{c^2 r} \right)^{1/2} \right]^{3/20} \\
n &= \left[\frac{G}{4\pi m_p} \left(\frac{m_p}{k} \right)^{3/2} \left(\frac{256\pi^3 c}{0.99G^{5/2}} \sqrt{\frac{k^5}{m_p^3}} \right)^{3/20} \right] \alpha^{-7/10} \dot{M}^{11/20} M^{5/8} r^{-15/8} \left[1 - \left(\frac{6GM}{c^2 r} \right)^{1/2} \right]^{11/20} \\
\tau &= \left[\frac{0.11G^{3/2}}{8\pi^2 k} \left(\frac{m_p}{k} \right)^{3/2} \left(\frac{256\pi^3 c}{0.99G^{5/2}} \sqrt{\frac{k^5}{m_p^3}} \right)^{3/5} \right] \alpha^{-4/5} \dot{M}^{1/5} \left[1 - \left(\frac{6GM}{c^2 r} \right)^{1/2} \right]^{1/5} \\
v_r &= \left[\frac{k}{m_p \sqrt{G}} \left(\frac{0.99G^{5/2}}{256\pi^3 c} \sqrt{\frac{m_p^3}{k^5}} \right)^{1/10} \right] \alpha^{4/5} \dot{M}^{3/10} M^{-1/4} r^{-1/4} \left[1 - \left(\frac{6GM}{c^2 r} \right)^{1/2} \right]^{-7/10}
\end{aligned}$$

2.2.4 Análise das soluções

Agora, iremos realizar uma análise quantitativa acerca dessas soluções para averiguar as ordens de grandeza com as quais estamos lidando.

Primeiramente, se quisermos avaliar essas informações de maneira correta, devemos definir um intervalo coerente de magnitudes para a taxa de acreção do gás e um valor fixo para a massa do buraco negro. Para isso, adotamos um buraco negro estelar, cuja massa M é da ordem de $\sim 10M_{\odot}$, [1, 2, 3]. Já para a taxa de acreção, utilizando dados contidos em Shakura & Sunyaev (1973), realizaremos as aproximações com um valor dentro do intervalo que vai de $\dot{M} = 1 \cdot 10^{-12} \left[\frac{M_{\odot}}{\text{ano}} \right]$, representando um fluxo de matéria do regime subcrítico, até $\dot{M}_{cr} = 3 \cdot 10^{-7} \left[\frac{M_{\odot}}{\text{ano}} \right]$, o qual representa o fluxo crítico para um buraco negro de massa $M = 10M_{\odot}$, [3]. Fluxo crítico aqui refere-se ao valor máximo de fluxo na acreção que produz a maior luminosidade emitida pelo disco; ou seja, trata-se da taxa de acreção associada ao limite de Eddington, [1, 2, 3].

Em relação à opacidade σ_T do gás para as regiões **a**) e **b**) do disco, este possui um valor numérico igual à $0.4 \left[\frac{\text{cm}^2}{g} \right]$, pois estamos assumindo que a matéria em acreção é formada apenas por gás hidrogênio, [3].

Além disso, precisamos escolher o valor do parâmetro de viscosidade α que determina o estresse viscoso, o qual promove todo o fenômeno de acreção dentro do disco. Shakura & Sunyaev apontam em seu artigo que, se o valor de α estiver dentro do vasto intervalo

$$10^{-15} \left(\frac{\dot{M}}{\dot{M}_{cr}} \right)^2 < \alpha < 1, \quad (26)$$

então a estrutura do disco, essencialmente, não muda.

Em suma, para a análise da ordem de magnitude das características do disco, utilizaremos os seguintes parâmetros

$$M = 10M_{\odot}, \quad \dot{M} = 10^{-8} \left[\frac{M_{\odot}}{\text{ano}} \right], \quad \alpha = 0.5$$

Antes de iniciarmos os cálculos, precisamos definir os intervalos de r que definem cada uma das três diferentes regiões do disco. Sabemos, por exemplo, que a região mais interna acaba no que chamamos de *órbita circular marginalmente estável*, i.e. a distância mais próxima possível do buraco negro em que uma partícula pode realizar uma órbita circular estável, [1, 2, 3, 4, 5]. Para um buraco negro não rotacional, essa órbita é 3 vezes o raio de Schwarzschild, [2, 4, 5, 6, 7], portanto, de acordo com nossas considerações, temos

$$r_0 = \frac{6GM}{c^2} \simeq 8.864 \cdot 10^6 \text{ [cm]} .$$

Utilizando as soluções apresentadas no segmento anterior, podemos determinar os raios que limitam duas regiões distintas do disco. Realizado este procedimento, aplicando os parâmetros aqui adotados, a borda que divide as regiões **a**) e **b**) se encontra no raio

$$r_{ab} = 8.787 \cdot 10^7 \text{ [cm]} .$$

A borda que separa as regiões **b**) e **c**) se encontra próximo ao raio

$$r_{bc} = 5.716 \cdot 10^9 \text{ [cm]} .$$

Conhecendo agora os intervalos em que estão definidas as 3 regiões do disco, podemos escolher um raio arbitrário entre estes para analisar a ordem de grandeza das propriedades que solucionamos em cada uma destas regiões. Sendo assim, as escolhas são

$$r_a = 4.836 \cdot 10^7 \text{ [cm]} , \quad r_b = 2.902 \cdot 10^9 \text{ [cm]} , \quad r_c = 5 \cdot 10^{10} \text{ [cm]} .$$

Definidas todas essas condições, podemos finalmente partir à análise.

Para a região **a**), mais interna, a uma distância $r_a = 4.836 \cdot 10^7$ [cm] do buraco negro, temos

$$\begin{aligned}
 z_0 &\approx 5.764 \cdot 10^5 \text{ [cm]} \\
 \varepsilon &\approx 3.259 \cdot 10^{13} \left[\frac{\text{erg}}{\text{cm}^3} \right] \\
 u_0 &\approx 6.388 \cdot 10^3 \left[\frac{\text{g}}{\text{cm}^2} \right] \\
 v_r &\approx 3.267 \cdot 10^5 \left[\frac{\text{cm}}{\text{s}} \right] \\
 n &\approx 3.312 \cdot 10^{21} \left[\frac{\text{partículas}}{\text{cm}^3} \right] \\
 T &\approx 4.307 \cdot 10^6 \text{ [K]} \\
 \tau^* &\approx 3.018 \cdot 10^{-3}
 \end{aligned}$$

Para a região **b**), intermediária, a uma distância $r_b = 2.902 \cdot 10^9$ [cm] do buraco negro, temos

$$\begin{aligned}
 z_0 &\approx 2.237 \cdot 10^7 \text{ [cm]} \\
 u_0 &\approx 1.824 \cdot 10^3 \left[\frac{\text{g}}{\text{cm}^2} \right] \\
 v_r &\approx 1.897 \cdot 10^4 \left[\frac{\text{cm}}{\text{s}} \right] \\
 n &\approx 2.418 \cdot 10^{19} \left[\frac{\text{partículas}}{\text{cm}^3} \right] \\
 T &\approx 3.071 \cdot 10^5 \text{ [K]} \\
 \tau^* &\approx 29.27
 \end{aligned}$$

Para a região **c**), mais externa, a uma distância $r_c = 5 \cdot 10^{10}$ [cm] do buraco negro, temos

$$\begin{aligned}
 z_0 &\approx 5.167 \cdot 10^8 \text{ [cm]} \\
 u_0 &\approx 2.369 \cdot 10^2 \left[\frac{\text{g}}{\text{cm}^2} \right] \\
 v_r &\approx 8.824 \cdot 10^3 \left[\frac{\text{cm}}{\text{s}} \right] \\
 n &\approx 1.375 \cdot 10^{17} \left[\frac{\text{partículas}}{\text{cm}^3} \right] \\
 T &\approx 3.438 \cdot 10^4 \text{ [K]} \\
 \tau &\approx 473.93
 \end{aligned}$$

A partir destes dados, é possível verificar informações compatíveis com aquilo que esperávamos conferir após o desenvolvimento do modelo. Como exemplo, vemos que, conforme nos afastamos do objeto central, a temperatura no disco tende a diminuir. E, de acordo com as referências [1, 2, 3], este é exatamente o comportamento exibido pelo perfil de temperatura no disco newtoniano. Todavia, não podemos tirar conclusões apenas de estimativas pontuais, mas sim de uma análise completa das funções obtidas na Seção 2.2.3. Mesmo porque, dentro do âmbito de estudo das chamadas *hard sciences*, há diversas maneiras de apresentarmos nossos resultados e, a partir destes, extrair informações importantes sobre os fenômenos considerados e inferir novas hipóteses mais sólidas.

Diante o desenvolvimento do modelo newtoniano, pioneiramente apresentado pela referência [3], obtivemos soluções analíticas ininteligíveis e, por esse motivo, foram realizadas as estimativas anteriores para que pudéssemos obter alguma intuição acerca do modelo elaborado. Ainda sim, a melhor forma de compreender como tais soluções reproduzem a estrutura do objeto em questão é plotando as funções em relação ao raio orbital r . Prezando por uma apresentação mais sofisticada e ordenada, decidimos retratar os gráficos para as características do disco de acreção newtoniano junto às do disco relativístico;

em específico, os gráficos para ambos os modelos foram manifestados na Seção 2.7.4. No relatório parcial, o software utilizado para essa tarefa foi o *Wolfram Mathematica 9*, com auxílio da ferramenta que permite inserir uma função definida por partes no kernel do programa. Para este relatório, por motivações estéticas, migramos a produção dos gráficos para o software *MATLAB*.

2.3 Formalismo Lagrangiano

O estudo do formalismo lagrangiano da Mecânica foi proposto pela orientadora durante o último trimestre de 2016, com o intuito de compreender a teoria e aplicá-la em problemas simples, até que pudéssemos avançar no estudo de gravitação clássica com o problema da força central e desenvolver, analiticamente, as três leis de Kepler.

O formalismo lagrangiano é uma das mais conhecidas (e úteis) generalizações na Física, dentro do estudo de Mecânica Clássica, [8]. Uma vez que detemos do conhecimento desta formulação, aplicaremos esta ao problema de dois corpos que movem-se sob a influência de uma força central mútua, i.e. o problema da força central.

2.3.1 Equações de Lagrange à partir do Princípio de Hamilton

No relatório parcial, apresentamos uma dedução das equações de Lagrange através do princípio de d'Alembert, assim como é desenvolvido na referência [8]. Por razões de brevidade, eliminaremos este desenvolvimento do relatório final, mas reconhecemos sua importância didática ao entendimento do formalismo lagrangiano; além do fato que, historicamente, realizou-se a primeira derivação de tais equações através deste método. Com isso, também queremos dizer que não serão introduzidos alguns conceitos importantes, apesar de serem citados ao longo do texto; e.g. coordenadas generalizadas, vínculos, etc., os quais foram abordados com cautela no relatório parcial.

Também é possível obter as equações de Lagrange à partir de um princípio que considera o movimento completo de um sistema entre dois instantes distintos, t_1 e t_2 , [8]. Um princípio desta natureza é conhecido como um *princípio integral*, [8]. Antes de apresentar o princípio integral, precisamos definir com mais precisão o significado atrelado à frase “movimento de um sistema entre instantes t_1 e t_2 ”. A configuração instantânea de um sistema é definida pelos valores de n coordenadas generalizadas q_1, \dots, q_n , e corresponde a um ponto particular no hiperespaço cartesiano, [8]. Conforme o tempo passa, o estado do sistema muda e o ponto que o descreve move-se no espaço de configuração traçando uma curva, descrita como “a trajetória de movimento do sistema”, [8].

O *princípio de Hamilton* descreve o movimento daqueles sistemas mecânicos para os quais todas as forças (exceto forças de vínculo) são deriváveis de um potencial escalar generalizado que pode ser uma função das coordenadas, velocidades e tempo. Tais sistemas serão denotados como *monogênicos*. [8]

Para sistemas monogênicos, o princípio de Hamilton pode ser apresentado como, [8]:

O movimento de um sistema entre um instante t_1 e um instante t_2 é tal que a integral de linha, chamada ação,

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(q_k, \dot{q}_k, t) dt,$$

onde $L \equiv T - V$, tal que T e V representam, respectivamente, as energias cinética e potencial total do sistema, possui valor estacionário para a trajetória real de movimento.

Podemos então resumir o princípio simplesmente dizendo que o movimento é tal que a *variação* da integral de linha S , para valores fixos de t_1 e t_2 , é zero,

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) dt = 0.$$

O princípio de Hamilton é uma condição suficiente para derivar as equações de movimento que permitem construir a mecânica de sistemas monogênicos a partir deste como sendo o postulado básico, ao invés de utilizar as leis de Newton, [8]. Tal formulação possui vantagens; e.g., visto que a integral S é invariante ao sistema de coordenadas generalizadas utilizadas para expressar a lagrangiana L , as equações de movimento devem sempre ter a mesma forma, independente de como as coordenadas generalizadas se transformam, [8].

Queremos achar as condições para que a variação da integral S seja nula, i.e. $\delta S = 0$. Sendo assim, temos

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q_k, \dot{q}_k, t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k \right\} dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left[\left\{ \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right\} \delta q_k \right] dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right) \right\} dt = 0.
\end{aligned} \tag{27}$$

O segundo termo do lado esquerdo da Eq.(27) representa a integral de um diferencial total, logo, apenas depende dos instantes t_1 e t_2 . Com isso, nota-se ser invariante à trajetória, portanto, podemos desconsiderá-la do contexto adotado. Sendo assim, o princípio de Hamilton reduz-se à seguinte condição

$$\delta S = 0 \iff \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left[\left\{ \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right\} \delta q_k \right] dt = 0.$$

Como as variações δq_k são arbitrárias e mutuamente independentes, fica perceptível que a integral apresentada será nula se, e somente se,

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0, \forall k. \tag{28}$$

As equações diferenciais (28), que desenvolvemos à partir da condição extremal da ação S , são as chamadas *equações de Lagrange*. Uma vez estabelecida a função lagrangiana para um determinado sistema, a implementação desta nas equações de Lagrange nos fornece automaticamente as equações de movimento que regem sua dinâmica. Aqui mesmo, percebemos que essa formulação é uma poderosa ferramenta na Física, visto que permite o estudo de sistemas mecânicos por uma perspectiva unicamente escalar.

2.3.2 Leis de Kepler

Novamente, alertamos para a relevância do estudo do formalismo lagrangiano, uma vez que esta generalização permite uma análise profunda do movimento de sistemas mecânicos através de ferramentas matemáticas bem estabelecidas; além de facilitar o desenvolvimento analítico de muitos sistemas relativamente complicados, como o de um pêndulo duplo, por exemplo. No contexto do projeto, este formalismo mecânico foi proposto com a finalidade de entender significativamente a gravitação universal.

Consideremos um caso semelhante ao do problema da força central, porém simplificado, para desenvolver as leis de Kepler. Iremos adotar uma configuração mais voltada ao projeto, uma partícula de massa m que orbita um buraco negro de massa M . Como neste caso, é nítido que $M \gg m$, então podemos considerar que o corpo central está basicamente “parado”. Além disso, é também conveniente colocar a origem do sistema de coordenadas no corpo de massa maior. Agora, é necessário construir a lagrangiana do sistema. Sabemos que a energia cinética deste conjunto é dado unicamente pela partícula m . Em coordenadas polares, temos

$$T = \frac{1}{2} m \left[\dot{r}^2 + r^2 (\dot{\theta})^2 \right].$$

Numa abordagem de gravitação clássica, a energia potencial para este conjunto será dada unicamente por, [8],

$$V = -\frac{GMm}{r}.$$

Com isso, a função lagrangiana para tal sistema é simplesmente dado conforme

$$L = \frac{1}{2} m \left[\dot{r}^2 + r^2 (\dot{\theta})^2 \right] + \frac{GMm}{r}. \tag{29}$$

Agora, podemos aplicar a função (29) às equações de Lagrange e determinar as equações de movimento para a órbita da partícula em torno do buraco negro,

$$\ddot{r} - r (\dot{\theta})^2 + \frac{GM}{r^2} = 0 \tag{30}$$

$$\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = 0$$

Segunda Lei de Kepler À partir da segunda equação do sistema (30), podemos demonstrar a segunda lei de Kepler. É interessante notar que esta equação de movimento representa a conservação de momento angular do sistema em questão, [8].

Em coordenadas polares, podemos escrever o elemento de área dA conforme

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta.$$

Sendo assim, temos que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} \equiv \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}.$$

Aplicando a relação imediatamente anterior à segunda equação do sistema (30), obtemos

$$\frac{d}{dt} \left(2 \frac{dA}{dt} \right) = 0,$$

o que será satisfeito se, e somente se,

$$\frac{dA}{dt} = \text{constante}. \quad (31)$$

Ou seja, para que o momento angular do sistema seja conservado, é necessário que o corpo em órbita delimite áreas iguais em intervalos iguais de tempo, [8]. De modo simplificado, a relação (31) afirma que o vetor posição da partícula em relação ao corpo central varre áreas iguais em tempos iguais. Temos então demonstrado a segunda lei de Kepler, também conhecida como “lei das áreas”.

Primeira Lei de Kepler A derivação da primeira lei de Kepler não é tão óbvia quanto a da segunda. Esta prova requer algumas substituições nada triviais. Entretanto, é possível resumir os principais artifícios por detrás dessa demonstração: utilizaremos, de maneira implícita, a conservação de energia e de momento angular do sistema, [8].

Antes de utilizarmos da outra equação de movimento encontrada, é necessário que saibamos algumas relações. Por exemplo, ao derivarmos r^{-1} em relação ao tempo, obtemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \dot{r}.$$

Sendo assim, podemos escrever a derivada de r em relação ao tempo através da expressão

$$\dot{r} = -r^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right).$$

Além disso, observando a segunda equação do sistema (30), vemos que $r^2 \dot{\theta} = \text{constante}$, portanto, convém atribuir algum símbolo que denote tal quantidade. Definimos arbitrariamente $r^2 \dot{\theta} \equiv l$. Com este dado, podemos escrever \dot{r} do seguinte modo

$$\dot{r} = -\frac{l}{\dot{\theta}} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right) = -l \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right).$$

Derivando a equação imediatamente anterior em relação ao tempo, temos

$$\ddot{r} = -l \frac{d}{dt} \left[\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \right] = -l \dot{\theta} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) \therefore \ddot{r} = -\frac{l^2}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right).$$

Essa relação será de grande utilidade para simplificarmos a componente radial da equação de movimento. Aplicando a igualdade demonstrada anteriormente à primeira equação do sistema (30),

$$\frac{l^2}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + r (\dot{\theta})^2 = \frac{GM}{r^2}. \quad (32)$$

Com um pouco mais de manipulação algébrica, recordando que $r^2 \dot{\theta} \equiv l$, reescrevemos a Eq.(32) conforme

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{GM}{l^2}. \quad (33)$$

A solução geral desta equação diferencial ordinária assume a forma

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{l^2} [1 + e \cos(\theta + \phi)],$$

onde e e ϕ são duas constantes de integração. Se escolhermos θ como sendo zero quando o raio orbital r é mínimo, então a constante e será positiva e $\phi = 0$. Realizadas estas considerações, a equação que descreverá a trajetória da massa m é

$$r(\theta) = \frac{l^2/GM}{1 + e \cos \theta}. \quad (34)$$

Como o numerador dessa equação é uma constante, podemos simplesmente escrever $p \equiv l^2/(GM)$, e assim, apresentar a solução da equação de movimento (33) da seguinte maneira

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}. \quad (35)$$

Em particular, quando

$e = 0$	a curva é uma circunferência;
$e < 1$	a curva é uma elipse;
$e = 1$	a curva é uma parábola;
$e > 1$	a curva é uma hipérbole.

Vemos que a constante e é compatível com a *excentricidade* das seções cônicas, portanto, as órbitas na gravitação universal podem assumir um perfil qualquer dentre estas quatro curvas. O fator que determinará o aspecto da órbita é a energia total do sistema. Temos demonstrado aqui a primeira lei de Kepler, também conhecida como “lei das órbitas elípticas”.

Terceira Lei de Kepler Uma vez que conhecemos os resultados fornecidos pela duas leis anteriores, é possível definir uma fórmula que correlaciona propriedades geométricas da órbita com o período de movimento. É algo compreensível, pois significa que a partícula em órbita irá varrer a área total da elipse uma vez que completar uma volta, após um intervalo de tempo $\Delta t = \tau$, onde τ representa o período orbital. Sabemos que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} \equiv \frac{l}{2}.$$

Para calcular o período orbital, integramos esta equação em relação ao tempo, com um intervalo equivalente ao período de uma órbita completa,

$$\int dA = \int_0^\tau \frac{l}{2} dt \implies A_{\text{órbita}} = \frac{l}{2}\tau.$$

Considerando uma órbita elíptica, conforme apresentado pela primeira lei, temos que $A_{\text{órbita}} = \pi ab$, onde a é o semi-eixo maior e b é o semi-eixo menor. Além disso, sabendo que a excentricidade e de uma elipse pode ser escrita como

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}},$$

então é possível descrever a área desta órbita apenas em função do semi-eixo maior, a . Uma vez que $b = a\sqrt{1 - e^2}$, temos $A_{\text{órbita}} = \pi a^2\sqrt{1 - e^2}$, portanto,

$$\pi^2 a^4 (1 - e^2) = \frac{l^2}{4}\tau^2. \quad (36)$$

Durante a demonstração da primeira lei, assumimos que quando $\theta = 0$, r assume o valor mínimo, r_0 . Sendo assim, através da equação das seções cônicas, adotando $r(0) = r_0$, obtemos a relação

$$r_0 = \frac{p}{1 + e}.$$

Além disso, é possível inferir a relação $r_0 = a - e$, uma vez que o buraco negro se encontra na origem do sistema de coordenadas. Incorporando ambas as igualdades, temos que

$$1 + e = \frac{p}{a - e}.$$

Retornando à Eq.(36), podemos escrevê-la conforme

$$\pi^2 a^4 \left(\frac{1 - e}{a - e} \right) p = \frac{l^2}{4}\tau^2. \quad (37)$$

Sabendo que $p \equiv l^2/GM$, e considerando a aproximação

$$\frac{1 - e}{a - e} \approx \frac{1}{a},$$

visto que a excentricidade de órbitas quase circulares são próximas de zero, temos

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3. \quad (38)$$

Temos demonstrado a terceira lei de Kepler, também conhecida como a “lei dos períodos”.

A aproximação adotada no último passo antes de apresentarmos a Eq.(38) é aceitável, pois a lei em questão fora desenvolvida com a análise de dados do próprio sistema solar. Quando verificamos a excentricidade das órbitas da maior parte dos planetas no sistema solar observamos que estas, de fato, assumem valores próximos de zero. Portanto, do ponto de vista histórico, uma vez que a lei se consagrou diante dados de órbitas quase circulares, então é natural que possamos realizar essa aproximação em seu desenvolvimento analítico.

2.4 Relatividade Restrita

A compreensão dos elementos principais da teoria da Relatividade integra parte dos objetivos deste projeto, sendo necessário para avançar em certas metas estipuladas como, por exemplo, aplicar correções relativísticas ao modelo do disco de acreção newtoniano. Portanto, fica evidente que os estudos em Relatividade Restrita foram de suma importância à conclusão da pesquisa.

A teoria da Relatividade Restrita foi apresentada por Albert Einstein em 1905, fundada em dois postulados [6, 9, 10]:

1. As leis da Física são as mesmas em todos os sistemas inerciais. Não existe nenhum sistema inercial preferencial. (Princípio da Relatividade)

2. A velocidade da luz no vácuo tem o mesmo valor, c , em todos os sistemas inerciais. (Princípio da Constância da Velocidade da Luz)

Buscando compreender melhor, vemos que o princípio da Relatividade de Einstein afirma ser impossível, por meio de quaisquer medidas físicas, escolher um sistema inercial como sendo intrinsecamente estacionário ou em movimento; só podemos falar em termos do movimento relativo entre dois sistemas, [6, 9, 10].

Toda a teoria da Relatividade Restrita é derivada diretamente destas duas hipóteses. Entretanto, o mais impressionante é que esta teoria não apenas explicou todos os resultados experimentais existentes neste contexto, mas previu novos efeitos, os quais foram confirmados em experimentos posteriores. Sendo assim, até hoje, não encontramos qualquer objeção experimental à teoria de Einstein. [9, 10]

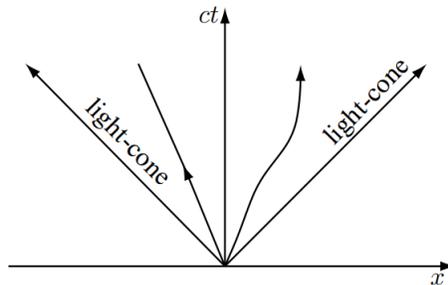
2.4.1 Sistemas de coordenadas e diagramas de Minkowski

O fenômeno físico mais simples que podemos descrever é chamado um *evento*. Este é uma incidência que ocorre num certo ponto no espaço e num certo ponto no tempo, [6, 9, 10]. Portanto, quando determinamos a posição deste no espaço e no tempo, temos uma descrição completa do evento. Assumimos que nossas observações são feitas em relação a um referencial. Uma vez estabelecido o referencial, introduzimos neste um sistema de coordenadas, [6, 9, 10]. Geralmente, é vantajoso empregarmos um sistema de coordenadas cartesianas, [10].

É um pouco mais difícil determinar o ponto deste evento no tempo, [10]. Se um observador se encontra na origem com um relógio, então o ponto no tempo em que ele percebe o evento não é o ponto no tempo em que o evento ocorreu. Isso se deve ao fato de que a luz demanda certo tempo para ir da posição do evento ao observador na origem, [6, 9, 10]. Visto que observadores em diferentes posições devem realizar diferentes correções desse tipo, seria mais simples imaginar observadores em cada ponto do referencial de tal modo que o ponto no tempo de um evento arbitrário possa ser mensurado localmente, [10]. Mas, desse jeito, um novo problema surge: devemos sincronizar os relógios, para que estes exibam o mesmo tempo e corram numa mesma taxa, [7, 10].

Matematicamente, determinamos quatro coordenadas (ct, x, y, z) para cada evento, [10]. (A coordenada temporal t foi multiplicada pela velocidade da luz, c , para que todas as coordenadas possuam mesma dimensão.) Esta coordenação torna possível a descrição de um evento como sendo um ponto P no chamado *diagrama de Minkowski*, [10]. Neste tipo de diagrama, plotamos a coordenada ct ao longo do eixo vertical e uma das coordenadas espaciais ao longo do eixo horizontal.

De modo a observar o movimento de partículas, podemos imaginar que cada partícula está equipada com uma lanterna que pisca numa frequência constante. Os pulsos luminosos de uma partícula representam uma sucessão de eventos, [10]. Se plotarmos estes resultados em um diagrama de Minkowski, teremos uma série de pontos que descrevem uma curva no limite contínuo. Esta curva é chamada de *linha de universo* da partícula, [10]. A linha de universo de uma partícula livre, por exemplo, é uma reta. O diagrama na Figura 3 exemplifica graficamente alguns casos.



(Figura 3. Representação de linhas de universo num diagrama de Minkowski, delimitadas pelo cone de luz. Fonte: Referência bibliográfica [10])

Já uma partícula sob a ação de uma força terá uma linha de universo curvada, conforme sua velocidade vai se alterando com o tempo, [7, 10]. Como a velocidade de qualquer partícula material é menor que a velocidade da luz, então a tangente da linha de universo dessas partículas, num diagrama de Minkowski, sempre será menor que 45° em relação ao eixo temporal, [7, 10].

Um pulso de luz provoca uma frente luminosa que move-se avante, à velocidade da luz. Se esta frente é apresentada num diagrama de Minkowski, o resultado é um cone de luz. Um importante resultado é que *a linha de universo de qualquer partícula num ponto está dentro do cone de luz de um pulso luminoso emanado daquele ponto*, [10, 11]. Esta é uma consequência imediata do princípio restrito da relatividade, e também é válido localmente na presença de um campo gravitacional, [7, 10, 11].

2.4.2 Transformações de Lorentz

Suponhamos K e K' , dois observadores em movimento relativo. Podemos declarar que este movimento ocorre ao longo da direção \hat{x} do sistema de coordenadas cartesianas. Imaginemos que K' distancia-se do observador K no sentido positivo do eixo x . Nestas condições, K registra o movimento de K' como sendo $x = vt$, enquanto que K' irá registrar o movimento de K como $x' = -vt'$, [9].

Agora, consideremos um pulso luminoso se movendo no mesmo sentido de K' . Nossos dois observadores irão determinar o movimento deste elemento como

$$K : x = ct \quad \text{e} \quad K' : x' = ct'.$$

Uma transformação linear entre seus sistemas de coordenadas é consistente com tais observações se esta apresentar a forma

$$x' - ct' = \Lambda(x - ct), \quad (39)$$

para algum Λ , dependente apenas da velocidade relativa, v , [9]. Caso o pulso luminoso estivesse viajando no sentido contrário ao anterior, os observadores teriam registrado o movimento deste conforme

$$K : -x = ct \quad \text{e} \quad K' : -x' = ct'$$

e a transformação linear entre seus sistemas de coordenadas deve, pelo princípio restrito da relatividade, assumir a forma

$$-x - ct = \Lambda(-x' - ct'), \quad (40)$$

para o mesmo Λ , [9]. Com algumas passagens podemos mostrar que as duas relações entre os sistemas de coordenadas dos observadores são equivalentes à

$$x' = \frac{1}{2}(\Lambda + \Lambda^{-1})x - \frac{1}{2}(\Lambda - \Lambda^{-1})ct, \quad (41)$$

$$ct' = \frac{1}{2}(\Lambda + \Lambda^{-1})ct - \frac{1}{2}(\Lambda - \Lambda^{-1})x. \quad (42)$$

Utilizando as observações de K acerca da posição de K' , determinamos Λ como sendo $\left(\frac{c+v}{c-v}\right)^{1/2}$ e então reescrevemos as transformações de Lorentz em sua forma padrão

$$x' = \gamma(x - \beta ct), \quad (43)$$

$$ct' = \gamma(ct - \beta x), \quad (44)$$

onde adotamos os termos $\beta = v/c$ e $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, sendo γ conhecido como *fator de Lorentz*, [9]. A transformação das coordenadas transversais é a identidade, i.e. $y' = y$ e $z' = z$, [9].

Das transformações de Lorentz seguem os conceitos básicos de contração do espaço e de dilatação do tempo. Tudo o que precisamos fazer é considerar como um observador em movimento percebe nossas régua ou relógios, [9]. Por exemplo, se estivermos segurando um relógio e um tempo T passa, o observador em movimento K' irá, de acordo com a transformação de Lorentz, registrar um tempo

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x) = \gamma cT \\ \therefore t' &= \gamma T. \end{aligned} \quad (45)$$

Ou seja, da perspectiva deste observador, o tempo que passou foi maior; relógios em movimento correm mais devagar. Conhecemos este fenômeno como *dilatação do tempo*, [9]. Da mesma maneira, se segurarmos uma régua de comprimento L com uma das extremidades na origem, esticada sobre a direção positiva de \hat{x} , então um observador em movimento, K' , irá medir seu comprimento conforme: uma das extremidades da régua se encontra na origem, $x' = 0$. Entretanto, para o

observador K , as extremidades desta se encontram em $x = 0$ e $x = L$, [9]. No mesmo instante, $t' = 0$, da perspectiva de K' , a outra extremidade se encontra em

$$x' = \gamma(L - \beta ct) .$$

Para o instante $t' = 0$, temos que $ct = \beta L$, portanto,

$$x' = \gamma(L - \beta^2 L) = \gamma(1 - \beta^2)L .$$

É fácil perceber que $\gamma(1 - \beta^2) = \gamma^{-1}$, portanto, isso implica diretamente em

$$x' = \gamma^{-1}L . \tag{46}$$

O observador K' registra o comprimento da nossa régua modificado por um fator γ^{-1} . Este é o fenômeno que denominamos *contração do espaço*, [9].

2.4.3 Espaço-tempo de Minkowski

Conforme discutido na última seção, as medidas de tempo ou distância dependem do observador e como este se move relativamente aos outros sistemas de referência. Entretanto, existe uma certa combinação destas medidas que não se altera diante os movimentos relativos e, portanto, não dependem do observador em questão. Estas quantidades são conhecidas como *tempo próprio*, ou *comprimento próprio*; o tempo decorrido, ou a distância percorrida, no referencial de repouso do objeto sendo observado, [7, 11]. Averiguando a derivação das transformações de Lorentz, podemos notar que

$$(x' - ct')(x' + ct') = (x - ct)(x + ct) , \tag{47}$$

e assim, inferir que a quantidade $-(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2$ é a mesma para todos os observadores. Este é conhecido como o *intervalo invariante*, o qual desempenha um papel fundamental na elucidação e compreensão da natureza do espaço e do tempo [7, 9, 10, 11]. Esta é a *métrica* da relatividade restrita. Discutiremos mais sobre isso após a apresentação de algumas notações.

A partir de agora, iremos escrever x^1 , x^2 e x^3 ao invés de x , y e z . Além disso, em vez de adotarmos a coordenada temporal pela representação ct , escreveremos x^0 , mas continuaremos nos referindo à esta como “tempo”, [11]. Notemos que os índices estão sobrescritos; na terminologia, são chamados *contravariantes*. Caso estejam subscritos, os chamamos *covariantes*, [4, 9, 11]. Podemos utilizar x^i , com índice em letra minúscula do alfabeto latino (i, j, k, \dots), como um símbolo genérico para qualquer componente espacial. Sendo assim, escreveremos x^μ , com índice em letra minúscula do alfabeto grego (μ, ν, σ, \dots), como um símbolo genérico tanto para um ponto no espaço-tempo de Minkowski como para um quadrivetor, [11].

De maneira geral, escrevemos o intervalo conforme

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu , \tag{48}$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ representa as componentes da *métrica de Minkowski*, [6, 9, 11].

Por uma questão de conveniência, esta última pode ser apresentada como a matriz 4×4

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Deve ficar claro que, apesar das aparências iniciais, a geometria do espaço-tempo não é a geometria euclidiana quadridimensional, [11]. Em particular, dois pontos podem estar separados por distâncias cujo quadrado é positivo, negativo ou zero. Quando $(ds)^2 > 0$, dizemos que os eventos possuem separação do *tipo-espaço*. Quando temos $(ds)^2 < 0$, a separação entre os pontos é do *tipo-tempo*. Para o último caso, $(ds)^2 = 0$, dizemos que a separação é do *tipo-luz*. [7, 9, 10, 11]

Partículas com massa de repouso não nula movem-se ao longo de linhas de universo do tipo-tempo, que se encontram sempre dentro dos cones de luz, [6, 9, 10]. Desse modo, a velocidade destas sempre será menor que a velocidade da luz em qualquer ponto. Este é o conceito que iremos adotar futuramente, com um pouco mais de sofisticação, para descrever as órbitas de partículas ao redor de um buraco negro de Schwarzschild.

2.5 Relatividade Geral

Como extensão ao estudo da teoria da relatividade de Einstein, torna-se fundamental a abordagem da relatividade geral. Conhecer a teoria através de uma visão mais analítica ajuda no desenvolvimento de futuros resultados; por exemplo, na determinação das órbitas de partículas ao redor de buracos negros.

Antes de iniciarmos qualquer consideração acerca da matemática envolvida, precisamos compreender a relatividade geral de maneira qualitativa, através de seus postulados e daquilo que pode ser inferido a partir destes. Sendo assim, procederemos com reflexões sobre o Princípio da Equivalência.

O Princípio da Equivalência nos diz como um sistema físico arbitrário responde à presença de um campo gravitacional externo [6]. Este princípio se baseia na correspondência entre a massa gravitacional e a massa inercial, verificada por Galileu, Newton e muitos outros pesquisadores, [9]. Ponderando sobre isso, Einstein considerou, como consequência de tal resultado, que nenhum campo gravitacional externo, homogêneo e estático, pode ser detectado localmente em um elevador em queda livre, uma vez que seus observadores, os instrumentos e o próprio elevador responderiam ao campo com a mesma aceleração, [9].

2.5.1 Métrica

O primeiro conceito que devemos abordar para iniciarmos os estudos mais profundos em relatividade geral se trata daquilo que iremos definir como a métrica do espaço-tempo, [6, 9, 11]. Para entendermos melhor de onde vem essa ideia, consideremos uma base do espaço, dada pelos vetores $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Sabemos que o diferencial do vetor posição, $d\mathbf{r}$, pode ser escrito como

$$d\mathbf{r} = \sum_{\mu=0}^3 dx^\mu \mathbf{e}_\mu. \quad (49)$$

Através da Eq.(49), podemos determinar o elemento infinitesimal de comprimento, ds , conforme

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \left(\sum_{\mu=0}^3 dx^\mu \mathbf{e}_\mu \right) \cdot \left(\sum_{\nu=0}^3 dx^\nu \mathbf{e}_\nu \right) \\ &= \sum_{\mu,\nu=0}^3 (\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu) dx^\mu dx^\nu. \end{aligned} \quad (50)$$

Portanto, o elemento diferencial ds depende do produto escalar entre os vetores da base, logo, diante tal correlação, é natural definir uma nova quantidade. Neste caso, iremos definir

$$g_{\mu\nu} \equiv \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu, \quad (51)$$

onde $g_{\mu\nu}$ são as componentes de uma matriz simétrica, \mathbf{g} , nomeada *métrica*, [6, 9, 11]. Assim, o elemento infinitesimal de comprimento, em termos dos componentes da métrica, pode ser escrito

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (52)$$

Em relatividade geral, existe uma convenção, conhecida como notação de Einstein, adotada como uma forma de simplificar a representação das equações através da omissão dos símbolos de somatória. A regra é: para cada índice repetido, que aparece uma vez em cima e outra embaixo, subentende-se uma soma em relação à este, [6, 7, 9, 10, 11]. Portanto, a equação (52) pode ser apresentada, conforme convencionado por Einstein, da seguinte maneira

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (53)$$

Assim como discutido na seção de relatividade restrita, valem as terminologias de distância infinitesimal entre pontos vizinhos: quando $(ds)^2 > 0$, há uma separação *tipo-espaço*, e quando $(ds)^2 < 0$, a separação entre os pontos é *tipo-tempo*. Caso $(ds)^2 = 0$, a separação é *tipo-luz*. [6, 7, 10, 11]

Uma maneira de definir vetores no espaço-tempo curvo é separar os conceitos de magnitude e direção, definindo direção *localmente*, por meio de pequenos vetores, [6]. Vetores maiores podem ser construídos algebricamente, através da multiplicação por escalares e por regras de soma de vetores no espaço-tempo sem curvatura. Rigorosamente falando, o que fazemos é definir vetores num espaço tangente, [6].

Sendo assim, vetores são definidos em um ponto e ali eles obedecem todas as regras usuais da álgebra vetorial no espaço euclidiano. A associação de um vetor para cada ponto no espaço-tempo, de maneira suave, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x)$, é chamado *campo vetorial*, [6]. Entretanto, para o contexto da relatividade geral, vetores definidos em diferentes pontos estão em diferentes

espaços tangentes, portanto, não podemos somar vetores de pontos distintos, [6]. Com isso, devemos abandonar a ideia dos vetores deslocamento, exceto para deslocamentos entre pontos infinitesimalmente separados, uma vez que este representa uma quantidade local, [6].

Agora, vamos estender o produto interno aos espaços-tempo curvos, uma vez que esta ferramenta básica de análise vetorial possui grande utilidade. Para cada ponto, x^μ , determinamos uma base de quatro vetores, $e_\mu(x)$, em termos dos quais qualquer outro vetor pode expresso como uma combinação linear,

$$\mathbf{u}(x) = u^\mu(x) \mathbf{e}_\mu(x). \quad (54)$$

Os termos $u^\mu(x)$ são chamados de componentes do vetor \mathbf{u} na base \mathbf{e}_μ , [6].

Podemos introduzir a ideia de produto escalar, já utilizado na seção anterior, assim como no espaço euclidiano. Dados dois vetores num mesmo ponto, \mathbf{u} e \mathbf{v} , o produto escalar entre eles pode ser calculado conforme

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (u^\mu \mathbf{e}_\mu) \cdot (v^\nu \mathbf{e}_\nu) \\ &= (\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu) u^\mu v^\nu. \end{aligned} \quad (55)$$

Utilizando a definição das componentes da métrica, apresentada na Eq.(51), escrevemos o produto escalar entre dois vetores como

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu. \quad (56)$$

2.5.2 Geodésicas

Partículas movem-se em linhas de universo tipo-tempo, as quais podem ser parametrizadas por quatro funções $x^\mu(\tau)$ da distância τ ao longo delas, assim como na relatividade restrita. É importante perceber que iremos considerar apenas partículas-teste que estão sob influência da curvatura do espaço-tempo, [6, 7, 9]. Ou seja, as partículas estão livres de qualquer outra influência externa, e.g. forças elétricas.

O princípio geral para o movimento de partículas livres num espaço-tempo curvo afirma que a linha de universo entre dois pontos com separação tipo-tempo minimiza o tempo próprio entre eles, [6, 7, 9].

Contemplando esta descrição, vemos que tal princípio é muito parecido com aquele utilizado no formalismo lagrangiano para desenvolver as equações de Lagrange. Sendo assim, aplicaremos os conceitos desenvolvidos nesse formalismo mecânico no contexto da relatividade geral.

Como a partícula está livre, a função lagrangiana para tal sistema é, simplesmente,

$$L = \frac{1}{2} m v^2. \quad (57)$$

Considerando que o elemento diferencial de comprimento, ds , pode ser determinado através da Eq.(53), podemos escrever

$$v^2 = \left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2 = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}, \quad (58)$$

onde τ é o tempo próprio da partícula. Aplicando a relação anterior à função lagrangiana, obtemos-na numa forma mais adequada ao contexto,

$$L = \frac{m}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (59)$$

Agora, para encontrar as equações diferenciais que determinam a parametrização das linhas de universo da partícula em termos do tempo próprio desta, precisamos aplicar a função (59) às equações de Lagrange,

$$\frac{\partial L}{\partial x^\lambda} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial (dx^\lambda/d\tau)} \right) = 0. \quad (60)$$

Realizando este procedimento, encontramos a seguinte expressão

$$\frac{d^2 x^\sigma}{d\tau^2} - \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} \right) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (61)$$

Apresentando aqui os *coeficientes de conexão afim*, que, em nosso caso, são chamados *símbolos de Christoffel*,

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \right), \quad (62)$$

podemos denotar a Eq.(61) conforme

$$\frac{d^2 x^\sigma}{d\tau^2} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (63)$$

A Eq.(63) é a famosa *equação da geodésica*. Da forma com a qual foi apresentada nesta seção, a equação diferencial representa apenas linhas de universo tipo-tempo, entretanto, qualquer seja a forma que possa assumir, as equações da geodésica, em relatividade geral, são as equações de movimento para partículas livres, [6, 7, 9, 11].

2.5.3 Derivada Covariante

Um operador fundamental para o desenvolvimento analítico das principais equações em relatividade geral, independentemente do contexto em estudo, é a *derivada covariante*. Essa é a extensão natural do operador diferencial para espaços-tempo curvos, [4]. Antes de definirmos este operador, é necessário compreender alguns conceitos principais.

O primeiro destes refere-se à chamada *base dual*. Consideremos uma base $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ qualquer do espaço-tempo. A base dita dual à ela, que será denotada pelos vetores $\{e^0, e^1, e^2, e^3\}$, é tal que satisfaz a relação

$$e^\mu \cdot e_\nu = e_\nu \cdot e^\mu \equiv \delta^\mu_\nu, \quad (64)$$

onde δ^μ_λ é o chamado *delta de Kronecker*, a representação tensorial da matriz identidade.

As bases duais desempenham um importantíssimo papel no contexto de relatividade geral devido à propriedade apresentada em sua própria definição; i.e. a relação (64), [4]. Por exemplo, considere um vetor arbitrário \mathbf{V} no seu espaço. Além disso, suponha conhecidas as bases $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ e $\{e^0, e^1, e^2, e^3\}$, sendo esta última a base dual à primeira. Como ambos os conjuntos formam uma base do espaço em estudo, o vetor \mathbf{V} pode ser expandido como uma combinação linear de seus elementos,

$$\mathbf{V} = V^\mu e_\mu = V_\nu e^\nu. \quad (65)$$

Com auxílio da expressão anterior, calculamos o produto interno entre o vetor genérico \mathbf{V} e um elemento qualquer das bases. Deste resultado, ao empregarmos a relação que define a base dual, podemos extrair as relações para “abaixar” e “subir” índices nos tensores, [4, 6, 7, 10, 11],

$$V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu \quad \text{e} \quad V^\mu = g^{\mu\nu} V_\nu. \quad (66)$$

Rigorosamente, as equações acima indicam como podemos, através do tensor métrico, converter as componentes de um vetor numa determinada base para as componentes em relação à base dual respectiva, e vice-versa; ou ainda, como converter as componentes contravariantes de um vetor em suas componentes covariantes, e vice-versa. A simplificação mnemônica deste resultado, i.e. “abaixar e subir índices”, serve unicamente como um lembrete para operacionalizar os cálculos em relatividade geral de maneira mais direta, [4]. Não devemos nos esquecer das interpretações matemáticas adequadas destas relações, e consequentemente, como elas se traduzem aos contextos físicos em que as aplicamos.

Finalmente, podemos seguir à definição do operador diferencial. Considere um espaço-tempo arbitrário, no qual conhecemos duas bases, $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ e $\{e^0, e^1, e^2, e^3\}$, com a segunda delas sendo dual à primeira. Dado um vetor arbitrário \mathbf{V} neste espaço, definimos a derivada covariante sobre uma de suas componentes conforme

$$\nabla_\nu V^\mu \equiv \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} \cdot e^\mu. \quad (67)$$

Por motivos de simplicidade, podemos, eventualmente, escrever o operador derivada parcial em relação a uma coordenada arbitrária x^ν conforme $(\partial/\partial x^\nu) \equiv \partial_\nu$, [4]. Expandindo o vetor \mathbf{V} em termos dos vetores da base, utilizando a regra de Leibniz e também a relação entre os vetores de bases duais,

$$\nabla_\nu V^\mu = \partial_\nu (V^\lambda e_\lambda) \cdot e^\mu = \partial_\nu V^\lambda \delta^\mu_\lambda + V^\lambda (\partial_\nu e_\lambda \cdot e^\mu) = \partial_\nu V^\mu + V^\lambda (\partial_\nu e_\lambda \cdot e^\mu).$$

Definindo os símbolos de Christoffel conforme a referência [4], quantidades estas já discutidas anteriormente,

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} \equiv \partial_\nu e_\lambda \cdot e^\mu, \quad (68)$$

podemos escrever a derivada covariante da seguinte maneira

$$\nabla_\nu V^\mu = \partial_\nu V^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} V^\lambda. \quad (69)$$

Fizemos as passagens anteriores para um vetor descrito em termos de componentes contravariantes. Caso apliquemos esta operação em termos de componentes covariantes, utilizando as mesmas definições, obteremos a seguinte expressão

$$\nabla_\nu V_\mu = \partial_\nu V_\mu - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} V_\lambda. \quad (70)$$

Num primeiro momento, pode parecer que nossas discussões acerca dos símbolos de Christoffel acabaram por entrar em conflito. A definição aqui apresentada para tais grandezas pode parecer diferente daquela exposta na Seção 2.5.2, mas, na verdade, as duas formas são equivalentes. Ou seja, à partir da definição

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} \equiv \frac{1}{2} g^{\sigma\mu} (\partial_\lambda g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\lambda\sigma} - \partial_\sigma g_{\nu\lambda}), \quad (71)$$

podemos chegar à relação (68). Para isso, basta expandir as componentes do tensor métrico em termos do produto interno entre os vetores da base e, após um longo procedimento algébrico realizado com ajuda das propriedades de derivadas parciais, a expressão reduz-se àquela manifestada pela Eq.(68).

Em geral, podemos encontrar uma expressão geral para derivadas covariantes aplicadas sobre tensores de ordem n , porém, não a apresentaremos neste relatório, mesmo que seja necessário utilizá-la em algum momento ao longo dos próximos tópicos.

2.5.4 Curvatura

No contexto de relatividade geral, o tensor métrico é, sem sombra de dúvidas, o mais relevante de todos os tensores. Entretanto, ele sozinho não pode ser utilizado para extrair informações acerca da curvatura do espaço-tempo, [4]. Através de uma cadeia de raciocínio bastante sólida, podemos conhecer a curvatura através do *transporte paralelo* de vetores em relação à duas curvas distintas. A ideia basicamente consiste em realizar translações paralelas de um vetor sobre duas trajetórias e depois alternar a ordem escolhida entre as curvas. Feito isso, observamos a diferença entre os vetores resultantes para cada um dos casos, [4]. Num espaço-tempo de curvatura nula, não haveria qualquer mudança. Só observaríamos alterações para espaços-tempo com curvatura não-nula, [4].

Este procedimento pode ser reproduzido agora que conhecemos a derivada covariante. Dado um quadrivetor genérico, \mathbf{A} , calcularemos a diferença entre a derivada covariante de segunda ordem sobre uma de suas componentes ao alterarmos a ordem em que estas são computadas. Matematicamente, queremos encontrar o resultado para a diferença $\nabla_\mu \nabla_\nu A_\alpha - \nabla_\nu \nabla_\mu A_\alpha$. Aplicando a derivada covariante ∇_μ na derivada covariante de A_α , $\nabla_\nu A_\alpha$, obtemos,

$$\begin{aligned} \nabla_\mu (\nabla_\nu A_\alpha) &= \partial_\mu (\nabla_\nu A_\alpha) - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} (\nabla_\lambda A_\alpha) - \Gamma^\lambda_{\mu\alpha} (\nabla_\nu A_\lambda) \\ &= \partial_\mu (\partial_\nu A_\alpha - \Gamma^\sigma_{\nu\alpha} A_\sigma) - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} (\partial_\lambda A_\alpha - \Gamma^\sigma_{\lambda\alpha} A_\sigma) - \Gamma^\lambda_{\mu\alpha} (\partial_\nu A_\lambda - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} A_\sigma) \\ &= \partial_\mu \partial_\nu A_\alpha - \partial_\mu (\Gamma^\sigma_{\nu\alpha} A_\sigma) - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} (\partial_\lambda A_\alpha - \Gamma^\sigma_{\lambda\alpha} A_\sigma) - \Gamma^\lambda_{\mu\alpha} (\partial_\nu A_\lambda - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} A_\sigma) \\ &= \partial_\mu \partial_\nu A_\alpha - (\partial_\mu \Gamma^\sigma_{\nu\alpha}) A_\sigma - \Gamma^\sigma_{\nu\alpha} (\partial_\mu A_\sigma) - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} (\partial_\lambda A_\alpha - \Gamma^\sigma_{\lambda\alpha} A_\sigma) - \Gamma^\lambda_{\mu\alpha} (\partial_\nu A_\lambda - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} A_\sigma) . \end{aligned}$$

Simplificando a expressão acima, obtemos a equação

$$\nabla_\mu \nabla_\nu A_\alpha = \partial_\mu \partial_\nu A_\alpha - \Gamma^\sigma_{\nu\alpha} (\partial_\mu A_\sigma) - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} (\partial_\lambda A_\alpha) - \Gamma^\lambda_{\mu\alpha} (\partial_\nu A_\lambda) + \left(\Gamma^\lambda_{\mu\alpha} \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \Gamma^\sigma_{\lambda\alpha} - \partial_\mu \Gamma^\sigma_{\nu\alpha} \right) A_\sigma . \quad (72)$$

Ao invertermos a ordem das derivadas covariantes, auferiremos a expressão

$$\nabla_\nu \nabla_\mu A_\alpha = \partial_\nu \partial_\mu A_\alpha - \Gamma^\sigma_{\mu\alpha} (\partial_\nu A_\sigma) - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} (\partial_\lambda A_\alpha) - \Gamma^\lambda_{\nu\alpha} (\partial_\mu A_\lambda) + \left(\Gamma^\lambda_{\nu\alpha} \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} + \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \Gamma^\sigma_{\lambda\alpha} - \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\alpha} \right) A_\sigma . \quad (73)$$

Subtraindo uma equação da outra, encontramos

$$\nabla_\mu \nabla_\nu A_\alpha - \nabla_\nu \nabla_\mu A_\alpha = \left(\partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\alpha} - \partial_\mu \Gamma^\sigma_{\nu\alpha} + \Gamma^\lambda_{\mu\alpha} \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} - \Gamma^\lambda_{\nu\alpha} \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} \right) A_\sigma . \quad (74)$$

Como discutimos em alguns parágrafos acima, os efeitos devido à curvatura podem ser observados da diferença entre os resultados obtidos ao realizarmos o transporte paralelo de um vetor sobre duas direções num revezamento da ordem em que estas se sucedem. Logo, definindo uma nova quantidade, que certamente está associada à curvatura do espaço-tempo, a partir do termo que surge da diferença entre a comutação dos dois operadores de derivada covariante, [4],

$$R^\sigma_{\mu\nu\alpha} \equiv \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\alpha} - \partial_\mu \Gamma^\sigma_{\nu\alpha} + \Gamma^\lambda_{\mu\alpha} \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} - \Gamma^\lambda_{\nu\alpha} \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} , \quad (75)$$

podemos reescrever a Eq.(74) conforme

$$\nabla_\mu \nabla_\nu A_\alpha - \nabla_\nu \nabla_\mu A_\alpha = R^\sigma_{\mu\nu\alpha} A_\sigma , \quad (76)$$

onde $R^\sigma_{\mu\nu\alpha}$ é o chamado *tensor de Riemann*, ou *tensor de curvatura*.

Agora, vemos explicitamente como a curvatura do espaço-tempo está relacionada aos coeficientes de conexão afim, [4]. É justamente essa relação que nos permite, por exemplo, tomar mais informações acerca da interpretação física de geodésicas e então inferir certas características do movimento de partículas livres em espaços dados por diferentes métricas, ao mesmo tempo que investigamos a própria geometria deste.

Obviamente, é possível realizar contrações nos índices do tensor de Riemann, entretanto, apenas uma destas é não-trivial e nos proporciona um tensor simétrico de ordem 2, chamado *tensor de Ricci*, [4], definido da seguinte maneira

$$R_{\mu\alpha} \equiv R^\sigma_{\mu\sigma\alpha} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\alpha} - \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\lambda\alpha} + \Gamma^\lambda_{\mu\alpha} \Gamma^\sigma_{\sigma\lambda} - \Gamma^\lambda_{\sigma\alpha} \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} . \quad (77)$$

Podemos ainda realizar uma nova contração dos índices sobre o tensor de Ricci de modo a obter seu traço,

$$R \equiv g^{\mu\alpha} R_{\mu\alpha} = R^\alpha_\alpha . \quad (78)$$

Esta última quantidade é conhecida como *escalar de curvatura* ou *escalar de Ricci*, [4].

Geralmente, quando definimos um tensor, procuramos observar algumas propriedades de simetria (ou anti-simetria) que possam existir em relação ao índices deste, [4]. O tensor de Riemann, por exemplo, dentre várias propriedades, obedece um conjunto particular de relações diferenciais, conhecidas como segundas *identidades de Bianchi*, [4]. São estas

$$\begin{aligned}\nabla_\mu R_{\nu\alpha\sigma\beta} + \nabla_\alpha R_{\mu\nu\sigma\beta} + \nabla_\nu R_{\alpha\mu\sigma\beta} &= 0, \\ \nabla_\mu R_{\nu\alpha\sigma\beta} + \nabla_\sigma R_{\mu\nu\alpha\beta} + \nabla_\alpha R_{\sigma\mu\nu\beta} + \nabla_\nu R_{\alpha\sigma\mu\beta} &= 0.\end{aligned}\tag{79}$$

Realizando duas contrações na primeira identidade apresentada em (79), obteremos um importante resultado, fundamental para toda a formulação da relatividade geral, [4]. Assim sendo, tal propriedade implica em

$$\nabla_\mu \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) = 0.\tag{80}$$

Baseados neste resultado, definimos um tensor de segunda ordem, chamado *tensor de Einstein*,

$$G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R.\tag{81}$$

Uma vez que o tensor métrico e o tensor de Ricci são simétricos, consequentemente, o tensor de Einstein também o será. Além disso, da própria equação de onde consideramos sua definição, auferimos que este tensor possui divergência nula, i.e. $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$, [4].

2.5.5 Equações de Einstein

Na teoria newtoniana da gravitação, a equação que correlaciona o potencial gravitacional Φ à densidade de massa ρ , representando a fonte deste campo, é a equação de Poisson,

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho,\tag{82}$$

onde G é a constante gravitacional universal, [4]. Fazendo uma analogia com o limite newtoniano, devemos esperar que as novas equações para o campo gravitacional, as ditas *equações de Einstein*, irão conter derivadas do tensor métrico até a segunda ordem. Mais do que isso, tais equações deverão manter o mesmo perfil independentemente do sistema de coordenadas escolhido por um determinado observador, [4]. Desse modo, precisarão ser descritas através de tensores, e dentre estes objetos matemáticos, o mais natural que generaliza a densidade de matéria é o *tensor de energia-momento*, que será definido na Seção 2.6.2. Essa linha de raciocínio sugere que as equações de Einstein possuam a seguinte forma

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu},\tag{83}$$

onde κ é uma constante de proporcionalidade, [4].

Uma vez que a fonte do campo gravitacional deverá obedecer alguma lei de conservação, então, pela equação anterior, devemos esperar que este tensor $G_{\mu\nu}$ também a satisfaça. Apesar de termos trabalhado anteriormente dentro de um contexto puramente geométrico, já construímos um tensor com todas essas propriedades: o tensor de Einstein, cuja definição está apresentada em (81). [4]

Coletando todas as nossas conclusões, e escolhendo uma constante de proporcionalidade κ tal que forneça a gravidade newtoniana como limite não-relativístico das novas equações para o campo gravitacional, podemos escrever as equações de Einstein conforme

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}.\tag{84}$$

Estas são as equações fundamentais que descrevem o nosso entendimento moderno sobre gravitação, [9]. Elas correlacionam a densidade de matéria às alterações no tensor de Einstein e, portanto, às mudanças na curvatura do espaço-tempo.

2.5.6 Métrica de Schwarzschild

Na relatividade geral, os espaços-tempo curvos mais simples são aqueles que possuem alta simetria, e dentre estes, temos aquele associado à geometria do espaço vazio fora de uma fonte de curvatura esfericamente simétrica, e.g. uma estrela esférica ou um buraco negro sem rotação, [6]. Para determinarmos a solução que descreve esse espaço-tempo, que encontra-se no vácuo, i.e. $T_{\mu\nu} = 0$, precisaríamos resolver as equações de campo de Einstein nestas condições, cujo perfil torna-se

$$G_{\mu\nu} = 0.$$

A única geometria estática e esfericamente simétrica do espaço-tempo que satisfaz tais equações é a chamada *geometria de Schwarzschild*, [4]. O elemento de comprimento ds para esta geometria, num sistema de coordenadas particularmente adequado, é dado por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) (cdt)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).\tag{85}$$

A métrica $g_{\mu\nu}$ correspondente ao elemento de linha descrito acima é chamada *métrica de Schwarzschild*, [6, 7, 9, 10, 11].

Agora que a métrica foi introduzida, devemos interpretá-la com um pouco mais de cautela, averiguando as importantes propriedades que carrega.

A geometria de uma superfície bidimensional, dentro do espaço quadridimensional descrito na Eq.(85), com r e t constantes pode ser representada pelo elemento de comprimento

$$d\Sigma^2 = r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) .$$

Esta é a exata descrição da geometria de uma esfera de raio r no espaço tridimensional euclidiano. Portanto, a geometria de Schwarzschild possui as mesmas simetrias de uma esfera em relação às variações nos ângulos θ e ϕ , [6].

Além disso, algo interessante ocorre quando o raio r assume determinados valores. Por exemplo, quando $r = 0$, temos uma singularidade real da métrica. Ademais, existe outra singularidade no elemento de arco apresentado, que ocorre quando

$$1 - \frac{2GM}{c^2 r} = 0 .$$

Esta é conhecida como uma singularidade de coordenada, uma vez que pode ser eliminada através de uma mudança de coordenadas. Desta condição, extraímos a seguinte expressão

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} . \quad (86)$$

Ou seja, quando o raio r assume os valores $r = 0$ ou $r = 2GM/c^2$, encontramos uma singularidade na métrica que descreve a geometria ao redor de uma distribuição esfericamente simétrica de massa. Esta última, que advém da condição dada pela expressão (86), define aquilo que iremos chamar de *raio de Schwarzschild*, sendo um fator de escala característico para a curvatura na geometria em que estamos trabalhando, [6].

Como parte dos objetivos definidos para este projeto, devemos visualizar as órbitas geodésicas na métrica de Schwarzschild. Já derivamos a equação da geodésica na Seção 2.5.2, e agora, temos a métrica em mãos. Resta calcularmos os símbolos de Christoffel para a geometria de Schwarzschild. Os resultados gráficos para as geodésicas equatoriais na geometria de Schwarzschild serão apresentados na próxima seção.

2.5.7 Geodésicas tipo-tempo na métrica de Schwarzschild

Explicitamente, as componentes do tensor métrico associado à geometria de Schwarzschild podem ser escritas conforme

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} -(1 - \frac{2GM}{c^2 r}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \frac{2GM}{c^2 r})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} . \quad (87)$$

Uma vez que temos conhecimento da métrica de um determinado espaço-tempo, é fácil construir os coeficientes de conexão afim, dados pela Eq.(62) em termos das componentes do tensor métrico. Realizando esse longo processo, apresento abaixo apenas os coeficientes de conexão afim não-nulos da métrica de Schwarzschild.

$$\begin{aligned} \Gamma^r_{tt} &= -\frac{GM(2GM - c^2 r)}{c^4 r^3} & \Gamma^r_{rr} &= \frac{GM}{r(2GM - c^2 r)} & \Gamma^r_{\theta\theta} &= \frac{2GM}{c^2} - r \\ \Gamma^r_{\phi\phi} &= \left(\frac{2GM}{c^2 r} - 1\right) r \sin^2 \theta & \Gamma^t_{tr} &= -\frac{GM}{r(2GM - c^2 r)} & \Gamma^\theta_{\theta r} &= \frac{1}{r} \\ \Gamma^\theta_{\phi\phi} &= -\sin \theta \cos \theta & \Gamma^\phi_{\phi r} &= \frac{1}{r} & \Gamma^\phi_{\phi\theta} &= \cot \theta \end{aligned}$$

Deve ficar claro que não estão explícitos os coeficientes simétricos aos apresentados anteriormente; sendo $\Gamma^\phi_{\phi r} = \Gamma^r_{r\phi}$, é conveniente indicar apenas um destes. Ao determinarmos tais coeficientes, podemos escrever as equações das geodésicas tipo-tempo para cada uma das coordenadas de Schwarzschild, conforme apresentamos na Eq.(63). Realizando todo o procedimento, encontramos as seguintes equações de movimento

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} - \frac{1}{r \left(1 - \frac{c^2 r}{2GM}\right)} \frac{dr}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} = 0 \quad ; \quad \frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} - \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = 0 \quad ; \quad \frac{d^2 \phi}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} + 2 \cot \theta \frac{d\theta}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} = 0$$

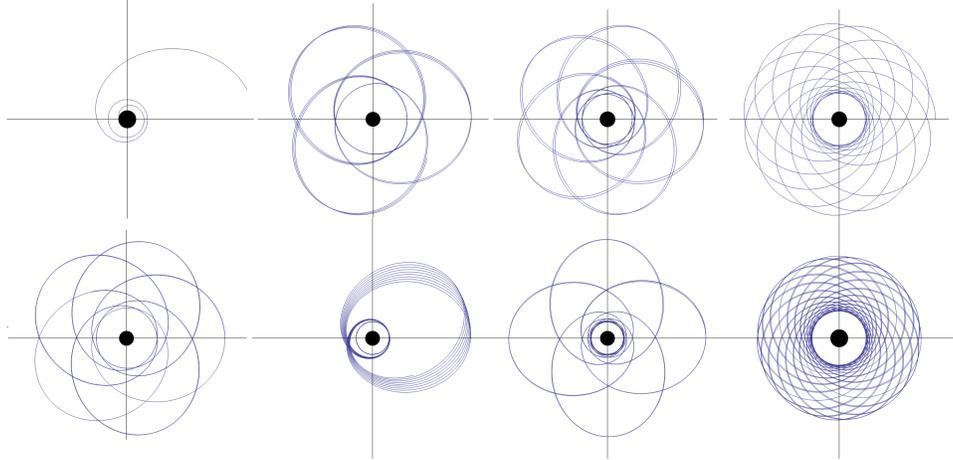
$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} - \left(\frac{2G^2 M^2}{c^4 r^3} - \frac{GM}{c^2 r^2} \right) \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{r \left(2 - \frac{c^2 r}{GM} \right)} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{2GM}{c^2} - r \right) \left[\left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \right] = 0.$$

Utilizando as funções `NDSolve` e `ParametricPlot` do software *Wolfram Mathematica 9*, em conjunto com algumas outras ferramentas de desenvolvimento para facilitar a manipulação das condições iniciais, é possível resolver numericamente as equações anteriores e assim obter uma representação visual das geodésicas tipo-tempo na métrica de Schwarzschild, ou seja, um gráfico que representa as órbitas de partículas ao redor de uma distribuição esfericamente simétrica de matéria, como, por exemplo, um buraco negro. Entretanto, como as equações gerais são muito complexas, faremos isso para um caso mais específico: órbitas limitadas ao plano equatorial. Nas coordenadas que estamos utilizando, uma órbita nestas considerações é aquela que se encontra sempre em $\theta = \pi/2$. Além disso, ao aplicar tal condição às equações diferenciais, concluímos que tais órbitas devem ser planares. As equações das geodésicas, portanto, se reduzem a

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} - \frac{1}{r \left(1 - \frac{c^2 r}{2GM} \right)} \frac{dr}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} = 0 \quad ; \quad \frac{d^2 \phi}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} = 0$$

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} - \left(\frac{2G^2 M^2}{c^4 r^3} - \frac{GM}{c^2 r^2} \right) \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{r \left(2 - \frac{c^2 r}{GM} \right)} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{2GM}{c^2} - r \right) \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 = 0.$$

Plotando as soluções numéricas deste conjunto de equações, obtemos os seguintes gráficos para diferentes condições iniciais



(Gráfico 1. Soluções numéricas para as equações das geodésicas tipo-tempo na métrica de Schwarzschild, reduzidas ao movimento no plano equatorial, i.e. $\theta = \pi/2$, para condições iniciais distintas.)

A partir do Gráfico 1, podemos extrair diversas informações sobre os tipos de órbitas e as distintas características que elas possuem. Nas discussões a seguir, utilizaremos L para representar o momento angular da partícula que realiza as órbitas geodésicas e E sua energia, enquanto que a letra M denota a massa do buraco negro.

Em relação à primeira órbita, i.e. no canto superior esquerdo, visto que ela espirala para dentro do horizonte de eventos, concluímos que $L^2 < 12M^2$. Entretanto, apenas observando visualmente, não sabemos dizer qual das condições a energia satisfaz, i.e. $E^2 < 1$ ou $E^2 \geq 1$, uma vez que ambas podem categorizar este tipo de geodésica.

Como todas as outras geodésicas restantes apresentam uma *órbita de precessão*, então elas satisfazem a condição $L^2 > 12M^2$. Além disso, como tais órbitas estão circunscritas entre dois raios especificamente definidos, acreditamos que a energia para todos estes casos considerados obedecem à relação $E^2 < 1$.

2.6 Hidrodinâmica

Neste tópico, abordaremos a teoria de dinâmica dos fluidos através da referência [4]. A literatura em questão, recomendada pela orientadora, apresenta um conjunto fascinante, e muito bem apresentado, do conhecimento científico acerca da hidrodinâmica aplicada em contextos relativísticos. Nessa reputação, entram também os estudos sobre fluxos de acreção dos mais diversos tipos. Estes fatores auxiliaram fortemente na compreensão de outras referências e no desenvolvimento matemático associado às aplicações da relatividade geral.

2.6.1 Conceitos de hidrodinâmica não-relativística

Equação de Boltzmann Nesta seção, começaremos introduzindo a definição da *função distribuição* $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ de um sistema físico composto de partículas da mesma “espécie”, indistinguível de um sistema composto por apenas um elemento.

A função distribuição é então definida como a probabilidade de que uma partícula tenha, num instante t , uma velocidade \mathbf{u} no elemento d^3u do espaço de velocidades e posição \mathbf{x} no elemento de volume coordenado d^3x , [4]. Assim, se quisermos determinar o número total de partículas do sistema, N , simplesmente fazemos a integral

$$N = \int f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) d^3x d^3u, \quad (88)$$

sobre todo o espaço de fase, [4].

Independente de qual seja a função, podemos definir o valor médio de qualquer quantidade ψ em relação à função distribuição f conforme

$$\langle \psi \rangle \equiv \frac{1}{n} \int \psi f d^3u, \quad (89)$$

onde n é conhecido como *densidade numérica*, i.e. o número de partículas por unidade de volume, [4]. Esta é simplesmente dada pelas condições de normalização

$$n = \int f d^3u, \quad N = \int n d^3x. \quad (90)$$

Um exemplo relevante para a utilização da Eq.(89) é dado por aquilo que chamamos de *velocidade macroscópica média*, \mathbf{v} , definida conforme

$$\mathbf{v} \equiv \langle \mathbf{u} \rangle = \frac{1}{n} \int \mathbf{u} f d^3u. \quad (91)$$

Como este vetor determina a direção global do movimento do fluido, também nos referimos à esta como *velocidade do fluido*, [4].

As partículas do fluido, que possuem massa m , estão sob a ação de alguma força \mathbf{F} e têm uma certa velocidade \mathbf{u} numa dada posição \mathbf{x} . Assim, é natural imaginar que a conformação destas partículas se altere com o tempo, [4]. Essas mudanças no sistema podem ser representadas como uma transformação simples das coordenadas

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{u} dt, \quad (92)$$

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} + \frac{\mathbf{F}}{m} dt. \quad (93)$$

Uma diferença qualitativa na evolução da função distribuição depende da possibilidade das partículas interagirem entre si através de colisões. Assim, a função distribuição evolui de tal modo que, para representarmos a igualdade entre dois estados consecutivos, precisamos adicionar um fator de correção, $\Gamma(f)$, devido às colisões, [4]. Portanto, temos

$$f(t + dt, \mathbf{x} + \mathbf{u} dt, \mathbf{u} + \mathbf{F}/m dt) d^3x' d^3u' = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) d^3x d^3u + \Gamma(f) d^3x d^3u dt. \quad (94)$$

Expandindo o lado esquerdo da Eq.(94) através da série de Taylor,

$$\left[f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} dt + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} dt \right] d^3x d^3u = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) d^3x d^3u + \Gamma(f) d^3x d^3u dt. \quad (95)$$

Simplificando a equação anterior, e reescrevendo-a em notação vetorial, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{u}} f = \Gamma(f). \quad (96)$$

A equação (96) é conhecida como *equação de Boltzmann*, [4].

Equações de Conservação O movimento de um gás não-relativístico, por exemplo, pode ser representado por leis de conservação. Estas leis formam um conjunto de equações diferenciais parciais, as quais nomeamos *equações de Euler*, [4]. De modo a derivá-las, podemos antes desenvolver uma relação mais geral. Para isso, multiplicaremos a equação de Boltzmann, Eq.(96), por alguma quantidade arbitrária, ψ , e integraremos em d^3u . Assim,

$$\int \psi \frac{\partial f}{\partial t} d^3u + \int \psi (\mathbf{u} \cdot \nabla f) d^3u + \int \psi \left(\frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{u}} f \right) d^3u = \int \psi \Gamma(f) d^3u. \quad (97)$$

Assumindo que ψ é um invariante colisional, então, [4],

$$\int \psi \Gamma(f) d^3u = 0. \quad (98)$$

Desse modo, a equação (97) simplifica para

$$\int \psi \frac{\partial f}{\partial t} d^3u + \int \psi (\mathbf{u} \cdot \nabla f) d^3u + \int \psi \left(\frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{u}} f \right) d^3u = 0. \quad (99)$$

Queremos expressar a relação acima através de uma equação diferencial, portanto, adotando as devidas propriedades, podemos reescrevê-la na seguinte forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int \psi f d^3u \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\int u_i \psi f d^3u \right) - \int u_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} f d^3u - \int \frac{F_i}{m} \frac{\partial \psi}{\partial u_i} f d^3u - \int \frac{\psi}{m} \frac{\partial F_i}{\partial u_i} f d^3u = 0.$$

Aplicando a definição (89), obtemos

$$\frac{\partial (n \langle \psi \rangle)}{\partial t} + \frac{\partial (n \langle u_i \psi \rangle)}{\partial x_i} - n \left\langle u_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right\rangle - \frac{n}{m} \left\langle F_i \frac{\partial \psi}{\partial u_i} \right\rangle - \frac{n}{m} \left\langle \psi \frac{\partial F_i}{\partial u_i} \right\rangle = 0. \quad (100)$$

Esta última é conhecida como *equação de transporte*, [4].

Através da generalização desenvolvida, podemos derivar algumas equações de conservação ao substituir ψ pela quantidade de interesse, bastando apenas que esta seja um invariante colisional. Assumiremos que a força \mathbf{F} que age sobre as partículas do fluido não depende da velocidade, [4].

Um exemplo de invariante colisional é a massa das partículas do fluido. Ou seja, a massa m de cada uma das partículas não se altera perante a existência de interações entre elas. Assim, substituindo ψ pela massa m , tendo em mente que estamos assumindo uma força \mathbf{F} que não depende da velocidade \mathbf{u} das partículas, temos

$$\frac{\partial (nm)}{\partial t} + \frac{\partial (n u_i m)}{\partial x_i} = 0. \quad (101)$$

Definindo a *densidade volumétrica de massa*, ρ ,

$$\rho \equiv nm, \quad (102)$$

podemos escrever a equação (101), utilizando notação vetorial, conforme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (103)$$

chegamos à equação diferencial que representa a conservação de massa no escoamento do fluido, [4]. Esta é conhecida como *equação de continuidade*.

Outro exemplo de invariante colisional é o momento linear das partículas do fluido. Mesmo diante da existência de colisões entre elas, o momento das partículas deve ser conservado nos instantes das colisões, [4]. Assim, substituindo ψ pelo momento $m u_j$ das partículas, podemos simplificar a equação diferencial obtida através de um trabalho algébrico relativamente tedioso e algumas considerações semelhantes àquelas realizadas para derivar a equação de continuidade. Em notação vetorial, escrevemos esta conforme

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mathbf{F}}{m}, \quad (104)$$

onde p é a pressão do fluido. Esta equação diferencial parcial, também nomeada *equação de Euler*, representa a conservação de momento linear no escoamento do fluido, [4].

Por fim, um último invariante colisional a ser considerado é a energia das partículas, uma vez que estamos considerando apenas colisões elásticas, [4]. Aplicando a energia cinética, $\frac{1}{2} m \|\mathbf{u}\|^2$, na Eq.(100), e definindo a quantidade

$$\epsilon \equiv \frac{1}{2} \langle \|\mathbf{u}\|^2 \rangle = \frac{1}{2n} \int \|\mathbf{u}\|^2 f d^3u, \quad (105)$$

chamada *energia interna específica* do fluido, manipulamos a equação até alcançarmos o seguinte perfil

$$\rho \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \epsilon \right) + p (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0. \quad (106)$$

Finalmente, temos desenvolvido a equação que expressa a conservação de energia no movimento descrito pelo fluido, [4].

As equações (103), (104) e (106) formam um sistema que descreve a evolução de diversas variáveis independentes associadas à dinâmica de um fluido não-relativístico, [4]. Assim, definindo uma equação de estado para representar o fluido com o qual estamos trabalhando, podemos solucionar tal sistema e obter matematicamente o comportamento do fluido, e.g. a trajetória do escoamento ou mesmo o transporte de energia em seu interior, [4].

2.6.2 Conceitos de hidrodinâmica relativística

Equação de Boltzmann relativística Considere um sistema de N partículas, semelhante àquele descrito para o caso não-relativístico. Começaremos denotando as coordenadas do espaço-tempo por x^μ e o quadrimomento de uma partícula com massa de repouso m por $p^\mu = mcu^\mu$. O quadrimomento é normalizado de tal modo que $p^\mu p_\mu = -m^2 c^2$, [4].

Neste caso, uma função distribuição f também pode ser definida, de tal maneira que a quantidade

$$f d^3 x d^3 p = f dx^1 dx^2 dx^3 dp^1 dp^2 dp^3 \quad (107)$$

determina o número de partículas num dado elemento de volume do espaço de fase, $d^3 x d^3 p$, [4].

Consideremos agora um observador K' movendo-se em conjunto com uma das partículas do nosso sistema, e um outro observador, K , movendo-se com velocidade \mathbf{v} em relação ao observador K' , onde assumiremos que o trivetor \mathbf{v} está alinhado com o eixo x . Como resultado da contração espacial, o elemento de volume espacial $d^3 x'$ medido pelo observador K' é dado por

$$d^3 x' = \gamma d^3 x, \quad (108)$$

onde γ é o fator de Lorentz entre os dois observadores, [4].

Sendo $p^\mu p_\mu$ constante, sabemos que

$$\frac{d^3 p'}{p_0'} = \frac{d^3 p}{p_0}. \quad (109)$$

Além disso, considerando o movimento relativo entre os referenciais K e K' , é possível deduzir facilmente a relação

$$p_0' = \gamma^{-1} p_0. \quad (110)$$

Juntando as equações (109) e (110), determinamos

$$d^3 p = \gamma d^3 p'. \quad (111)$$

Aplicando esta nova relação na equação (108), obtemos

$$d^3 x' d^3 p' = d^3 x d^3 p. \quad (112)$$

Ou seja, apesar do elemento de volume espacial, $d^3 x$, não ser um invariante lorentziano, o elemento de volume do espaço de fase, $d^3 x d^3 p$, o é, [4]. Ademais, como os dois observadores devem concordar no número de partículas num dado elemento de volume, i.e.

$$f'(\mathbf{x}', \mathbf{u}') d^3 x' d^3 p' = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) d^3 x d^3 p, \quad (113)$$

então podemos concluir, através das Eqs. (112) e (113), que a própria função distribuição deve ser um invariante lorentziano, [4], i.e.

$$f'(\mathbf{x}', \mathbf{u}') = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \quad (114)$$

A equação relativística de Boltzmann pode ser obtida sob as mesmas suposições realizadas no contexto não-relativístico. Realizando um procedimento análogo, ao considerar as transformações de \mathbf{x} e \mathbf{u} diante a evolução do sistema, chegamos em

$$p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} + m \frac{\partial (F^\mu f)}{\partial p^\mu} = \Pi(f), \quad (115)$$

onde F^μ é a força que age sobre a partícula, podendo ou não depender do quadrimomento, enquanto $\Pi(f)$ é a generalização relativística do fator de correção devido à existência de colisões no fluido, [4].

Fluxos de transporte relativístico Para que possamos derivar as equações da hidrodinâmica relativística, é necessário antes desenvolver a equação de transporte para o contexto físico atual. De modo a realizar esta tarefa, introduziremos os *fluxos de transporte relativístico* de um tensor genérico \mathbf{G} de ordem k ,

$$\phi^{\mu \alpha_1 \dots \alpha_k}(\mathbf{G}) = \int G^{\alpha_1 \dots \alpha_k} p^\mu f \frac{d^3 p}{p^0}, \quad (116)$$

onde $G^{\alpha_1 \dots \alpha_k}$ são as componentes contravariantes de \mathbf{G} . Notemos que, apesar de haver um limite para a velocidade de uma partícula, as componentes espaciais do quadrimomento desta não estão limitadas, [4]. Estas componentes são dadas por

$$p^i = \gamma m v^i, \quad (117)$$

onde γ é o fator de Lorentz. Assim, quando a i -ésima componente da velocidade tende a tal limite, $v^i \rightarrow \pm c$, a componente respectiva do quadrimomento tende ao infinito, $p^i \rightarrow \pm \infty$, [4]. Tendo clareado esta ideia, podemos exemplificar alguns fluxos de transporte relativístico que nos serão de grande importância daqui em diante.

O primeiro destes é obtido escolhendo $k = 0$ e $\mathbf{G} = c\mathbf{1}$ onde $\mathbf{1}$ representa o tensor unitário, [4]. Aplicando estas seleções na definição em (116), construiremos o *primeiro momento* da função distribuição, também chamado *quadrivetor corrente de densidade numérica*,

$$N^\mu \equiv c \int p^\mu f \frac{d^3 p}{p^0}. \quad (118)$$

A definição anterior permite observar claramente qual é a componente zero da densidade de corrente numérica, [4], i.e.

$$N^0 = c \int f d^3 p = cn,$$

onde n , conforme temos definido em (90), é a densidade numérica. Já em relação às componentes espaciais, recordando o quadrimomento (117), temos

$$N^i = c \int p^i f \frac{d^3 p}{p^0} = c \int \gamma m v^i f \frac{d^3 p}{p^0}.$$

Utilizando a relação $p^0 = \gamma mc$,

$$N^i = \int v^i f d^3 p.$$

Logo, vemos que N^i descreve o fluxo do número de partículas por unidade de tempo e de superfície na direção da i -ésima componente espacial, [4]. Diretamente relacionado ao primeiro momento, definimos a *corrente de densidade de massa de repouso*,

$$J^\mu \equiv mN^\mu = mc \int p^\mu f \frac{d^3 p}{p^0}. \quad (119)$$

Procedendo de maneira semelhante, iremos agora escolher $k = 1$ e $\mathbf{G} = c\mathbf{p}$ para desenvolver o *segundo momento* da função, [4], conhecido como *tensor de energia-momento*,

$$T^{\mu\nu} \equiv c \int p^\mu p^\nu f \frac{d^3 p}{p^0}. \quad (120)$$

Suas componentes representam o fluxo da μ -ésima componente de momento em relação à direção da ν -ésima coordenada, [4].

Poderíamos, ao longo destas linhas, construir momentos de ordens maiores. Para isso, basta aumentar o número de momentos lineares na integral e assim expandir a ordem do tensor correspondente. Entretanto, a interpretação física destes momentos também se torna cada vez mais obscura, e por este motivo, geralmente levamos em consideração até o *terceiro momento* da função distribuição, [4].

Equações da Hidrodinâmica Relativística Assim como fizemos na Seção 27, iremos derivar, à partir da equação de Boltzmann, uma equação de transporte. Na situação atual, visto que estamos trabalhando num regime relativístico, devemos agora utilizar a Eq.(115).

Suponhamos um tensor genérico, \mathbf{G} , de ordem k , que seja conservado perante colisões binárias. Multiplicando uma de suas componentes, $G^{\alpha_1 \dots \alpha_k}$, na equação de Boltzmann relativística, e integrando esta em relação ao elemento $d^3 p/p^0$, um invariante lorentziano, obtemos a seguinte equação

$$\int G^{\alpha_1 \dots \alpha_k} \left[p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} + m \frac{\partial (F^\mu f)}{\partial p^\mu} \right] \frac{d^3 p}{p^0} = \int G^{\alpha_1 \dots \alpha_k} \Pi(f) \frac{d^3 p}{p^0}. \quad (121)$$

Pela suposição feita no parágrafo anterior, o tensor \mathbf{G} é um invariante colisional, portanto, [4],

$$\int G^{\alpha_1 \dots \alpha_k} \left[p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} + m \frac{\partial (F^\mu f)}{\partial p^\mu} \right] \frac{d^3 p}{p^0} = 0. \quad (122)$$

Além disso, vamos considerar também que a força externa que age no fluido, F^μ , não depende do quadrimomento, [4]. Com isso, a Eq.(122) é reescrita

$$\int G^{\alpha_1 \dots \alpha_k} \left(p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} + m F^\mu \frac{\partial f}{\partial p^\mu} \right) \frac{d^3 p}{p^0} = 0. \quad (123)$$

Vamos analisar cada um dos termos no integrando ao esquerdo da equação (123). O primeiro destes, através de uma integração por partes, pode ser reescrito conforme

$$\int G^{\alpha_1 \dots \alpha_k} p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{d^3 p}{p^0} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\int G^{\alpha_1 \dots \alpha_k} p^\mu f \frac{d^3 p}{p^0} \right) - \int p^\mu f \frac{\partial G^{\alpha_1 \dots \alpha_k}}{\partial x^\mu} \frac{d^3 p}{p^0}. \quad (124)$$

Tratando o segundo termo pela mesma abordagem, obtemos

$$m \int G^{\alpha_1 \dots \alpha_k} F^\mu \frac{\partial f}{\partial p^\mu} \frac{d^3 p}{p^0} = m \left[\int \frac{\partial (G^{\alpha_1 \dots \alpha_k} F^\mu f)}{\partial p^\mu} \frac{d^3 p}{p^0} - \int F^\mu f \frac{\partial G^{\alpha_1 \dots \alpha_k}}{\partial p^\mu} \frac{d^3 p}{p^0} \right]. \quad (125)$$

Em relação à primeira integral no lado direito da Eq.(125), podemos avaliar seu resultado através do teorema de Ostrogradski-Gauss, lembrando que estamos supondo F^μ independente do quadrimomento. Para isso, basta considerar também o que ocorre com a função distribuição f para valores extremos de p^i ; em outras palavras, o que ocorre com tal função quando $p^i \rightarrow \pm\infty$? É natural imaginar que tenhamos cada vez menos partículas com momento linear tão elevado, uma vez que isso levaria a uma quantidade infinita de energia, [4], portanto, concluímos que $f \rightarrow 0$ quando $p^i \rightarrow \pm\infty$. Assim, tomando atenção a estes fatos, podemos verificar que tal integral é, efetivamente, zero, [4]. Logo,

$$m \int G^{\alpha_1 \dots \alpha_k} F^\mu \frac{\partial f}{\partial p^\mu} \frac{d^3 p}{p^0} = -m \int F^\mu f \frac{\partial G^{\alpha_1 \dots \alpha_k}}{\partial p^\mu} \frac{d^3 p}{p^0}. \quad (126)$$

Substituindo as relações (124) e (126) na Eq.(123),

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\int G^{\alpha_1 \dots \alpha_k} p^\mu f \frac{d^3 p}{p^0} \right) - \int \left(p^\mu \frac{\partial G^{\alpha_1 \dots \alpha_k}}{\partial x^\mu} + m F^\mu \frac{\partial G^{\alpha_1 \dots \alpha_k}}{\partial p^\mu} \right) f \frac{d^3 p}{p^0} = 0. \quad (127)$$

Esta é a *equação de transporte* no contexto relativístico. Com esta, podemos desenvolver as equações de conservação para diferentes momentos da função distribuição através de cálculo direto, bastando apenas que os tensores associados sejam invariantes colisionais, [4].

Primeiramente, vamos estabelecer $\mathbf{G} = mc\mathbf{1}$, onde, novamente, temos que $\mathbf{1}$ representa o tensor unitário. Aplicando este tensor à equação de transporte, Eq.(127), tendo em mente que m e c são constantes,

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(mc \int p^\mu f \frac{d^3 p}{p^0} \right) = 0. \quad (128)$$

Pela definição do quadrivetor corrente de densidade de massa de repouso, J^μ , apresentada em (119), temos

$$\frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} = 0. \quad (129)$$

Esta equação diferencial parcial representa a conservação da massa de repouso, que foi obtida diretamente da equação de transporte, assim como no caso não-relativístico.

De modo análogo, escolhendo $\mathbf{G} = c\mathbf{p}$ e substituindo este na Eq.(127), obteremos

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(c \int p^\mu p^\nu f \frac{d^3 p}{p^0} \right) - c \int m \delta^\nu_\mu F^\mu f \frac{d^3 p}{p^0} = 0. \quad (130)$$

Recordando a definição do tensor de energia-momento, reescrevemos

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = c \int m F^\nu f \frac{d^3 p}{p^0}, \quad (131)$$

que é a própria equação de conservação de momento e energia do fluido num contexto relativístico. As equações (129) e (131) não admitem muitos fins práticos caso desconhecamos a função distribuição f , [4]. Entretanto, com o raciocínio desenvolvido aqui, podemos utilizar uma abordagem mais intuitiva, a qual não se baseia numa descrição cinética ou em considerações estatísticas, [4].

Como vimos anteriormente, o quadrivetor J^μ representa o fluxo da massa de repouso, enquanto que o tensor $T^{\mu\nu}$ representa o fluxo do quadrimomento. Assim, podemos “forçar” a conservação destas quantidades ao impor que o fluxo líquido correspondente, através de uma superfície tridimensional fechada Σ , seja zero. Num espaço-tempo de curvatura nula, essas condições são expressas por

$$\int_\Sigma J^\mu l_\mu d^3 x = 0, \quad (132)$$

$$\int_\Sigma T^{\mu\nu} l_\mu d^3 x = 0, \quad (133)$$

onde l_μ representa as componentes do versor normal à superfície Σ , [4]. Como a superfície tridimensional é fechada, i.e. $\Sigma = \partial\Omega$, então podemos aplicar o teorema de Ostrogradski-Gauss nestas equações. Desse modo, encontramos as seguintes integrais de volume

$$\int_\Omega \nabla_\mu J^\mu d^4 x = 0, \quad (134)$$

$$\int_\Omega \nabla_\nu T^{\mu\nu} d^4 x = 0. \quad (135)$$

Devido à arbitrariedade na escolha do elemento de volume do espaço-tempo, as equações imediatamente anteriores serão satisfeitas se, e somente se,

$$\begin{aligned} \nabla_\mu J^\mu &= 0, \\ \nabla_\nu T^{\mu\nu} &= 0. \end{aligned} \quad (136)$$

Estas equações representam a conservação de massa de repouso, momento linear e energia na dinâmica de um fluido em regime relativístico, [4]. São, portanto, as *equações da hidrodinâmica relativística*. Vale aqui ressaltar que, apesar de as termos construído para um espaço-tempo de curvatura nula, a covariância da formulação tensorial garante que estas equações irão assumir a mesma forma para um espaço-tempo com curvatura não-nula, [4].

2.6.3 Aspectos do fluido

A partir de agora, precisamos optar por um tipo de fluido específico com o qual iremos trabalhar. Para isso, nos ocorre o seguinte questionamento: qual é o modelo de fluido mais adequado para tratar no projeto diante as condições que estamos considerando? A escolha mais natural seria empregar um *fluido politrópico*, visto que a equação de estado associada é utilizada para modelar o comportamento da matéria perante um vasto leque de situações físicas diferentes, [2, 4]. Entretanto, apenas apresentaremos esse tipo de fluido para solucionarmos um problema de acreção esférica que segue ao final desta seção. Durante o desenvolvimento do disco relativístico, adotaremos a mesma equação de estado introduzida no artigo de referência. Quanto ao tensor de energia-momento que descreve o fluido, a designação é bem clara: um fluido não-perfeito. Buscamos estudar a estrutura de um disco de acreção, portanto, é necessário que haja a presença de algum tipo de estresse viscoso entre as partículas do fluido, [1, 2, 3, 4, 5], tornando o cenário de estudo mais realista e coerente. Novamente, para obtermos as soluções analíticas à estrutura do disco relativístico, empregaremos a escolha feita pelo artigo de referência, ainda que aqui exibimos um tensor de energia-momento mais geral para fluidos não-perfeitos.

A equação de estado referente ao fluido politrópico é

$$p(\rho) = K\rho^\Gamma, \quad (137)$$

onde K é a *constante politrópica* e Γ é o *expoente politrópico*, [4]. Tendo em mãos a equação de estado do fluido, partiremos às investigações de outros aspectos importantes para que finalmente sejamos capazes de compôr as equações que definem aspectos do escoamento com as devidas considerações relativísticas.

Uma quantidade de grande importância em nossos estudos, como já observamos no disco de acreção newtoniano, é a velocidade do som no fluido. No regime newtoniano, definimos esta como, [4],

$$(c_s)_N \equiv \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}. \quad (138)$$

Tal definição provém do estudo da propagação de ondas lineares num fluido. Em específico, como a velocidade de propagação desta se associa à variação de pressão do meio. Já para o caso relativístico, a velocidade do som é definida

$$c_s \equiv \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial e}\right)_s}, \quad (139)$$

onde e é a densidade total de energia, $e \equiv \rho(c^2 + \epsilon)$, [4].

Antes de discutirmos outras propriedades relativísticas dos fluidos, introduziremos algumas quantidades que descrevem a cinemática de qualquer fluido, independente de sua dinâmica ou equação de estado, [4]. A primeira quantidade cinemática fundamental é a *quadrivelocidade*, \mathbf{u} , cujas componentes contravariantes num sistema de coordenadas (x^0, x^1, x^2, x^3) são dadas por

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (140)$$

onde τ é o tempo próprio do fluido, i.e. o tempo próprio de um observador que move-se conjuntamente ao fluido, [4]. A segunda quantidade fundamental é a *quadrilaceração*, \mathbf{a} , cujas componentes contravariantes são definidas conforme, [4],

$$a^\mu \equiv u^\nu \nabla_\nu u^\mu. \quad (141)$$

Essas grandezas cinemáticas satisfazem duas relações essenciais, as quais serão aqui apresentadas pois nos ajudarão a derivar certos resultados ao longo desta seção. A primeira destas é a condição de normalização da quadrivelocidade, [4],¹

$$g^{\mu\nu} u_\nu u_\mu \equiv u^\mu u_\mu = -1. \quad (142)$$

A outra condição é a da ortogonalidade entre \mathbf{u} e \mathbf{a} , [4], i.e.

$$g^{\mu\nu} a_\nu u_\mu \equiv a^\mu u_\mu = 0. \quad (143)$$

¹A partir daqui, geralmente utilizaremos a velocidade da luz em unidades geométricas, i.e. $c = 1$. Em unidades comuns, a condição de normalização da quadrivelocidade é dada por $u^\mu u_\mu = -c^2$. Quando algo semelhante ocorrer com outras relações, faremos alguma retratação como esta para maiores esclarecimentos.

Além disso, seria conveniente que tivéssemos alguma ferramenta matemática para projetar qualquer tensor no hiperplano ortogonal à quadrivelocidade \mathbf{u} . Este é denominado *tensor de projeção*, [4], dado por

$$h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu. \quad (144)$$

Tendo explicitado aqui estes conceitos, iremos discorrer acerca de certas características de fluidos perfeitos e não-perfeitos de modo a compreender como os efeitos relativísticos podem ser considerados nas abordagens futuras. As discussões que seguem refletem nossa preocupação em descrever, de maneira plausível, o fluido que será empregado na formulação relativística do disco de acreção.

Fluido Perfeito Apesar da definição em (120) ser perfeitamente consistente, não é muito prática quando desconhecemos a função distribuição f , [4]. Abaixo, procuramos seguir um raciocínio mais direto e intuitivo para obter uma expressão evidente do tensor de energia-momento para fluidos perfeitos.

Um fluido é considerado *perfeito* quando, no referencial de repouso, pode ser completamente caracterizado por sua densidade de massa e pressão isotrópica, [4]. Ou seja, nestes fluidos desprezamos certos aspectos como, por exemplo, a viscosidade e a condução de calor. Estas propriedades devem ser preservadas ao estendermos tal definição para o contexto relativístico.

A quantidade mais simples que podemos determinar inicialmente é a corrente de densidade de massa de repouso, $J^{\hat{\mu}}$, que, como visto anteriormente, mede o fluxo da densidade de massa de repouso na direção definida pela coordenada $x^{\hat{\mu}}$. O acento circunflexo colocado no índice do quadrivetor \mathbf{J} deste parágrafo serve para indicar que estamos considerando suas componentes em relação ao referencial local de repouso do observador que move-se em conjunto com o fluido, [4]; assim evitando qualquer ambiguidade ou interpretação equivocada. Pela interpretação física deste vetor, no referencial em estudo, tal observador não registraria qualquer fluxo de corrente em direções espaciais, i.e. esperamos que $J^{\hat{i}} = 0$, onde $i = 1, 2, 3$, [4]. Assim, nos resta apenas a componente temporal, $J^{\hat{0}}$, que representa a própria densidade de massa de repouso, [4]. Juntando estas informações, concluímos que

$$J^{\hat{\mu}} = (\rho, 0, 0, 0). \quad (145)$$

De maneira análoga, lembrando que o tensor de energia-momento, $T^{\hat{\mu}\hat{\nu}}$, expressa o fluxo da componente $\hat{\mu}$ do momento na direção $\hat{\nu}$, podemos calcular cada uma de suas componentes de tal maneira que satisfaçam essa interpretação. Portanto, temos as seguintes condições

$$\begin{aligned} T^{\hat{0}\hat{0}} &: \text{densidade total de energia;} \\ T^{\hat{0}\hat{i}} &: \text{fluxo de energia na } \hat{i}\text{-ésima direção;} \\ T^{\hat{i}\hat{0}} &: \text{densidade de } \hat{i}\text{-momento;} \\ T^{\hat{i}\hat{j}} &: \text{fluxo de } \hat{i}\text{-momento na } \hat{j}\text{-ésima direção.} \end{aligned}$$

A primeira destas componentes, $T^{\hat{0}\hat{0}}$, tem uma construção bem objetiva. Já vimos a definição da densidade total de energia, e , de um fluido relativístico ao definirmos a velocidade do som neste regime. Recordando,

$$e \equiv \rho(c^2 + \epsilon) \equiv \rho(1 + \epsilon), \quad (146)$$

onde ρ é a densidade de massa de repouso e ϵ é a energia interna específica. Logo, $T^{\hat{0}\hat{0}} = e$, [4].

Como o fluido é dito *perfeito*, então, no referencial em discussão, não devemos observar qualquer transferência de calor. Assim, o fluxo de energia em qualquer direção espacial deve ser nulo, i.e. $T^{\hat{0}\hat{i}} = 0$, para todo i , [4]. O mesmo ocorrerá para a densidade de momento, i.e. $T^{\hat{i}\hat{0}} = 0$, para todo i , [4]. Por fim, basta computar as componentes $T^{\hat{i}\hat{j}}$.

Quando $i \neq j$, em relação ao referencial no qual estamos ponderando, é um tanto simples ver que tais componentes irão se anular. Entretanto, já no caso em que $i = j$, temos um registro direto da pressão no fluido, p , considerada isotrópica devido à natureza de um fluido perfeito, [4].

Sintetizando todos estes dados na notação matricial para o tensor de energia-momento, obtemos

$$T^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \quad (147)$$

Podemos agora reescrever as componentes destes tensores em termos da quadrivelocidade $u^{\hat{\mu}} = (1, 0, 0, 0)$ do fluido no mesmo referencial. Logo, concluímos que

$$J^{\hat{\mu}} = \rho u^{\hat{\mu}}, \quad (148)$$

e, com um pouco mais de cuidado, vemos que

$$T^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = e u^{\hat{\mu}} u^{\hat{\nu}} + p (\eta^{\hat{\mu}\hat{\nu}} + u^{\hat{\mu}} u^{\hat{\nu}}). \quad (149)$$

Explorando a imposição de covariância para generalizar estas relações e assim expressá-las em qualquer referencial, [4], obtemos

$$J^\mu = \rho u^\mu \quad \text{e} \quad T^{\mu\nu} = (e + p) u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}. \quad (150)$$

Finalmente, construímos os tensores que podem ser aplicados às equações da hidrodinâmica relativística [cf. (136)] para descrever o movimento e a evolução de fluidos perfeitos com as devidas correções desejadas. O próximo passo é elaborar novamente estes mesmos tensores, agora para fluidos não-perfeitos.

Fluido Não-Perfeito Já discutimos sobre a modelagem de um fluido perfeito quanto aos tensores diretamente relacionados com as equações da hidrodinâmica relativística. Aqui faremos algo análogo, porém, levando em consideração os efeitos que surgem em fluidos não-perfeitos. Antes de discorrermos acerca de expressões matemáticas, trataremos, primeiramente, de escolher um referencial ao problema.

Segundo a referência [4], que cita o artigo de Eckart (1940) e o livro de Landau & Lifshitz (1987), observamos nestes certas escolhas em relação aos sistemas de referência mais adequados para trabalharmos com hidrodinâmica relativística. Como as possibilidades oferecidas nestes artigos são consideradas relevantes para a análise do problema, adotaremos a sugestão apresentada por Eckart: um referencial no qual não há contribuições dissipativas à densidade de energia ou corrente de densidade de massa de repouso, [4].

Para um fluido não-perfeito, utilizaremos parte dos resultados para fluidos perfeitos, mas também adicionaremos termos de correção que estão associados à existência de certos fenômenos nestes tipos de fluido, e.g. viscosidade e fluxo de calor. Portanto, de maneira modesta, a expressão do tensor de energia-momento $T^{\mu\nu}$ para um fluido com tal perfil segue o modelo

$$T^{\mu\nu} = (e + p) u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu} + \mathcal{S}^{\mu\nu} + \mathfrak{H}^{\mu\nu}, \quad (151)$$

onde $\mathcal{S}^{\mu\nu}$ é o *tensor de estresse viscoso*, enquanto $\mathfrak{H}^{\mu\nu}$ descreve os *fluxos energéticos* gerados no referencial que estamos considerando, [4].

De acordo com a literatura principal consultada para o desenvolvimento das últimas seções, cf. referência [4], a definição correta para o tensor de estresse viscoso é

$$\mathcal{S}^{\mu\nu} = \pi^{\mu\nu} + \Pi (g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu), \quad (152)$$

onde $\pi^{\mu\nu}$ denota o *tensor de estresse anisotrópico* e Π representa a *pressão dinâmica*.

Agora, resta encontrar uma forma para $\mathfrak{H}^{\mu\nu}$. Sabendo que o *fluxo de calor* é dado pelo quadrivetor $q^\mu = (0, q^i)$, definimos

$$\mathfrak{H}^{\mu\nu} = q^\mu u^\nu + q^\nu u^\mu, \quad (153)$$

para que o tensor de energia-momento seja simétrico, [4]. Juntando todos os termos na Eq.(151), obtemos explicitamente

$$T^{\mu\nu} = (e + p + \Pi) u^\mu u^\nu + (p + \Pi) g^{\mu\nu} + q^\mu u^\nu + q^\nu u^\mu + \pi^{\mu\nu}. \quad (154)$$

Tendo discutido os conceitos principais da hidrodinâmica relativística e construído os tensores relevantes às equações de conservação, podemos partir às aplicações destes conceitos em fenômenos de acreção e então explorar a estrutura de um disco de acreção geometricamente fino com as devidas considerações relativísticas. Mas, primeiro, iremos trabalhar com estas ideias num problema de acreção esférica e, com isso, ganhar certa intuição sobre as correções relativísticas a serem implementadas na construção do disco.

2.6.4 Problema em Acreção Esférica

Considere um gás perfeitamente adiabático com equação de estado $p(\rho) = K\rho^\gamma$, onde γ é uma constante tal que $4/3 \leq \gamma \leq 5/3$. Este fluido realiza acreção esférica em direção a um buraco negro de Schwarzschild de massa M . A velocidade do som no gás a uma distância radial infinita é a_∞ . Logo, perguntamos: a partir de qual raio o escoamento se torna supersônico?

Essa questão foi extraída da referência [12], conforme sugerido, por razões didáticas, pela orientadora. Discussões sobre a velocidade do som em acreções esféricas, semelhantes à configuração apresentada pelo problema, podem ser encontradas com maior profundidade nas referências [1], [4] e [5].

Retornando ao problema, observamos as seguintes considerações: a acreção do gás é esféricamente simétrica e estacionária, i.e. $u^\mu = (u^t, u^r, 0, 0)$ e $\partial/\partial t \equiv 0$. Além disso, o gás é ideal e não possui auto-gravitação. Conhecendo o quadrivetor velocidade, u^μ , podemos facilmente determinar o quadrivetor corrente de densidade de massa de repouso, J^μ , conforme

$$J^\mu = \rho u^\mu, \quad (155)$$

onde ρ é a densidade de massa de repouso. Como vimos na seção 3.2, a “equação de continuidade” no regime relativístico é dada por

$$\nabla_\mu J^\mu = 0, \quad (156)$$

lembrando que ∇_μ representa a derivada covariante. Assim, expandindo a Eq.(139), através das considerações feitas pelo enunciado, temos

$$\frac{\partial}{\partial r} (-r^2 \rho u^r) = 0. \quad (157)$$

De modo a reduzir um pouco os índices, iremos escrever a velocidade radial, u^r , como $-u$, i.e. $u^r \equiv -u$. Na acreção esférica, estamos preocupados apenas com as componentes radiais, portanto, tal notação não irá atrapalhar nosso trabalho. Utilizando a regra de Leibniz, podemos expressar essa equação diferencial da seguinte maneira

$$\frac{2}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} + \frac{1}{u} \frac{du}{dr} = 0. \quad (158)$$

Já em relação à conservação de momento, esta condição é dada por

$$u \frac{du}{dr} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} + \frac{GM}{r^2} = 0. \quad (159)$$

Precisamos agora correlacionar estas duas últimas equações de modo a determinar uma relação entre a velocidade radial, u , e a velocidade do som no fluido. Pelo enunciado, conhecemos a equação de estado para o gás do problema, $p(\rho) = K\rho^\gamma$, e sabemos que este é ideal. Nestas condições, vale o seguinte perfil da primeira lei da termodinâmica,

$$d\epsilon + p d\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0, \quad (160)$$

onde ϵ é a energia interna específica do fluido. Abrindo o diferencial de ρ^{-1} , escrevemos

$$\rho d\epsilon = \frac{p}{\rho} d\rho. \quad (161)$$

Aplicando aqui a equação de estado do fluido e integrando esta relação, encontramos

$$\epsilon = \frac{K\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1}. \quad (162)$$

Combinando essas informações, é possível determinar a densidade total de energia para o fluido de interesse,

$$e = \rho c^2 + \frac{K\rho^\gamma}{\gamma-1}. \quad (163)$$

Associando a relação anterior e a equação de estado à definição da velocidade do som num fluido relativístico, designamos

$$a^2 = \frac{\gamma K \rho^{\gamma-1}}{c^2 + \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right) K \rho^{\gamma-1}}, \quad (164)$$

onde estamos representando a velocidade do som por a . Com tal resultado, reescrevemos a equação (159) como

$$u \frac{du}{dr} + \left(c^2 + \frac{\gamma K \rho^{\gamma-1}}{\gamma-1}\right) \frac{a^2}{\rho} \frac{d\rho}{dr} + \frac{GM}{r^2} = 0. \quad (165)$$

Substituindo o quadrado da velocidade do som na equação (165) pela dependência (164),

$$u \frac{du}{dr} + (\gamma K \rho^{\gamma-2}) \frac{d\rho}{dr} + \frac{GM}{r^2} = 0.$$

Como K e γ são constantes, podemos integrar a equação anterior em relação a r , utilizar novamente a relação (164), e assim obter

$$\frac{u^2}{2} + \left[c^2 + \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right) K \rho^{\gamma-1}\right] \frac{a^2}{\gamma-1} - \frac{GM}{r} = \text{constante} (\equiv \mathcal{B}). \quad (166)$$

Esta é conhecida como *equação de Bernoulli* relativística. Determinar essa constante é simples: basta considerar o valor desta quando $r \rightarrow \infty$. Neste limite, o potencial gravitacional tende a zero, assim como a velocidade radial das partículas do gás em acreção. Ou seja, quando $r \rightarrow \infty$,

$$\mathcal{B} \rightarrow \left[c^2 + \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right) K (\rho_\infty)^{\gamma-1}\right] \frac{a_\infty^2}{\gamma-1}.$$

Portanto, reescrevemos a equação de Bernoulli conforme

$$\frac{u^2}{2} + \left[c^2 + \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right) K \rho^{\gamma-1}\right] \frac{a^2}{\gamma-1} - \frac{GM}{r} = \left[c^2 + \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right) K (\rho_\infty)^{\gamma-1}\right] \frac{a_\infty^2}{\gamma-1}. \quad (167)$$

Utilizando a relação (164) em conjunto com um pouco de trabalho algébrico, podemos escrever

$$\frac{u^2}{2} + \left(1 + \frac{a^2}{\gamma - 1 - a^2}\right) \frac{a^2 c^2}{\gamma - 1} - \frac{GM}{r} = \left(1 + \frac{a_\infty^2}{\gamma - 1 - a_\infty^2}\right) \frac{a_\infty^2 c^2}{\gamma - 1}. \quad (168)$$

Averiguando esta equação na região sônica, definida por $r = r_s = GM/2u^2$, na qual $u = a$, encontramos

$$\left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{\gamma - 1}{c^2}\right)\right] a^2 + \frac{a^4}{\gamma - 1 - a^2} = a_\infty^2 + \frac{a_\infty^4}{\gamma - 1 - a_\infty^2}. \quad (169)$$

Para uma melhor apresentação dos resultados, escolheremos $c = 1$ daqui em diante. De modo a solucionarmos a última equação desenvolvida, utilizaremos dois métodos distintos para garantir uma resposta completa. São estes:

- 1) Truncar todos os fatores associados à velocidade do som, a , com grau ≥ 3 ;
 - 2) Expandir alguns termos numa série de Taylor e trabalhar analiticamente com tal simplificação.
- Através do primeiro método, a equação naturalmente reduz-se para

$$\left[1 - \frac{3}{2}(\gamma - 1)\right] a^2 \approx a_\infty^2. \quad (170)$$

Isolando o quadrado da velocidade do som, a^2 , temos

$$a^2 \approx \left(\frac{2}{5 - 3\gamma}\right) a_\infty^2. \quad (171)$$

Aplicando este resultado no raio que define a região sônica, r_s , determinamos

$$\boxed{r_s \approx \left(\frac{5 - 3\gamma}{4}\right) \frac{GM}{a_\infty^2}}. \quad (172)$$

Essa solução é válida para qualquer valor de $\gamma \neq 5/3$, logo, é muito boa para a maior parte do intervalo no qual esta constante está definida, mas ainda precisamos de uma solução para quando $\gamma = 5/3$. Por esse motivo, recorreremos ao segundo método.

Como basta apenas encontrar uma solução para quando γ assume um valor específico, então, iremos substituir esse valor diretamente na Eq.(169) e só então expandiremos o termos necessários. Assim sendo,

$$\frac{a^4}{\frac{2}{3} - a^2} = a_\infty^2 + \frac{a_\infty^4}{\frac{2}{3} - a_\infty^2}. \quad (173)$$

Expandindo o termo único no lado esquerdo da equação anterior por uma série de Taylor até a 4 ordem, determinamos

$$\frac{a^4}{\frac{2}{3} - a^2} \approx \frac{3}{2} a^4 + \mathcal{O}(a^5).$$

Aplicando a aproximação também para o termo equivalente de a_∞ , temos

$$\frac{3}{2} a^4 \approx a_\infty^2 + \frac{3}{2} a_\infty^4. \quad (174)$$

Realizando os cálculos para resolver a equação (174), encontramos

$$a^2 \approx \left(\frac{2 + 3a_\infty^2}{3}\right)^{1/2} a_\infty. \quad (175)$$

Truncando os termos quadrados de a_∞ ,

$$a^2 \approx \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} a_\infty.$$

Substituindo o resultado no raio referente à região sônica, temos, finalmente,

$$\boxed{r_s \approx \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \frac{GM}{a_\infty}}, \quad (176)$$

como resposta para quando $\gamma = 5/3$.

2.7 Modelo relativístico dos discos de acreção

Nesta seção, apresentamos um ensaio baseado no artigo de Novikov & Thorne (1973), *cf.* referência [5], para o desenvolvimento das equações que descrevem a solução estacionária para a estrutura de um disco de acreção geometricamente fino ao redor de um buraco negro de Schwarzschild. Este conteúdo, diferentemente daquele apresentado na Seção 2.2, carrega as considerações relativísticas ao modelo, corrigindo alguns aspectos já revelados no disco de acreção newtoniano.

Como evidenciado ao longo do projeto, o objetivo final trata-se de construir um modelo relativístico para um disco de acreção que orbita um buraco negro de Schwarzschild. Relembramos que a métrica de Schwarzschild, discutida em certa profundidade na Seção 2.5.6, é dada por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (177)$$

onde M representa a massa do buraco negro. Daqui em diante, iremos utilizar unidades geométricas, nas quais $c = G = k_B$ (constante de Boltzmann) = 1. Nestas condições, a métrica de Schwarzschild é escrita de modo bastante sucinto,

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (178)$$

Para o desenvolvimento que faremos nas próximas páginas deste documento, é conveniente reescrevê-la num perfil que descreva as regiões do espaço-tempo mais próxima ao plano equatorial, onde efetivamente o disco reside, [5]. Para alcançar tal feito, faremos a transformação

$$z = r \cos \theta \simeq r \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right), \quad (179)$$

uma vez que $|\theta - \frac{\pi}{2}| \ll 1$ na região de interesse, [5]. Aplicando esta aproximação, que também implica em $z \ll r$, na métrica de Schwarzschild, temos

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2. \quad (180)$$

Em linhas gerais, a métrica acima descreve as propriedades do espaço-tempo na presença de um buraco negro de massa M , numa região bastante específica: próxima ao plano equatorial. Desse modo, temos uma versão simplificada da métrica, mas ainda útil na aplicação de correções relativísticas à estrutura do disco de acreção. Olhando ainda para a Eq.(180), note que a raiz quadrada do determinante do tensor métrico é $\sqrt{-g} = r$.

Como iremos supor que as partículas se movimentam em órbitas geodésicas circulares, a métrica simplificada pode fornecer algumas propriedades importantes para a elaboração das equações que governam a estrutura do disco, [5]. As grandezas que iremos necessitar são:

i) A velocidade angular da órbita,

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{M^{1/2}}{r^{3/2}}. \quad (181)$$

ii) A velocidade linear da órbita, relativa a um observador localmente não-girante,

$$\mathcal{V}_{(\phi)} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} r\Omega = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{M}{r}\right)^{1/2}. \quad (182)$$

iii) O fator de Lorentz correspondente a esta velocidade linear,

$$\gamma = (1 - \mathcal{V}_{(\phi)}^2)^{-1/2} = \left\{1 - \frac{M}{r} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2}\right\}^{-1/2}. \quad (183)$$

Um detalhe de fundamental importância quando estamos trabalhando com astrofísica, no contexto de relatividade geral, é definir bem o referencial de seus principais observadores. Em relação às órbitas circulares, é conveniente definir um referencial ortonormal atrelado a uma partícula orbitante, [5]. Nomearemos este como *referencial orbitante*, cuja base é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\hat{0}} &= \left\{1 + \frac{M}{r} \left(\frac{4M}{r} - 3\right) \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\right\}^{-1/2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{M^{1/2}}{r^{3/2}} \frac{\partial}{\partial \phi}\right) \\ \mathbf{e}_{\hat{\phi}} &= \left\{1 - \frac{M}{r} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2}\right\}^{-1/2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-3/2} \left(\frac{M}{r}\right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial t}\right] \\ \mathbf{e}_{\hat{r}} &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial r}, \quad \mathbf{e}_{\hat{z}} = \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned} \quad (184)$$

Assim como tratamos no disco de acreção newtoniano, utilizaremos leis de conservação adequadas para estudar a estrutura do disco no caso relativístico, [5]. Logo, trabalharemos, por exemplo, com a conservação de momento angular e a conservação de energia. Desse modo, visando o regime adotado para o movimento das partículas, é natural estabelecer expressões matemáticas a tais quantidades, por unidade de massa, nas órbitas geodésicas circulares. Portanto, para tais órbitas circulares, apresentamos

iv) o momento angular por unidade de massa,

$$L^\dagger(r) \equiv u_\phi(r) = r^{1/2} M^{1/2} \left(1 - \frac{3M}{r}\right)^{-1/2}. \quad (185)$$

v) a energia por unidade de massa,

$$E^\dagger(r) \equiv |u_0(r)| = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 - \frac{3M}{r}\right)^{-1/2}. \quad (186)$$

Outro aspecto importante que devemos considerar, lembrando o estudo do modelo newtoniano, refere-se à órbita circular marginalmente estável, i.e. a órbita de raio mínimo que ainda sustenta movimento circular, [5]. Como estamos trabalhando com um buraco negro de Schwarzschild, o raio que define esta região é dado por

$$r_{\text{ms}} = 6M. \quad (187)$$

Se quisermos encontrar o momento angular por unidade de massa na órbita circular marginalmente estável, basta aplicarmos a relação acima na Eq.(185). Diante tal procedimento, determinamos

$$L_{\text{ms}}^\dagger = 2\sqrt{3}M. \quad (188)$$

Por fim, devido às razões físicas por detrás do fenômeno de acreção, é necessário avaliar as componentes do tensor de cisalhamento para as geodésicas equatoriais. No referencial orbitante, sendo a quadrivelocidade $\mathbf{u} = \mathbf{e}_{\hat{t}}$, temos, [5],

$$\sigma_{\hat{r}\hat{\phi}} = \sigma_{\hat{\phi}\hat{r}} = \frac{1}{2} r \gamma^2 \frac{\partial \Omega}{\partial r} = -\frac{3}{4} \frac{M^{1/2}}{r^{3/2}} \left\{ 1 - \frac{M}{r} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} \right\}^{-1}. \quad (189)$$

Todas as outras componentes $\sigma_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ são nulas.

2.7.1 Suposições e notação

O cálculo para a estrutura geral do disco será dividido em dois segmentos: um para a estrutura radial e outro para a estrutura vertical. Antes, precisamos explicitar algumas noções essenciais ao entendimento do procedimento realizado neste relatório. Ao analisarmos a estrutura média no tempo do disco de acreção, faremos as seguintes suposições e utilizaremos as seguintes notações.

Suposição 1. A *taxa de acreção*, i.e. a quantidade de massa que move-se em direção ao buraco negro por unidade de tempo, é suposta constante, sendo aqui denotada por \dot{M}_0 . Esta suposição naturalmente implicará num estado estacionário ao disco de acreção, assim como o fizemos e observamos na abordagem newtoniana [*cf.* Seção 2.2], mas agora acrescentaremos as devidas correções relativísticas.

Suposição 2. O buraco negro possui uma geometria espaço-temporal externa na qual reside o disco de acreção, ao qual supomos uma desprezível auto-gravitação, visto que a massa do buraco negro é muito maior que a massa total do disco, i.e. $M \gg m_{\text{disco}}$. Além disso, a geometria em questão é estacionária, assintoticamente plana, possui simetria axial e simetria de reflexão em relação ao plano equatorial.

Suposição 3. O plano central do disco encontra-se no plano equatorial do buraco negro.

Suposição 4. O disco é geometricamente fino, i.e. numa distância radial r do buraco negro, a espessura $\Delta z = 2h$ do disco é muito menor do que r , onde h denota a meia-espessura do disco. Isso permite utilizar a métrica num perfil próximo àquele que descreve o plano equatorial da geometria externa.

Suposição 5. Existe um intervalo de tempo Δt que é pequeno o suficiente de modo que, nesta variação, as mudanças na geometria externa do buraco negro sejam desprezíveis, [5].

Notação 1. Utilizaremos o símbolo $\langle \rangle$ para denotar a média de alguma grandeza sobre o ângulo azimutal $\Delta\phi = 2\pi$ e sobre o tempo Δt , i.e.

$$\langle \Psi(r, z) \rangle \equiv \frac{1}{2\pi\Delta t} \int_0^{\Delta t} \int_0^{2\pi} \Psi(t, r, z, \phi) d\phi dt. \quad (190)$$

Notação 2. Definimos aqui a densidade superficial de massa de repouso,

$$\Sigma \equiv \int_{-h}^{+h} \langle \rho_0 \rangle dz, \quad (191)$$

onde ρ_0 denota a densidade volumétrica de massa de repouso, sendo esta medida num referencial local instantâneo de repouso.

O “referencial local de repouso” das partículas que formam o disco, num dado evento \mathcal{P}_0 , possui quadrivelocity $\mathbf{u}^{\text{inst}}(\mathcal{P}_0)$, onde “inst” significa “instantâneo”, [5]. Desse modo, podemos descrever a quadrivelocity como função da distância radial,

$$\mathbf{u}(r) \equiv \frac{1}{\Sigma} \int_{-h}^{+h} \langle \rho_0 \mathbf{u}^{\text{inst}} \rangle dz. \quad (192)$$

Suposição 6. No caso do disco de acreção newtoniano, supomos a existência de estresses viscosos que obedeciam uma certa relação matemática; i.e. partimos de um modelo simples, porém conceitualmente aceitável. Agora, no caso relativístico, não iremos discutir (ou explorar a natureza) do tensor de energia-momento associado ao fenômeno de acreção, [5]. Simplesmente assumiremos que este pode ser algebricamente decomposto em relação à quadrivelocity \mathbf{u} como

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 (1 + \epsilon) u^\mu u^\nu + \mathcal{S}^{\mu\nu} + u^\mu q^\nu + q^\mu u^\nu, \quad (193)$$

onde ϵ é a energia interna específica, $\mathcal{S}^{\mu\nu}$ são as componentes do tensor de estresse num referencial médio de repouso e q^μ são as componentes do quadri-vector fluxo de calor, [5].

Ambos, o tensor de estresse e o quadri-vector fluxo de calor, são ortogonais à quadrivelocity, [5], i.e.

$$u_\nu \mathcal{S}^{\mu\nu} = u^\mu \mathcal{S}^\nu{}_\mu = 0, \quad (194)$$

$$u^\mu q_\mu = q^\mu u_\mu = 0. \quad (195)$$

Suposição 7. Quando visto por uma perspectiva “macroscópica”, o gás que compõe o disco move-se em órbitas geodésicas circulares, i.e. com quadri-vector velocidade $\langle \mathbf{u} \rangle \cong \mathbf{e}_{\hat{0}}$, [5]. Neste movimento orbital, estão sobrepostas algumas condições ao escoamento. Há um fluxo radial muito pequeno, produzido pelos estresses viscosos no interior do disco, e um fluxo ainda menor na direção vertical, conforme necessário à variação da espessura, [5]. Em termos gerais, escrevemos

$$\langle \mathbf{u} \rangle = \frac{\mathbf{e}_{\hat{0}}}{[1 - (v^{\hat{r}})^2 - (v^{\hat{z}})^2]^{1/2}} + v^{\hat{r}} \mathbf{e}_{\hat{r}} + v^{\hat{z}} \mathbf{e}_{\hat{z}}, \quad (196)$$

onde devemos considerar a seguinte relação entre as velocidades,

$$|v^{\hat{z}}| \ll |v^{\hat{r}}| \ll \mathcal{V}_{(\phi)} \simeq (M/r)^{1/2}. \quad (197)$$

Ao assumirmos que a trajetória orbital do gás é muito próxima às geodésicas, estamos automaticamente propondo que a atração gravitacional do buraco negro domina o processo sobre as influências dos gradientes de pressão radial e sobre as tensões de cisalhamento, [5]. Em ordem de magnitude, a atração gravitacional é dada pelo gradiente da energia de ligação gravitacional, $\partial_r(1 - E^\dagger)$, e a aceleração devida aos cisalhamentos e gradientes de pressão é $\sim \partial_r(T^{\hat{j}\hat{k}}/\rho_0)$, [5]. Dessa maneira, desejamos que o tensor de energia-momento, no referencial de repouso do fluido, satisfaça a relação

$$\frac{T^{\hat{j}\hat{k}}}{\rho_0} \ll 1 - E^\dagger(r). \quad (198)$$

Como a energia interna específica ϵ é aproximadamente igual à $T^{\hat{j}\hat{k}}/\rho_0$, a suposição adotada implica também em

$$\epsilon \ll 1 - E^\dagger(r), \quad (199)$$

conhecida como *condição de calor específico desprezível*, [5]. Esta última desigualdade reflete um notável comportamento físico do fenômeno de acreção na conformação de discos finos. Conforme as partículas do disco espiralam lentamente em direção ao buraco negro, liberando energia gravitacional, uma quantidade desprezível da energia liberada é armazenada internamente, [5]. Portanto, quase toda a energia é transportada ou radiada para fora do disco, [5]. Em suma, a condição (199) denota a negligibilidade da energia interna em comparação à energia potencial gravitacional.

Suposição 8. O fluxo de calor no interior do disco é desprezível, exceto na direção vertical, [5], i.e.

$$\langle \mathbf{q}(r, z) \rangle \approx \langle q^z(r, z) \rangle \frac{\partial}{\partial z}. \quad (200)$$

Esta suposição é perfeitamente razoável em vista da espessura do disco.

Antes de seguirmos às equações que moldam a estrutura do disco de acreção, definiremos o referencial local médio de repouso do fluido, [5], que é quase idêntico ao referencial orbitante ortonormal,

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_{\bar{0}} &= \langle \mathbf{u} \rangle , \\
\mathbf{e}_{\bar{\phi}} &= \mathbf{e}_{\hat{\phi}} , \\
\mathbf{e}_{\bar{r}} &= \left(\mathbf{e}_{\hat{r}} + v^{\hat{r}} \mathbf{e}_{\bar{0}} \right) / \left\| \mathbf{e}_{\hat{r}} + v^{\hat{r}} \mathbf{e}_{\bar{0}} \right\| , \\
\mathbf{e}_{\bar{z}} &= \left(\mathbf{e}_{\hat{z}} + v^{\hat{z}} \mathbf{e}_{\bar{0}} - v^{\hat{r}} v^{\hat{z}} \mathbf{e}_{\bar{r}} \right) / \left\| \mathbf{e}_{\hat{z}} + v^{\hat{z}} \mathbf{e}_{\bar{0}} - v^{\hat{r}} v^{\hat{z}} \mathbf{e}_{\bar{r}} \right\| .
\end{aligned} \tag{201}$$

2.7.2 Desenvolvimento matemático

Engendradas todas as informações anteriores, podemos seguir à aplicação das leis de conservação estudadas na Seção 2.6.2. Para tal procedimento, como já expressamos anteriormente, adotaremos a abordagem compreendida por Novikov & Thorne (1973). Este desenvolvimento consiste na divisão das equações que determinam a estrutura geral do disco em dois conjuntos: um associado à estrutura radial e outro à estrutura vertical.

Estrutura radial Em relação ao primeiro destes, i.e. aquele que governa a estrutura radial, precisamos antes apresentar algumas grandezas. A primeira delas refere-se à presença do estresse viscoso entre camadas sucessivas do fluido. Para considerarmos corretamente tal contribuição que influencia radialmente a estrutura do disco, precisamos da tensão de cisalhamento integrada

$$W \equiv \int_{-h}^{+h} \langle \mathcal{S}_{\hat{\phi}\hat{r}} \rangle dz , \tag{202}$$

onde $\mathcal{S}_{\hat{\phi}\hat{r}}$ é a componente do tensor de estresse referente aos vetores $\mathbf{e}_{\hat{\phi}}$ e $\mathbf{e}_{\hat{r}}$ da base ortonormal do referencial orbitante, [5].

Outra grandeza importante neste contexto é a velocidade radial das partículas, visto que mudanças nesta intervêm em outras características do disco, e.g. densidade superficial de matéria Σ , e, efetivamente, acabam por alterar a estrutura em si. Recordando da Eq.(192), escrevemos a definição para a média, ponderada pela massa, da velocidade radial do gás,

$$\bar{v}^{\hat{r}} \equiv \frac{1}{\Sigma} \int_{-h}^{+h} \langle \rho_0 v^{\hat{r}} \rangle dz . \tag{203}$$

Por fim, adotaremos que o fluxo da energia radiante através da face superior do disco é igual àquele através da face inferior, [5],

$$F \equiv \langle T^{\hat{0}\hat{z}}(z = h) \rangle = \langle T^{\hat{0}\hat{z}}(z = -h) \rangle , \tag{204}$$

onde $T^{\hat{0}\hat{z}}$ é a componente do tensor de energia-momento referente aos vetores $\mathbf{e}_{\hat{0}}$ e $\mathbf{e}_{\hat{z}}$ da base ortonormal do referencial orbitante.

As leis que governam a estrutura radial do disco de acreção são aquelas de conservação da massa de repouso, do momento angular e de energia, [5]. Por motivos de conveniência, faremos os cálculos separadamente para cada uma das leis de conservação e, por fim, conjugaremos todos os resultados da maneira adequada.

Conservação da massa de repouso Quando tomamos, através do método da Eq.(190), a média da quantidade de massa de repouso que flui em direção ao buraco negro através de um cilindro de raio r durante o intervalo de tempo Δt , apresentado na quinta suposição [cf. 2.7.1], esta deve ser igual ao produto entre este último e a taxa de acreção, i.e. $\dot{M}_0 \Delta t$, para haja conservação da massa de repouso, [5]. Assim, podemos escrever esta lei através de uma integral de superfície,

$$\dot{M}_0 \Delta t = \int_{\mathcal{S}} \langle \rho_0 \mathbf{u} \rangle \cdot d^3 \mathfrak{S} , \tag{205}$$

onde \mathcal{S} é a superfície tridimensional $\{0 \leq t \leq \Delta t, 0 \leq \phi \leq 2\pi, -h \leq z \leq h\}$, e $d^3 \mathfrak{S}$ representa o elemento de superfície associado, [5]. A superfície em questão, quando vista apenas da perspectiva espacial, i.e. fixando a coordenada t , representa um cilindro. Desse modo, o campo vetorial \mathbf{n} , normal à superfície \mathcal{S} , é uniforme, determinado unicamente pelo versor radial $\mathbf{e}_{\hat{r}}$. Portanto, concluímos que $d^3 \mathfrak{S} = \mathbf{e}_{\hat{r}} d^3 \mathfrak{S}$. Aplicando este resultado na Eq.(205),

$$\dot{M}_0 \Delta t = \int_{\mathcal{S}} \langle \rho_0 \mathbf{u} \rangle \cdot \mathbf{e}_{\hat{r}} d^3 \mathfrak{S} = \int_{\mathcal{S}} \langle \rho_0 v^{\hat{r}} \rangle d^3 \mathfrak{S} . \tag{206}$$

Através da métrica de Schwarzschild para o plano equatorial e regiões adjacentes, i.e. Eq.(180), podemos facilmente desenvolver o elemento de superfície. Com a devida atenção, obtemos

$$d^3\mathfrak{S} = -r \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} dt d\phi dz. \quad (207)$$

Substituindo a relação acima na Eq.(206) e resolvendo as integrais triviais,

$$\begin{aligned} \dot{M}_0 \Delta t &= -r \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} \int_{-h}^{+h} \int_0^{2\pi} \int_0^{\Delta t} \langle \rho_0 v^{\hat{r}} \rangle dt d\phi dz \\ &= -2\pi r \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} \Delta t \int_{-h}^{+h} \langle \rho_0 v^{\hat{r}} \rangle dz. \end{aligned}$$

Consultando a grandeza definida na Eq.(203), e eliminando o termo Δt de ambos os lados da equação, temos

$$\dot{M}_0 = -2\pi r \Sigma \bar{v}^{\hat{r}} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2}. \quad (208)$$

A equação acima, que descreve a conservação da massa de repouso nas condições adotadas, [5], assemelha-se àquela obtida para o disco de acreção newtoniano, apesar de uma clara diferença. O termo extra que observamos na equação anterior advém diretamente da métrica de Schwarzschild e, portanto, comparando as Eqs.(10) e (208), este funciona como um fator de correção associado aos efeitos relativísticos da geometria externa ao buraco negro, [5].

Em relação às próximas leis de conservação, utilizaremos os resultados auferidos na Seção 2.6.2, na qual estudamos os conceitos fundamentais da hidrodinâmica relativística. Tendo definido previamente o tensor de energia-momento [cf. Eq.(193)], adotaremos as grandezas de interesse através das projeções que os designam e aplicaremos a condição de divergência nula, [5].

Conservação do momento angular Recordando das discussões realizadas em momentos anteriores deste relatório, a componente $T^{\mu\nu}$ denota o fluxo de μ -momento na direção determinada pela coordenada x^ν . Portanto, o momento angular é descrito pela projeção do tensor de energia-momento na direção associada à rotação em torno do eixo de simetria, [5]. Matematicamente, denotando o momento angular por L , o definiremos através do produto interno

$$L^\mu \equiv T^{\mu\nu} g_{\nu\phi} = T^\mu{}_\phi. \quad (209)$$

De maneira mais precisa, as componentes acima representam a *densidade de momento angular*, [5]. É importante atentarmos muito bem às definições realizadas para que não hajam afirmações equivocadas e/ou informações impróprias. Dito isso, seguimos à aplicação da Eq.(193) na definição anterior,

$$L^\mu = \rho_0 (1 + \epsilon) u^\mu u_\phi + \mathcal{S}^\mu{}_\phi + q^\mu u_\phi + u^\mu q_\phi. \quad (210)$$

Durante as suposições adotadas na Seção 2.7.1, chegamos à conclusão de que o calor específico é desprezível para o contexto em estudo, i.e. $\epsilon \ll 1$. Com esta relação, podemos eliminar o termo $\rho_0 \epsilon u^\mu u_\phi$ da Eq.(210), [5]. Assim, temos uma expressão adaptada e coesa, mas ainda correta, para a densidade de momento angular. Explicitamente,

$$L^\mu = \rho_0 u^\mu u_\phi + \mathcal{S}^\mu{}_\phi + q^\mu u_\phi + u^\mu q_\phi. \quad (211)$$

Finalmente, podemos aplicar a condição para conservação desta grandeza, [5],

$$\nabla_\mu L^\mu = 0. \quad (212)$$

Substituindo nesta o resultado apresentado pela Eq.(211), escrevemos

$$\nabla_\mu (\rho_0 u^\mu u_\phi) + \nabla_\mu \mathcal{S}^\mu{}_\phi + \nabla_\mu (q^\mu u_\phi) + \nabla_\mu (u^\mu q_\phi) = 0. \quad (213)$$

Em Análise Vetorial, diversas identidades acerca dos operadores diferenciais são demonstradas. Dentre estas, temos que o divergente do produto entre um campo escalar ψ e um campo vetorial \mathbf{A} pode ser expandido conforme

$$\nabla \cdot (\psi \mathbf{A}) = \psi (\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot \nabla \psi. \quad (214)$$

Tal relação é demonstrada, em primeira instância, apenas na álgebra vetorial de Gibbs, válida unicamente em espaços isomorfos ao \mathbb{R}^3 . Entretanto, é possível provar este resultado, e conseqüentemente estendê-lo, para quaisquer outras dimensões.

Uma maneira simples de verificar este fato é mostrar que a derivada covariante satisfaz a regra de Leibniz. Confirmada a assertiva anterior, dados dois vetores quaisquer \mathbf{V} e \mathbf{W} , segue-se naturalmente que

$$\nabla_\mu (V_\alpha W^\mu) = V_\alpha (\nabla_\mu W^\mu) + W^\mu (\nabla_\mu V_\alpha). \quad (215)$$

Esclarecido um pouco sobre a validade da igualdade em (215), aplicaremos-na à Eq.(213). Sendo assim, temos

$$u_\phi \nabla_\mu (\rho_0 u^\mu) + \rho_0 u^\mu (\nabla_\mu u_\phi) + \nabla_\mu \mathcal{S}^\mu_\phi + u_\phi (\nabla_\mu q^\mu) + q^\mu (\nabla_\mu u_\phi) + \nabla_\mu (u^\mu q_\phi) = 0. \quad (216)$$

Relembrando da expressão para a corrente de densidade de massa de repouso \mathbf{J} , [cf. Eq.(150)], notamos que um dos termos da Eq.(216) contém esta grandeza. Portanto, visto que devemos garantir a conservação da massa de repouso, precisamos impor $\nabla_\mu (\rho_0 u^\mu) = \nabla_\mu J^\mu = 0$, como apresentado na Seção 2.6.2 por parte das equações da hidrodinâmica relativística, [cf. Eq.(136)]. Dessa maneira, escrevemos

$$\rho_0 u^\mu (\nabla_\mu u_\phi) + \nabla_\mu \mathcal{S}^\mu_\phi + u_\phi (\nabla_\mu q^\mu) + q^\mu (\nabla_\mu u_\phi) + \nabla_\mu (u^\mu q_\phi) = 0. \quad (217)$$

Utilizando a definição da quadriaceleração, como expresso pela Eq.(141), concluímos que

$$u^\mu \nabla_\mu u_\phi = a_\phi \equiv \frac{du_\phi}{d\tau}, \quad (218)$$

onde τ representa o tempo próprio das partículas do fluido. Desse modo, temos

$$\rho_0 \frac{du_\phi}{d\tau} + \nabla_\mu \mathcal{S}^\mu_\phi + u_\phi (\nabla_\mu q^\mu) + q^\mu (\nabla_\mu u_\phi) + \nabla_\mu (u^\mu q_\phi) = 0. \quad (219)$$

Além disso, expandindo o divergente sobre as componentes \mathcal{S}^μ_ϕ do tensor de estresse viscoso, encontraremos um resultado bastante semelhante ao divergente tridimensional em coordenadas cilíndricas. Com isso, podemos reescrever a equação da conservação de momento angular na forma, [5],

$$\rho_0 \frac{du_\phi}{d\tau} + \frac{1}{r} \partial_\mu (r \mathcal{S}^\mu_\phi) + u_\phi (\nabla_\mu q^\mu) + q^\mu (\nabla_\mu u_\phi) + \nabla_\mu (u^\mu q_\phi) = 0. \quad (220)$$

Daqui em diante, os cálculos são relativamente longos e, de certo modo, monótonos. Portanto, de modo a não tornar cansativa a leitura, apenas enunciaremos os passos necessários ao procedimento, sem maiores detalhes. Partindo-se da Eq.(220), tomamos a média desta equação em relação ao tempo t e ao ângulo azimutal ϕ , i.e. através da definição em (190), e integramos este resultado sobre toda a extensão vertical do disco, [5]. Com isso, utilizando-se da *Suposição 2*, da *Suposição 8* e da relação $\langle q^z(r, h) \rangle = \langle -q^z(r, -h) \rangle = F$, obtemos

$$\int_{-h}^{+h} \langle \rho_0 \rangle \left\langle \frac{du_\phi}{d\tau} \right\rangle dz + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \int_{-h}^{+h} \langle \mathcal{S}^r_\phi \rangle dz \right) + 2 \langle u_\phi \rangle F = 0. \quad (221)$$

Expressando a componente $\langle \mathcal{S}^r_\phi \rangle$ do tensor de estresse em termos de suas componentes no referencial orbitante,

$$\langle \mathcal{S}^r_\phi \rangle = r \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(1 - \frac{3M}{r} \right)^{-1/2} \langle \mathcal{S}_{\hat{\phi}\hat{r}} \rangle, \quad (222)$$

e adotando a relação, [5],

$$\left\langle \frac{du_\phi}{d\tau} \right\rangle = \left\langle \frac{dr}{dt} \frac{\partial u_\phi}{\partial r} \right\rangle = \langle u^r \partial_r u_\phi \rangle = \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{1/2} \bar{v}^{\hat{r}} \partial_r L^\dagger, \quad (223)$$

podemos conjugar ambos os resultados à Eq.(221), reescrevendo-a no perfil abaixo

$$\left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{1/2} \bar{v}^{\hat{r}} \partial_r L^\dagger \int_{-h}^{+h} \langle \rho_0 \rangle dz + \frac{1}{r} \partial_r \left\{ r^2 \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(1 - \frac{3M}{r} \right)^{-1/2} \int_{-h}^{+h} \langle \mathcal{S}_{\hat{\phi}\hat{r}} \rangle dz \right\} + 2 \langle u_\phi \rangle F = 0. \quad (224)$$

Recordando das definições para a densidade superficial de matéria, Σ , e para a tensão de cisalhamento integrada, W , [cf. Eqs.(191) e (202)], temos

$$\left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{1/2} \Sigma \bar{v}^{\hat{r}} \partial_r L^\dagger + \frac{1}{r} \partial_r \left\{ r^2 \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(1 - \frac{3M}{r} \right)^{-1/2} W \right\} + 2L^\dagger F = 0. \quad (225)$$

Finalmente, determinamos uma equação que descreve a conservação de momento angular no disco através de parâmetros associados à estrutura do mesmo, [5]. O interessante deste resultado, intermediário ao objetivo final, é que podemos interpretar fisicamente cada um dos termos acima com uma discriminação notável. O primeiro deles caracteriza a taxa de aumento do momento angular no gás, enquanto que o segundo e o terceiro representam a taxa com a qual o momento angular é retirado do sistema devido ao cisalhamento e aos fótons emitidos, respectivamente, [5].

Para determinarmos a estrutura radial por completo, resta apenas desenvolver a equação para conservação de energia. Uma vez que obtivermos esta expressão, seguiremos a discussão ao estudo da estrutura vertical do disco de acreção.

Conservação de energia Assim como abordamos na lei de conservação anterior, precisamos relembrar da interpretação física das componentes do tensor de energia-momento, \mathbf{T} . Em relação àquelas que referem-se à energia, sabemos que a componente $T^{0\nu}$ representa o fluxo de energia na direção determinada pela coordenada x^ν . Na hidrodinâmica relativística, a equação padrão para conservação de energia é dada por, [5],

$$u_\nu \nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (226)$$

Empregando a regra de Leibniz para a derivada covariante, exibida na Eq.(215), podemos reescrever a equação anterior conforme

$$\nabla_\mu (u_\nu T^{\mu\nu}) - (\nabla_\mu u_\nu) T^{\mu\nu} = 0. \quad (227)$$

Em relação ao primeiro termo da Eq.(227), calcularemos explicitamente o produto interno entre a quadrivelocidade \mathbf{u} e o tensor de energia-momento \mathbf{T} , [5]. Através da expressão (193), temos

$$u_\nu T^{\mu\nu} = \rho_0 (1 + \epsilon) u^\mu u_\nu u^\nu + u_\nu \mathcal{S}^{\mu\nu} + u^\mu u_\nu q^\nu + q^\mu u_\nu u^\nu. \quad (228)$$

Utilizando as relações de ortogonalidade apresentadas pelas Eqs.(194) e (195), além de recordar a condição de normalização da quadrivelocidade, i.e. $u_\nu u^\nu = u^\nu u_\nu = -1$, concluímos que

$$u_\nu T^{\mu\nu} = -\rho_0 (1 + \epsilon) u^\mu - q^\mu. \quad (229)$$

Aplicando o divergente na equação imediatamente anterior, e novamente dispendo da regra de Leibniz para a derivada covariante, obtemos

$$\nabla_\mu (u_\nu T^{\mu\nu}) = -(1 + \epsilon) \nabla_\mu (\rho_0 u^\mu) - \rho_0 u^\mu \nabla_\mu \epsilon - \nabla_\mu q^\mu. \quad (230)$$

Ao olhar atento, nota-se o descarte de um termo no lado direito da Eq.(230). Invocando mais uma vez a conservação da massa de repouso, [5], i.e. $\nabla_\mu (\rho_0 u^\mu) = \nabla_\mu J^\mu = 0$, escrevemos

$$\nabla_\mu (u_\nu T^{\mu\nu}) = -\rho_0 u^\mu \nabla_\mu \epsilon - \nabla_\mu q^\mu. \quad (231)$$

Recorrendo à Eq.(141), observamos que o operador $u^\mu \nabla_\mu$ representa a derivada total em relação ao tempo próprio, i.e. $u^\mu \nabla_\mu = (d/d\tau)$. Dessa maneira, [5], temos

$$\nabla_\mu (u_\nu T^{\mu\nu}) = -\rho_0 \frac{d\epsilon}{d\tau} - \nabla_\mu q^\mu. \quad (232)$$

Agora, voltando nossa atenção ao segundo termo da Eq.(227), iremos simplesmente introduzir o resultado obtido pelo artigo de Novikov & Thorne (1973), uma vez que os conceitos teóricos por trás das chamadas *partes tensoriais irredutíveis* não foram abordados na Seção 2.6.2; ademais, este detalhamento não pertence ao escopo do projeto. Dito isso, apresentamos a equação

$$(\nabla_\mu u_\nu) T^{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} \mathcal{S}^{\mu\nu} + \frac{1}{3} \Theta \mathcal{S}^\mu{}_\mu + a_\mu q^\mu, \quad (233)$$

onde \mathbf{a} é o quadrivetor aceleração, $\boldsymbol{\sigma}$ denota o tensor de cisalhamento e Θ representa o escalar de expansão, [5]. Aplicando as igualdades (232) e (233) na Eq.(227), encontramos

$$\rho_0 \frac{d\epsilon}{d\tau} + \nabla_\mu q^\mu = -\sigma_{\mu\nu} \mathcal{S}^{\mu\nu} - \frac{1}{3} \Theta \mathcal{S}^\mu{}_\mu - a_\mu q^\mu. \quad (234)$$

De modo a estabelecermos a lei de conservação numa forma relevante à estrutura radial do disco, iremos rejeitar os termos de energia interna, $\rho_0 (d\epsilon/d\tau) \sim 0$, e do trabalho de compressão, $\frac{1}{3} \Theta \mathcal{S}^\mu{}_\mu \sim 0$, [5]. Tais condições estão garantidas pela negligibilidade do calor específico, i.e. $\epsilon \ll 1$, [5]. Além destes, eliminaremos a correção $a_\mu q^\mu$, visto que o gás move-se em órbitas geodésicas e, portanto, desaceleradas, [5]. Adotando todas as reduções explanadas, apresentamos a equação simplificada para a conservação de energia,

$$\nabla_\mu q^\mu = -\sigma_{\mu\nu} \mathcal{S}^{\mu\nu}. \quad (235)$$

A partir de agora, executaremos o mesmo procedimento realizado sobre a Eq.(220) para alcançar a Eq.(221): calcularemos a média de (235), conforme definido em (190), e integraremos este resultado sobre toda a extensão vertical do disco, [5]. Conseqüentemente, obtemos

$$\int_{-h}^{+h} \partial_z \langle q^{\hat{z}}(r, z) \rangle dz = - \int_{-h}^{+h} \langle \sigma_{\mu\nu} \rangle \langle \mathcal{S}^{\mu\nu} \rangle dz. \quad (236)$$

Empregando nesta a relação $\langle q^{\hat{z}}(r, h) \rangle = \langle -q^{\hat{z}}(r, -h) \rangle = F$, e substituindo o cisalhamento médio do gás $\langle \sigma_{\mu\nu} \rangle$ pelo cisalhamento das órbitas geodésicas equatoriais [cf. Eq.(189)], [5], temos

$$2F = -\sigma_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \int_{-h}^{+h} \langle \mathcal{S}^{\hat{\mu}\hat{\nu}} \rangle dz. \quad (237)$$

Como as únicas componentes não-nulas do tensor de cisalhamento, no referencial orbitante, são $\sigma_{\hat{\phi}\hat{r}}$ e $\sigma_{\hat{r}\hat{\phi}}$, então, ao expandirmos o somatório implícito na Eq.(237), auferimos

$$2F = -2\sigma_{\hat{\phi}\hat{r}} \int_{-h}^{+h} \langle S^{\hat{\phi}\hat{r}} \rangle dz. \quad (238)$$

Auxiliados pela Eq.(202), podemos incluir ainda a tensão de cisalhamento integrada W à expressão anterior. Logo, determinamos

$$F = -\sigma_{\hat{\phi}\hat{r}} W. \quad (239)$$

Finalmente, para evidenciar a conservação de energia em termos de variáveis mais fundamentais do sistema, aplicaremos a Eq.(189). Com isso, concluímos que

$$F = \frac{3}{4} \frac{M^{1/2}}{r^{3/2}} \left\{ 1 - \frac{M}{r} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-2} \right\}^{-1} W. \quad (240)$$

Derivamos todas as equações necessárias para desenvolver, posteriormente, as funções que regem algumas propriedades do disco de acreção relativístico e, portanto, determinam sua estrutura radial. Entretanto, as Eqs.(208), (225) e (240) não se encontram num perfil muito adequado para o procedimento ao qual estão designadas. Desse modo, é necessário desempenhar algumas manipulações entre estas para facilitar suas aplicações ulteriores, [5]. A metodologia está apresentada em momentos futuros deste relatório. Além disso, visto que as equações citadas apenas descrevem a estrutura radial do disco, ainda é necessário estudar aspectos associados à estrutura vertical do mesmo, [5].

Estrutura vertical Na Seção 2.2, quando estudamos o modelo desenvolvido por Shakura e Sunyaev, as equações para a estrutura vertical foram fundamentadas em leis de conservação, sem citar qualquer referência às propriedades pormenores do fluido que constitui o disco. Em contraposição, para estabelecermos adequadamente a estrutura vertical ao disco relativístico, necessitamos de suposições explícitas acerca dos aspectos do gás, [5]. Dessa maneira, a grande parte das incertezas e adversidades efetivas em nosso modelo residem na estrutura vertical, [5].

“No interior do disco, a escala característica na qual a estrutura vertical se altera é h , enquanto que a escala característica para mudanças na estrutura radial é $r \gg h$. Consequentemente, com grande precisão, um observador no interior do disco pode registrar variáveis locais, e.g. temperatura, densidade, etc., como funções unicamente da altura z ”, [5], página 431. Portanto, devemos realizar os cálculos num referencial local que se encontra no interior do disco. O referencial orbitante [cf. Eq.(184)], além de satisfazer tais condições, uma vez que está localizado no plano central do disco, também é ortonormal, o que torna um pouco mais flexível a análise por vir, [5]. Salva a rotação em torno do eixo definido pela direção e_z , que contribui com o incremento de forças fictícias, e.g. Coriolis e centrífuga, o referencial em questão é localmente inercial, [5]. Efetivamente, como tais forças fictícias não têm influência na estrutura vertical, podemos ignorá-las ao longo desta seção e, assim, considerar o referencial orbitante como sendo inercial, [5].

Através do princípio de equivalência, garantimos que as leis físicas no referencial orbitante são, para quaisquer valores das coordenadas t , r e ϕ , as mesmas da relatividade restrita, [5]. Além disso, recordando a condição de calor específico desprezível, $\epsilon \sim (T_{jk}/\rho_0) \ll 1$, concluímos que as leis da relatividade restrita assumem, neste caso, as suas respectivas formas newtonianas, [5]. O farão, pelo menos, se utilizarmos o valor corrigido pela métrica de Schwarzschild [cf. Eq.(180)] para a aceleração gravitacional de maré,

$$g = z \left(R^{\hat{z}}_{\hat{0}\hat{z}\hat{0}} \right), \quad (241)$$

onde $R^{\hat{z}}_{\hat{0}\hat{z}\hat{0}}$ representa uma das componentes do tensor de Riemann, escrita na base ortonormal do referencial orbitante, [5]. A contribuição desta grandeza é, precisamente, aquilo que comprime o disco de acreção em seu formato de “panqueca”, [5]. Para a métrica de Schwarzschild que descreve o plano equatorial e regiões próximas, esta componente é dada conforme

$$R^{\hat{z}}_{\hat{0}\hat{z}\hat{0}} = \frac{M}{r^3} \gamma^2 = \frac{M}{r^3} \left\{ 1 - \frac{M}{r} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-2} \right\}^{-1}. \quad (242)$$

Descreveremos a estrutura vertical a partir de algumas funções da altura, as quais iremos assumir serem, de fato, as médias respectivas de cada grandeza, tomadas de acordo com a definição (190). Ao todo, apresentaremos 6 equações que correlacionam as funções de 6 características distintas do disco à estrutura vertical.

A primeira delas se trata da equação de equilíbrio hidrostático vertical, a condição local para que haja um balanço entre as forças externas sobre o fluido e o gradiente de pressão do mesmo,

$$\frac{dp}{dz} = \rho_0 g, \quad (243)$$

onde p denota a pressão no gás. Substituindo a relação (241) na equação acima, e utilizando o valor explícito para a componente desejada do tensor de Riemann, Eq.(242), obteremos o seguinte resultado

$$\frac{dp}{dz} = \rho_0 \frac{M}{r^3} z \left\{ 1 - \frac{M}{r} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-2} \right\}^{-1}. \quad (244)$$

Pensando nos fins práticos, a equação diferencial (244) pode ser aproximada para

$$p \approx \rho_0 \frac{M}{r^3} h^2 \left\{ 1 - \frac{M}{r} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-2} \right\}^{-1}, \quad (245)$$

e, portanto, adotaremos esta última expressão para derivarmos as soluções analíticas à estrutura do disco relativístico, [5].

Nossa segunda avaliação está relacionada ao modelo que iremos estabelecer para as fontes de viscosidade no fluido, uma vez que estas geram as condições físicas que proporcionam o fenômeno de acreção, [1, 2, 3, 4, 5]. Iremos considerar a mesma expressão introduzida por Shakura & Sunyaev (1973) para o tensor de estresse,

$$\mathcal{S}_{\hat{\phi}\hat{r}} = \alpha p, \quad (246)$$

onde α é uma constante adimensional, fixada para valores entre 0 e próximos a 1. Outros detalhes primorosos sobre tal parâmetro estão presentes na Seção 2.2 e, evidentemente, no próprio artigo de onde origina-se esta escolha, [cf. referência [3]].

Naturalmente, a estrutura vertical também é definida pelas circunstâncias associadas à energia do gás. Desse modo, precisamos estabelecer as equações para a geração e para o transporte da energia pelo fluido, considerando unicamente, em ambos os casos, as contribuições verticais destes fenômenos, [5]. Para a produção de energia, recorreremos à Eq.(235), de onde extraímos a igualdade

$$\frac{dq^{\hat{z}}}{dz} = -2\sigma_{\hat{\phi}\hat{r}}\mathcal{S}_{\hat{\phi}\hat{r}}. \quad (247)$$

Aplicando as expressões (189) e (246), e integrando a equação ao longo de z , iremos obter exatamente o resultado em (240). Logo, esta equação da estrutura vertical automaticamente garante que uma das equações para a estrutura radial é satisfeita, [5]. Quanto ao transporte de energia, iremos supor que a transferência radiativa domina sobre o transporte turbulento de energia, de maneira que

$$bT^4 = \bar{\kappa}\Sigma F, \quad (248)$$

onde b é a constante de Stefan-Boltzmann, T denota a temperatura, $\bar{\kappa}$ representa a opacidade do gás (a qual trataremos em breve) e F é o fluxo de energia radiante sobre as faces do disco, [5].

Outra consideração que precisamos realizar sobre as características do fluido consiste em definir uma equação de estado para o mesmo. Neste ponto, seguiremos a configuração adotada por Novikov & Thorne (1973). Como a pressão turbulenta não pode exceder a pressão térmica e, além disso, estamos desconsiderando a presença de campos magnéticos, ignoraremos tais contribuições, de modo que a pressão total p seja dada conforme

$$p = p^{(\text{rad})} + p^{(\text{gás})}, \quad (249)$$

onde $p^{(\text{rad})} = \frac{1}{3}bT^4$ é a pressão de radiação e $p^{(\text{gás})} = \rho_0(T/m_p)$ é a pressão devido ao aspecto natural do fluido, [5]. Na equação para $p^{(\text{gás})}$, a constante m_p representa a massa do próton, visto que estamos modelando o fluido como sendo formado exclusivamente por gás hidrogênio, [5].

Por fim, resta designar uma equação para a opacidade no disco. A maior contribuição para esta grandeza surge da absorção livre-livre, [5]; em relação à qual, temos

$$\bar{\kappa}_{ff} = (0.64 \cdot 10^{23}) \rho_0 T^{-7/2} \left[\frac{cm^2}{g} \right]. \quad (250)$$

Além disso, temos um contingente associado à composição do gás, o qual supomos ser hidrogênio. Neste contexto, já apresentamos o valor $\bar{\kappa}_{es} = 0.40 \left[\frac{cm^2}{g} \right]$ para a opacidade do hidrogênio em relação ao espalhamento de elétrons. Por fim, ajustamos a opacidade total no disco através da soma de ambas as contribuições, [5], i.e.

$$\bar{\kappa} = \bar{\kappa}_{ff} + \bar{\kappa}_{es}. \quad (251)$$

Vale ressaltar que, nas soluções analíticas, apresentaremos as funções para a profundidade óptica $\tau = \bar{\kappa}\Sigma$, e não para a opacidade em si, [5].

Enfim, consumamos o procedimento inicial de dedução das principais equações que governam a estrutura do disco de acreção geometricamente fino, necessárias à construção de seu modelo relativístico. Com o auxílio das Eqs.(208), (225), (240),

(245), (246), (248), (249) e (251), através de sucessivas manipulações e passagens algébricas, somos capazes de encontrar as soluções analíticas que determinam a estrutura geral do disco de acreção, com as devidas correções relativísticas, [5].

Apesar de não apresentarmos os longos e tediosos passos que nos levam às funções explícitas para as diversas características do disco em função da distância radial r , descreveremos algumas passagens que, embora sejam fundamentais, não são tão óbvias quanto as outras.

Primeiro, conjugaremos as Eqs.(208) e (225), [5]. Este método resulta na seguinte equação

$$-\frac{\dot{M}_0}{2\pi r} \partial_r L^\dagger + \frac{1}{r} \partial_r \left\{ r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 - \frac{3M}{r}\right)^{-1/2} W \right\} + 2L^\dagger F = 0. \quad (252)$$

Multiplicando a igualdade acima por r , e utilizando o fato de que a derivada é um operador linear, escrevemos

$$\partial_r \left\{ -\frac{\dot{M}_0}{2\pi} L^\dagger + r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 - \frac{3M}{r}\right)^{-1/2} W \right\} + 2rL^\dagger F = 0. \quad (253)$$

Aplicando nesta a relação (240), obtemos a equação diferencial, [5],

$$\partial_r \left\{ -\frac{\dot{M}_0}{2\pi} L^\dagger + r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 - \frac{3M}{r}\right)^{-1/2} W \right\} + \frac{3}{2} \frac{M^{1/2}}{r^{1/2}} \left\{ 1 - \frac{M}{r} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} \right\}^{-1} L^\dagger W = 0. \quad (254)$$

A resolução desta última dá-se através de uma integração direta em relação à distância radial r , porém, esta operação acarreta no surgimento de uma constante de integração. A constante em questão deve ser fixada com a assistência de alguma condição de contorno, [5]. Olhando para os aspectos físicos da acreção, notamos que, quando o gás alcança a órbita circular marginalmente estável (ISCO; do inglês, *innermost stable circular orbit*), i.e. $r = r_{\text{ms}}$, as partículas “fogem” da estrutura de disco e rapidamente espiralam em direção ao buraco negro, [5]. Como resultado, a densidade do fluido na região $r < r_{\text{ms}}$ é praticamente zero quando comparada com os valores assumidos no regime $r > r_{\text{ms}}$, [5]. Isso nos permite concluir que não há qualquer estresse viscoso agindo sobre a superfície que reside na ISCO e, portanto, a tensão de cisalhamento integrada W deve ser nula em $r = r_{\text{ms}}$, [5]. A solução que satisfaz esta condição de contorno é

$$W = \frac{\dot{M}_0}{2\pi} \frac{M^{1/2}}{r^{3/2}} \mathfrak{F}, \quad (255)$$

onde \mathfrak{F} é uma nova função da distância radial r , a qual, por claras razões de conveniência, definimos para um extenso termo que surge naturalmente da solução da equação diferencial (254). Sua definição segue abaixo

$$\mathfrak{F} \equiv \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left\{ 1 - \left(\frac{6M}{r}\right)^{1/2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \ln \left[\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right) \left(\frac{r^{1/2} + \sqrt{3M}}{r^{1/2} - \sqrt{3M}}\right) \right] \right\}. \quad (256)$$

Aplicando a função $W(r)$, apresentada na Eq.(255), em (240), de modo a escrever o fluxo de energia radiante F unicamente em função da distância radial em relação ao buraco negro, r , obtemos

$$F = \frac{3\dot{M}_0}{8\pi} \frac{M}{r^3} \left\{ 1 - \frac{M}{r} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} \right\}^{-1} \mathfrak{F}. \quad (257)$$

Por fim, substituindo as Eqs.(225) e (240) respectivamente pelas Eqs.(255) e (257) no sistema enunciado anteriormente, podemos seguir com as passagens algébricas mais elementares para obter as soluções analíticas à estrutura do disco de acreção.

2.7.3 Soluções analíticas

Na Seção 2.2.3, procedemos à apresentação das soluções analíticas do modo como é feito em Shakura & Sunyaev (1973), *cf.* referência [3], dividindo o disco em três regiões bastante características. No artigo de Novikov & Thorne (1973), *cf.* referência [5], esta metodologia é analogamente empregada. Portanto, o disco relativístico também pode ser dividido em 3 regiões. São estas:

a) Uma região interna, para valores pequenos de r , na qual a pressão de radiação prevalece sobre a pressão do gás, e a opacidade é predominantemente devido ao espalhamento de elétrons.

b) Uma região intermediária, para valores um pouco maiores de r , na qual a pressão do gás passa a ser dominante, mas a opacidade ainda surge do espalhamento de elétrons.

c) Uma região externa, para grandes valores de r , na qual a pressão do gás domina a estrutura e a maior contribuição para a opacidade é determinada pela absorção livre-livre.

A seguir, apresentamos as soluções analíticas ao disco de acreção relativístico, para cada uma das regiões enunciadas. Tais funções descrevem o comportamento de diversas propriedades neste objeto astrofísico em função de r , a distância em relação ao buraco negro, e portanto, acabam por determinar sua estrutura.

Para a região **a**), onde $p^{(\text{rad})} \gg p^{(\text{gás})}$ e $\bar{\kappa}_{es} \gg \bar{\kappa}_{ff}$, obtemos

$$F = \frac{3}{8\pi} r^{-3} \dot{M}_0 M \left\{ 1 - \frac{M}{r} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-2} \right\}^{-1} \mathfrak{F}$$

$$\Sigma = (50\pi) \alpha^{-1} r^{3/2} \dot{M}_0^{-1} M^{-1/2} \left\{ 1 - \frac{M}{r} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-2} \right\} \mathfrak{F}^{-1}$$

$$h = \left(\frac{1}{10\pi} \right) \dot{M}_0 \mathfrak{F}$$

$$\rho_0 = (250\pi^2) \alpha^{-1} r^{3/2} \dot{M}_0^{-2} M^{-1/2} \left\{ 1 - \frac{M}{r} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-2} \right\} \mathfrak{F}^{-2}$$

$$T = \left(\frac{15}{2b} \right)^{1/4} \alpha^{-1/4} r^{-3/8} M^{1/8}$$

$$\tau_{es} = (20\pi) \alpha^{-1} r^{3/2} \dot{M}_0^{-1} M^{-1/2} \left\{ 1 - \frac{M}{r} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-2} \right\} \mathfrak{F}^{-1}$$

$$p = \left(\frac{5}{2} \right) \alpha^{-1} r^{-3/2} M^{1/2}$$

Para a região **b**), onde $p^{(\text{gás})} \gg p^{(\text{rad})}$ e $\bar{\kappa}_{\text{es}} \gg \bar{\kappa}_{ff}$, determinamos as funções

$$F = \frac{3}{8\pi} r^{-3} \dot{M}_0 M \left\{ 1 - \frac{M}{r} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-2} \right\}^{-1} \mathfrak{F}$$

$$\Sigma = \left[\left(\frac{20\pi b m_p^4}{3} \right) \left(\frac{3}{40\pi^2 b m_p^4} \right)^{4/5} \right] \alpha^{-4/5} r^{-3/5} \dot{M}_0^{3/5} M^{1/5} \left\{ 1 - \frac{M}{r} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-2} \right\}^{1/5} \mathfrak{F}^{3/5}$$

$$h = \left(\frac{3}{40\pi^2 b m_p^4} \right)^{1/10} \alpha^{-1/10} r^{21/20} \dot{M}_0^{1/5} M^{-7/20} \left\{ 1 - \frac{M}{r} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-2} \right\}^{2/5} \mathfrak{F}^{1/5}$$

$$\rho_0 = \left[\left(\frac{10\pi b m_p^4}{3} \right) \left(\frac{3}{40\pi^2 b m_p^4} \right)^{7/10} \right] \alpha^{-7/10} r^{-33/20} \dot{M}_0^{2/5} M^{11/20} \left\{ 1 - \frac{M}{r} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-2} \right\}^{-1/5} \mathfrak{F}^{2/5}$$

$$T = \left(\frac{3 m_p}{40\pi^2 b} \right)^{1/5} \alpha^{-1/5} r^{-9/10} \dot{M}_0^{2/5} M^{3/10} \left\{ 1 - \frac{M}{r} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-2} \right\}^{-1/5} \mathfrak{F}^{2/5}$$

$$\tau_{\text{es}} = \left[\left(\frac{8\pi b m_p^4}{3} \right) \left(\frac{3}{40\pi^2 b m_p^4} \right)^{4/5} \right] \alpha^{-4/5} r^{-3/5} \dot{M}_0^{3/5} M^{1/5} \left\{ 1 - \frac{M}{r} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-2} \right\}^{1/5} \mathfrak{F}^{3/5}$$

$$p = \left[\left(\frac{10\pi b m_p^4}{3} \right) \left(\frac{3}{40\pi^2 b m_p^4} \right)^{9/10} \right] \alpha^{-9/10} r^{-51/20} \dot{M}_0^{4/5} M^{17/20} \left\{ 1 - \frac{M}{r} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-2} \right\}^{-2/5} \mathfrak{F}^{4/5}$$

Para a região **c**), onde $p^{(\text{gás})} \gg p^{(\text{rad})}$ e $\bar{\kappa}_{ff} \gg \bar{\kappa}_{es}$, as soluções auferidas são

$$\begin{aligned}
F &= \frac{3}{8\pi} r^{-3} \dot{M}_0 M \left\{ 1 - \frac{M}{r} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-2} \right\}^{-1} \mathfrak{F} \\
\Sigma &= \left[\left(\frac{25b}{4 \cdot 10^{23}} \right)^{1/2} \left(\frac{3 \cdot 10^{21}}{2\pi^3 b} \right)^{2/5} m_p^{3/4} \right] \alpha^{-4/5} r^{-9/16} \dot{M}_0^{6/5} M^{3/4} \left\{ 1 - \frac{M}{r} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-2} \right\}^{-7/20} \mathfrak{F}^{6/5} \\
h &= \left(\frac{3 \cdot 10^{21}}{2\pi^3 b m_p^{15/2}} \right)^{1/20} \alpha^{-1/10} r^{9/8} \dot{M}_0^{3/20} M^{-3/8} \left\{ 1 - \frac{M}{r} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-2} \right\}^{17/40} \mathfrak{F}^{3/20} \\
\rho_0 &= \left[\left(\frac{25b}{16 \cdot 10^{23}} \right)^{1/2} \left(\frac{3 \cdot 10^{21}}{2\pi^3 b} \right)^{7/20} m_p^{9/8} \right] \alpha^{-7/10} r^{-27/16} \dot{M}_0^{21/20} M^{9/8} \left\{ 1 - \frac{M}{r} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-2} \right\}^{-31/40} \mathfrak{F}^{21/20} \\
T &= \left(\frac{3 \cdot 10^{21} m_p^{5/2}}{2\pi^3 b} \right)^{1/10} \alpha^{-1/5} r^{-3/4} \dot{M}_0^{3/10} M^{1/4} \left\{ 1 - \frac{M}{r} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-2} \right\}^{-3/20} \mathfrak{F}^{3/10} \\
\tau_{ff} &= \left[2b \left(\frac{3 \cdot 10^{21} m_p^{5/2}}{2\pi^3 b} \right)^{2/5} \right] \alpha^{-4/5} r^{3/8} \dot{M}_0^{6/5} M \left\{ 1 - \frac{M}{r} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-2} \right\}^{-3/5} \mathfrak{F}^{6/5} \\
p &= \left[\frac{1}{4\pi} \left(\frac{3 \cdot 10^{21}}{2\pi^3 b m_p^{15/2}} \right)^{-1/20} \right] \alpha^{-9/10} r^{-21/8} \dot{M}_0^{17/20} M^{7/8} \left\{ 1 - \frac{M}{r} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-2} \right\}^{-17/40} \mathfrak{F}^{23/20}
\end{aligned}$$

2.7.4 Análise das soluções

Agora, seguiremos aos ensaios quantitativos dessas soluções. Este procedimento serve como um método para avaliar se as ordens de grandeza estão consistentes com os valores fornecidos pela literatura e com aqueles apresentados pelos artigos de referência como fruto de estudos observacionais.

Para efeito de comparação entre os dois modelos, utilizaremos os mesmos parâmetros adotados na análise do disco de acreção newtoniano,

$$M = 10M_\odot, \quad \dot{M}_0 = 10^{-8} \left[\frac{M_\odot}{\text{ano}} \right], \quad \alpha = 0.5,$$

onde M_\odot representa uma unidade de massa solar. As motivações que estão por trás da escolha destes valores, bem como a coerência destes com a realidade, foram expostas na Seção 2.2.4. Para maiores detalhes, sugerimos a consulta aos próprios artigos de Shakura & Sunyaev (1973) e Novikov & Thorne (1973); respectivamente, referências [3] e [5]. Outros complementos à discussão são as referências [1], [2] e [4]. Agora, precisamos definir os intervalos de r que delimitam cada uma das três regiões do disco.

A transição entre as regiões **a**) e **b**) do disco relativístico ocorre quando as contribuições da pressão do gás à estrutura são comparáveis àquelas da pressão de radiação, i.e. $p^{(\text{gás})} \sim p^{(\text{rad})}$, [5]. Igualando as funções $p(r)$ obtidas para cada uma destas regiões e isolando o termo livre de r , obtemos o raio r_{ab} , que denota a fronteira entre as regiões interna e intermediária,

$$r_{ab} = \left[\left(\frac{4\pi b m_p^4}{3} \right)^{20/21} \left(\frac{3}{40\pi^2 b m_p^4} \right)^{6/7} \right] \alpha^{2/21} \dot{M}_0^{16/21} M^{1/3} \left\{ 1 - \frac{M}{r_{ab}} \left(1 - \frac{2M}{r_{ab}} \right)^{-2} \right\}^{-8/21} \mathfrak{F}^{16/21}. \quad (258)$$

Aplicando nesta função os parâmetros adotados e resolvendo para r_{ab} , obtemos

$$r_{ab} = 1.440 \cdot 10^7 \text{ [cm]} .$$

De maneira semelhante, calcularemos o raio r_{bc} , definido como aquele que representa a borda entre as regiões **b**) e **c**), observando a condição física que as diferenciam. No caso destas, a transição se dá quando os fenômenos associados à

opacidade possuem mesma relevância, i.e. $\tau_{ff} \sim \tau_{es}$, [5]. Assim, igualando as funções $\tau(r)$, respectiva a cada região, temos uma expressão para r_{bc} ,

$$r_{bc} = \left[\left(\frac{4\pi m_p^4}{3} \right)^{40/39} \left(\frac{3}{40\pi^2 b m_p^4} \right)^{32/39} \left(\frac{3 \cdot 10^{21} m_p^{5/2}}{2\pi^3 b} \right)^{-16/39} \right] M_0^{-3/5} M^{-4/5} \left\{ 1 - \frac{M}{r_{bc}} \left(1 - \frac{2M}{r_{bc}} \right)^{-2} \right\}^{4/5} \mathfrak{F}^{-3/5}. \quad (259)$$

Aplicando os parâmetros adotados e tentando resolver para r_{bc} , não é possível determinar um valor real que satisfaça tal equação. Fisicamente, isso indica que, para as condições adotadas, i.e. para os parâmetros escolhidos, a opacidade é equitativamente fornecida pela absorção livre-livre e pelo espalhamento de elétrons nas distâncias $r > 10^7$. Portanto, não haveria uma separação clara entre as supostas regiões **b**) e **c**), segundo alerta a referência [5] para alguns casos.

Por fim, resta calcular o valor numérico para o raio de Schwarzschild nos parâmetros adotados, uma vez que este delimita o término interno do disco. Como não alteramos a massa do buraco negro em relação às estimativas para o modelo newtoniano, então o raio de Schwarzschild, essencialmente, também não muda,

$$r_{ms} = 8.864 \cdot 10^6 \text{ [cm]} .$$

Em relação ao disco newtoniano, observamos que as fronteiras entre as regiões do modelo relativístico foram, em vista das dimensões astrofísicas típicas, levemente alteradas. Entretanto, ainda que aplicando as mesmas condições, pudemos observar uma drástica alteração na estrutura relativisticamente correta: o “desaparecimento” da região **c**). Este resultado advém das correções promovidas pela análise mais profunda que empregamos, i.e. através da implementação dos conceitos de relatividade geral e da hidrodinâmica relativística. Assim, apesar de obtermos estimativas melhores, as soluções inviabilizaram a existência da região mais externa para os parâmetros investidos. Em suma, quanto à delimitação das bordas entre cada uma das regiões do disco, tais correções apresentam mudanças extremas, mas fica claro que o modelo relativístico prevê resultados mais precisos quanto à realidade.

Devido à alteração radical na estrutura, optamos por analisar a ordem de grandeza das propriedades em distâncias diferentes daquelas adotadas na Seção 2.2.4. As escolhas são:

$$r_a = 9 \cdot 10^6 \text{ [cm]} , \quad r_b = 6 \cdot 10^8 \text{ [cm]} .$$

Para a região **a**), interna, a uma distância $r_a = 9 \cdot 10^6$ [cm] do buraco negro, temos

$$F \approx 3.034 \cdot 10^{21} \left[\frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s}} \right]$$

$$\Sigma \approx 4.319 \cdot 10^3 \left[\frac{\text{g}}{\text{cm}^2} \right]$$

$$h \approx 4.093 \cdot 10^4 \text{ [cm]}$$

$$\rho_0 \approx 5.28 \cdot 10^{-2} \left[\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \right]$$

$$T \approx 1.534 \cdot 10^7 \text{ [K]}$$

$$\tau_* \approx 1.728 \cdot 10^{-3}$$

$$\left(\frac{p^{(gás)}}{p^{(rad)}} \right) \approx 0.7811 \left[\frac{\text{dyne}}{\text{dyne}} \right]$$

Para a região **b**), externa, a uma distância $r_b = 6 \cdot 10^8$ [cm] do buraco negro, temos

$$F \approx 1.213 \cdot 10^{16} \left[\frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s}} \right]$$

$$\Sigma \approx 1.372 \cdot 10^2 \left[\frac{\text{g}}{\text{cm}^2} \right]$$

$$h \approx 4.157 \cdot 10^6 \text{ [cm]}$$

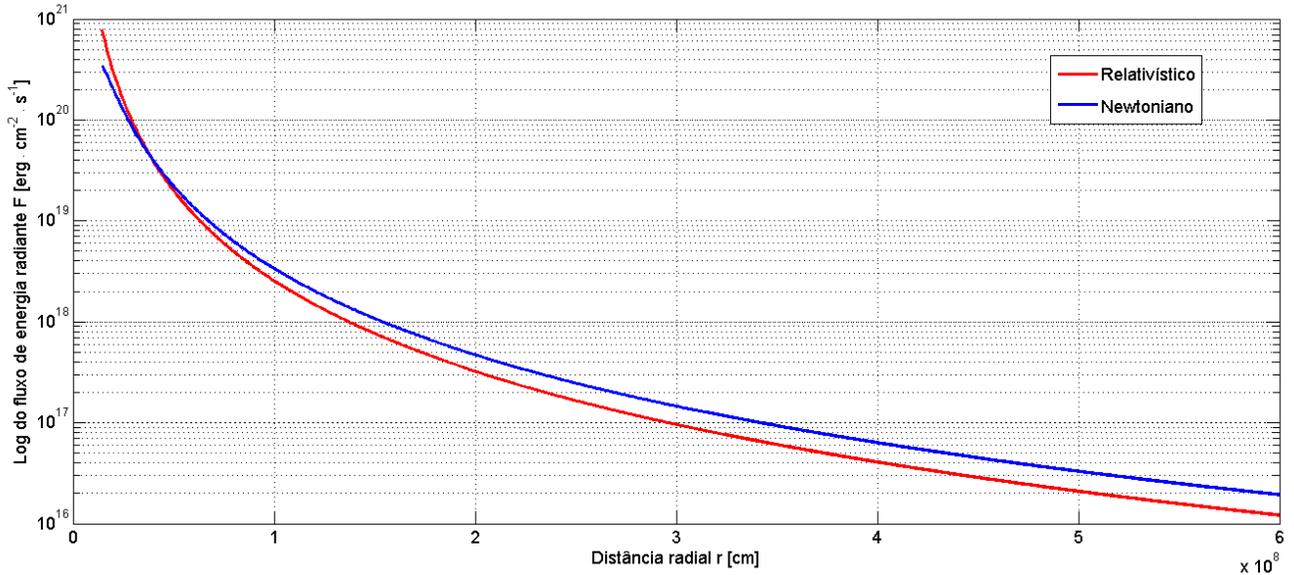
$$\rho_0 \approx 1.602 \cdot 10^{-5} \left[\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \right]$$

$$T \approx 1.073 \cdot 10^5 \text{ [K]}$$

$$\tau_* \approx 54.874$$

$$\left(\frac{p^{(gás)}}{p^{(rad)}} \right) \approx 1.058 \cdot 10^5 \left[\frac{\text{dyne}}{\text{dyne}} \right]$$

Nas estimativas acima, evidencia-se o mesmo comportamento apresentado pelo disco newtoniano e, portanto, exibe um desempenho já esperado, i.e. de acordo com estudos prévios. Estes detalhes nos fornecem algum respaldo quanto à validade do desenvolvimento matemático realizado para modelar o disco e, eventualmente, encontrar as soluções analíticas para sua estrutura. Todavia, para confirmarmos que, de fato, o disco de acreção relativístico apresenta um perfil físico consistente, é necessário plotar as funções obtidas na Seção 2.7.3. Com auxílio do software *MATLAB*, plotamos as funções que descrevem a evolução de cada uma das propriedades do disco conforme aumentamos a distância radial. Os resultados deste processo estão retratados nos gráficos numerados de 2 a 8, os quais serão devidamente examinados ao longo das próximas linhas.



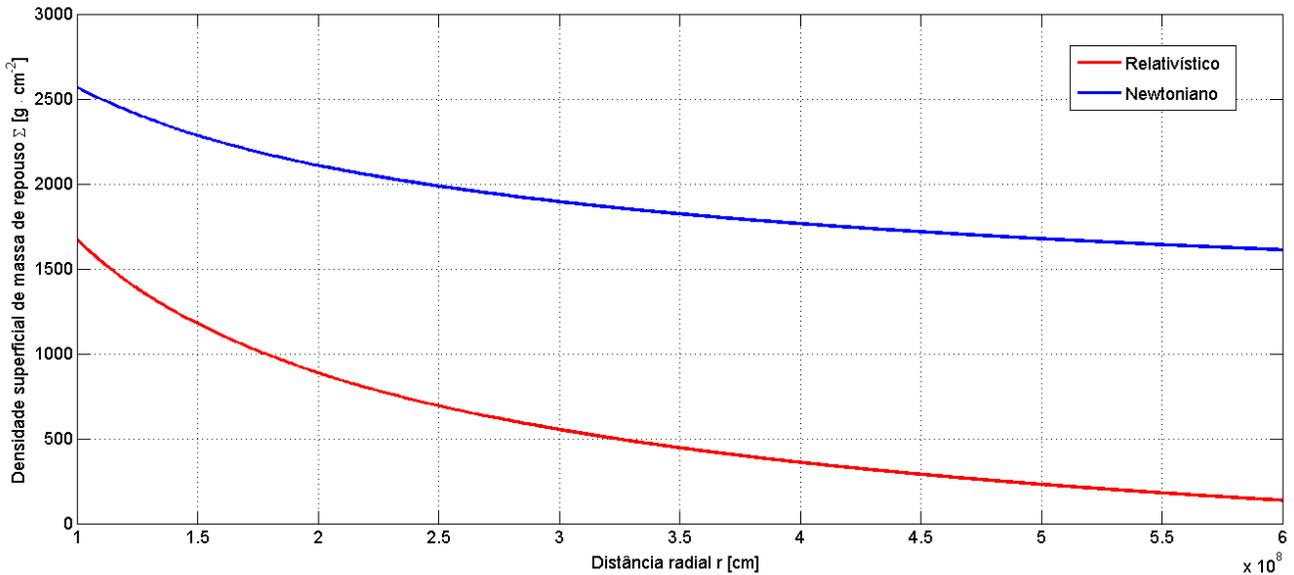
(Gráfico 2. Fluxo de energia radiante F nas faces do disco, com escala logarítmica, em função da distância radial r .)

Para uma melhor apresentação do comportamento associado ao fluxo de energia radiante através das faces do disco de acreção, resolvemos plotar o eixo vertical em escala logarítmica. Esta escolha também permite uma melhor verificação das ordens de magnitude para esta grandeza.

Observando o Gráfico 2, vemos que o fluxo de energia radiante decresce rapidamente com o distanciamento do objeto central em ambos os modelos. Apesar de apresentarem muitas semelhanças, precisamos discorrer principalmente sobre suas

diferenças. Para regiões mais afastadas, o disco newtoniano nos apresenta um maior fluxo de energia radiante. Entretanto, conforme nos aproximamos do buraco negro, esta diferença vai diminuindo até um ponto no qual o disco de acreção relativístico ultrapassa o newtoniano; indicando que este considera certos aspectos, que influenciam diretamente na estrutura do disco, não contabilizados pelo modelo newtoniano. De certo modo, isso era esperado, pois temos razões para crer que o disco relativístico promove correções mais significativas nas regiões internas, uma vez que estas residem num âmbito de maior deformação na geometria externa do espaço-tempo. Assim, é natural imaginar que os aperfeiçoamentos promovidos pela abordagem mais realista se encontrarão em raios orbitais mais próximos da *ISCO*.

Estes resultados corroboram com os artigos de referência, mas ainda devemos questionar se há sentido lógico nestas funções. Analisando pelos aspectos físicos, esta conclusão é perfeitamente plausível, pois, como vimos nas discussões acerca do modelo newtoniano, o estresse viscoso tende a aumentar conforme nos direcionamos para regiões no disco que se encontram mais próximas do buraco negro. Com isso, esperamos que a temperatura também aumente e, dessa maneira, promova um fluxo maior de radiação. Para verificarmos a validade destas expectativas, seguimos à exibição dos próximos gráficos.

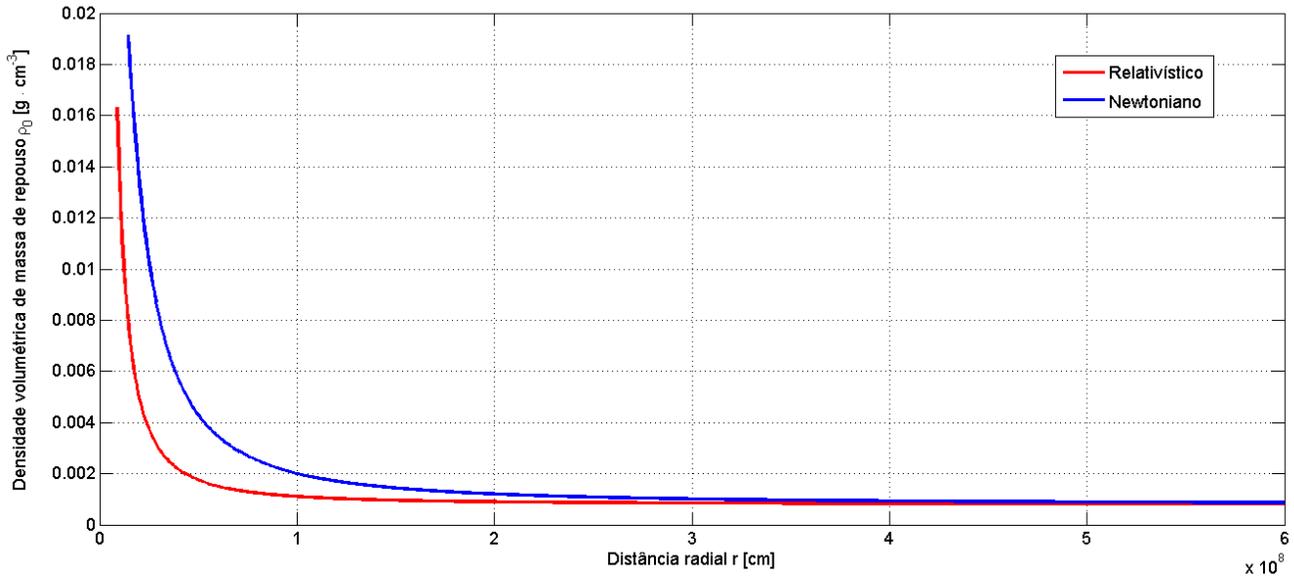


(Gráfico 3. Densidade superficial de matéria Σ do disco em função do raio orbital r .)

Como podemos ver no Gráfico 3, os discos apresentam uma maior concentração de massa por unidade de área quanto mais próximo estamos do buraco negro. Desse modo, as camadas que residem em regiões mais exteriores são superficialmente menos densas. Considerando a discussão do parágrafo anterior quanto ao perfil do estresse viscoso no disco, o comportamento apresentado pela densidade superficial Σ promove um passo em direção à confirmação destas suspeitas.

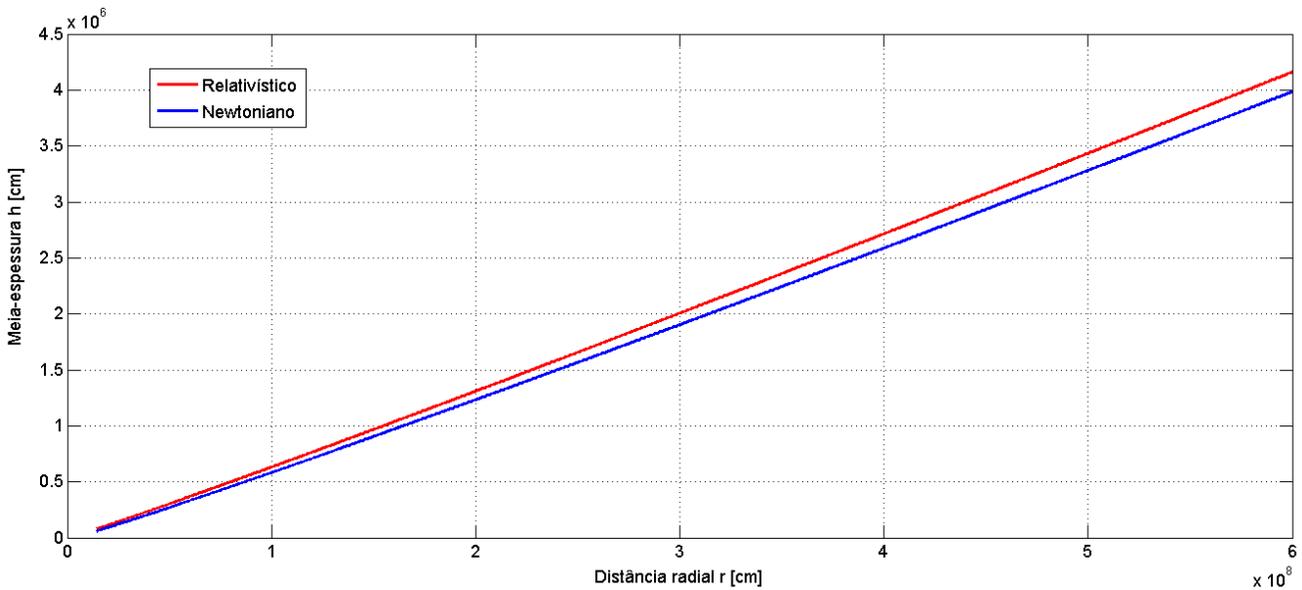
Apesar das funções apresentarem um mesmo perfil, é necessário discutir sobre suas distinções; as quais são bastante evidentes para esta grandeza. Observando com cautela o Gráfico 3, notamos que a diferença na densidade superficial Σ entre ambos os modelos diminui conforme nos deslocamos para distâncias radiais menores; novamente, em razão das correções associadas à curvatura do espaço-tempo nestas regiões. De qualquer maneira, visto que um modelo lida com gravitação clássica e o outro com relatividade geral, os cálculos para a influência gravitacional de maré sobre o disco são muito diferentes. Logo, como a própria contribuição física que achata o gás no formato de disco é determinada de maneira distinta em cada caso, esperamos observar certas particularidades na espessura do disco, o que afetaria diretamente as densidades de massa de repouso.

Considerando que a densidade superficial Σ cresce à medida que nos aproximamos do buraco negro, inferimos que o mesmo ocorra para a densidade volumétrica de massa de repouso, ρ_0 . Além disso, presumimos que a proporção desta quantidade entre os dois modelos também seja semelhante àquela observada no Gráfico 3.



(Gráfico 4. Densidade volumétrica de massa de repouso ρ_0 em função da distância r .)

O raciocínio desenvolvido nos últimos dois parágrafos mostra-se bastante preciso quando finalmente avaliamos o Gráfico 4. Para as condições adotadas, o modelo relativístico apresenta, em geral, uma menor densidade volumétrica de massa de repouso ρ_0 , porém, em regiões muito mais próximas do buraco negro, notamos que há uma tendência em direção à diminuição desta discrepância. Assim, tal como vemos no modelo newtoniano, os resultados para o modelo relativístico parecem demonstrar um excelente grau de confiabilidade.

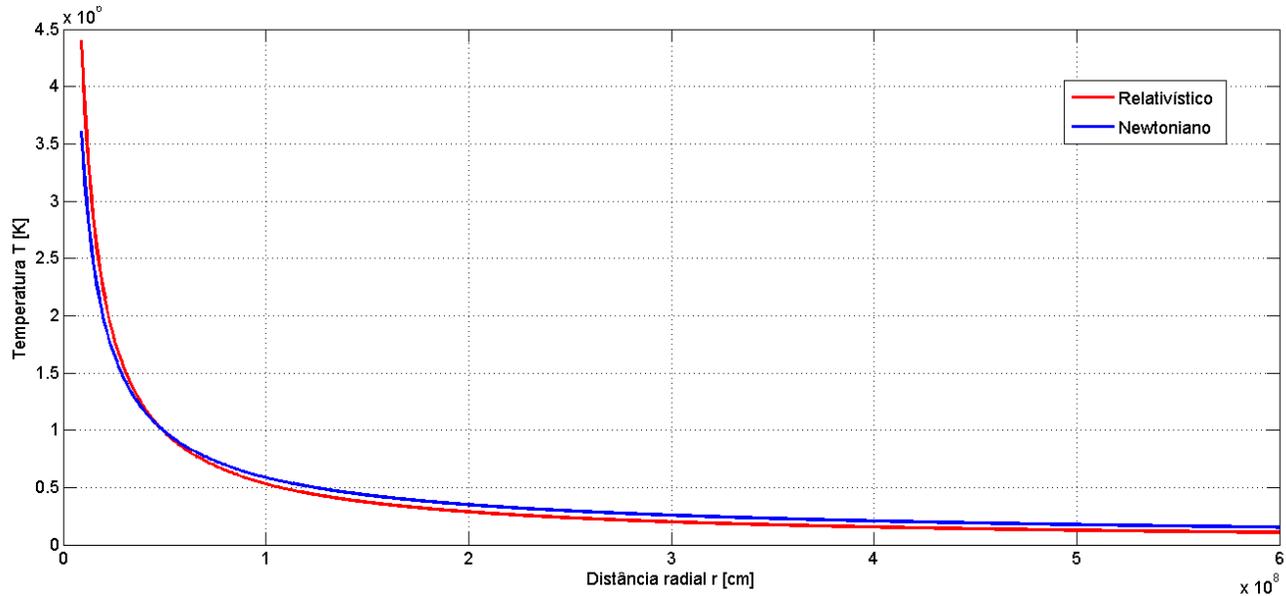


(Gráfico 5. Meia-espessura h do disco em função do raio r .)

No Gráfico 5, notamos que a espessura $2h$, para ambos os modelos de disco, apresenta uma tendência de crescimento conforme afastamos do buraco negro. Ou seja, o disco assume um caráter mais espesso nas bordas externas e vai afinando esse aspecto conforme se aproxima do objeto compacto central. Curiosamente, tanto para o disco newtoniano quanto para o relativístico, o comportamento desta característica é quase linear na região avaliada. Diante das condições físicas, este processo corrobora com os artigos de Shakura & Sunyaev (1973) e de Novikov & Thorne (1973). Isso ocorre devido ao fato de que, conforme nos afastamos do buraco negro, a influência gravitacional das forças de maré tornam-se cada vez menores. Como

é exatamente esse aspecto que configura o disco num formato achatado, a diminuição deste efeito permite que o gás possa expandir mais na direção vertical.

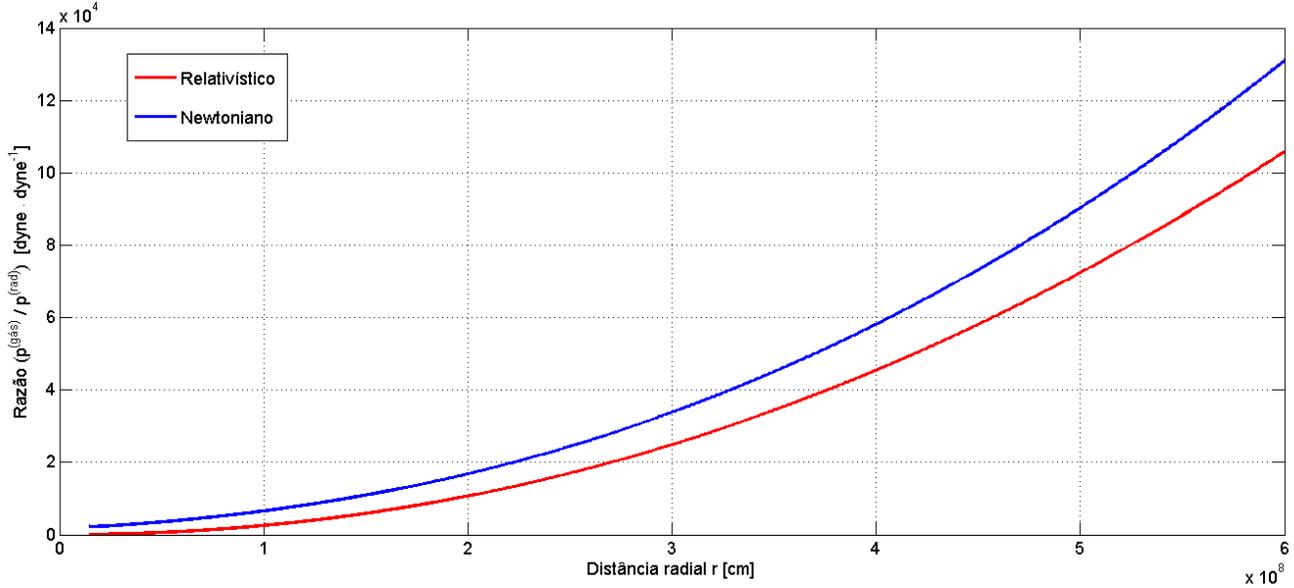
Além disso, vemos que nossos modelos, nas estimativas adotadas, garante uma razão $(h/r) \lesssim 0,01$, o que também exibe uma boa consistência nos resultados, uma vez que não viola as suposições iniciais.



(Gráfico 6. Temperatura T no disco em função da distância radial r .)

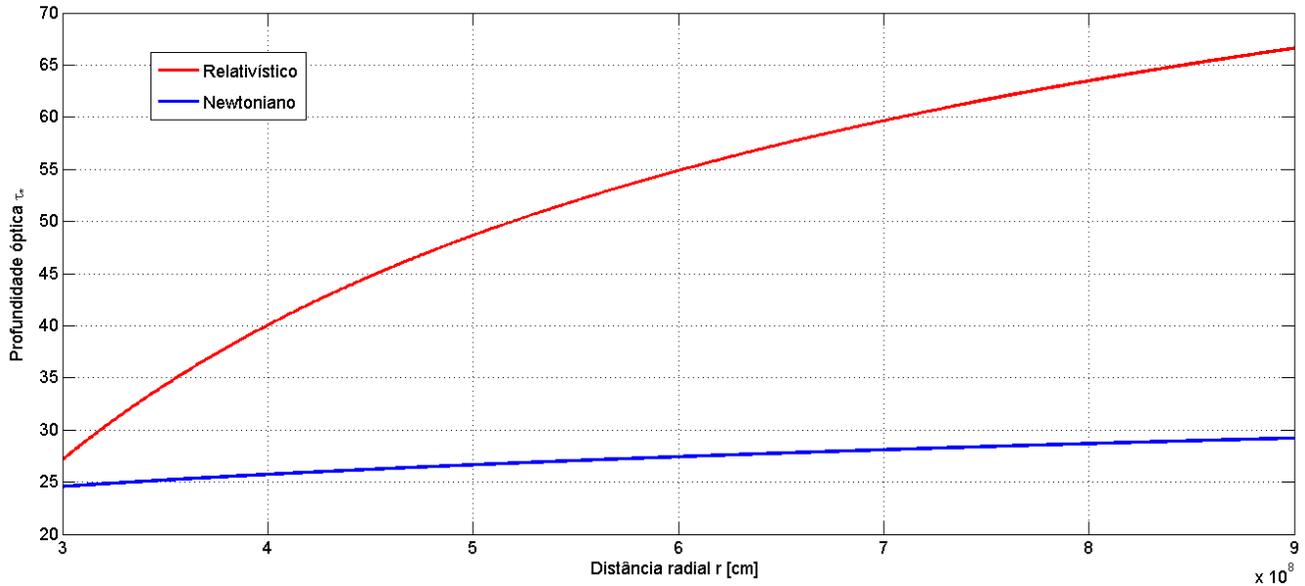
O Gráfico 6 nos mostra que o disco tem altas temperaturas em suas camadas mais internas, e esta vai diminuindo conforme deslocamos para regiões mais afastadas do buraco negro. O perfil de temperatura no disco tem um comportamento geral muito semelhante para ambos os modelos, mas seguindo as conclusões expostas para o fluxo de energia radiante, vemos que o modelo relativístico de fato apresenta uma temperatura com magnitude superior nas regiões mais internas do disco. Como já abordamos anteriormente, estas repercussões são mais significativas quanto mais próximos estamos do buraco negro, uma vez que decorrem das mudanças na geometria do espaço-tempo, as quais obviamente não são consideradas pelo modelo newtoniano.

De acordo com a lei de Stefan-Boltzmann, isso indica que os discos emitiriam a maior parte da luminosidade observada no fenômeno de acreção através das seções mais internas. Ou seja, o fluxo de energia radiante deve ser menor quanto mais longe estamos do buraco negro. Para investigar a correlação, retomamos o Gráfico 2. Com esses resultados, as soluções parecem indicar fortemente que nossas especulações indutivas estão corretas. Fora isso, ao estimarmos o comprimento de onda respectivo à emissão máxima pelo disco, através da lei de Wien, encontramos que a radiação emitida encontra-se predominantemente na faixa dos raios-X, [3, 5].



(Gráfico 7. Razão $[p^{(gás)}/p^{(rad)}]$ no disco em função do raio orbital r .)

No Gráfico 7, vemos, em ambos os modelos, que a razão entre as pressões tende a crescer conforme nos afastamos do buraco negro. Da forma como estão dispostas, isso indica que, ao deslocarmos para regiões mais externas do disco, a pressão do gás passa a ser predominante na estrutura. Entretanto, quando fazemos o curso contrário, i.e. nos aproximamos do buraco negro, a pressão tende a ser governada pela pressão de radiação. Ora, considerando que $p^{(gás)} \propto T$ e $p^{(rad)} \propto T^4$, fica claro notar que a pressão de radiação é dominante nas camadas internas, uma vez que a temperatura cresce quando seguimos em direção ao corpo central, como pudemos verificar no Gráfico 6. Em respeito à diferença de magnitude observada entre os dois modelos, esta deve-se simplesmente à combinação de certos fatores já comentados em parágrafos anteriores com a proporção dessa razão quanto à temperatura, i.e. $[p^{(gás)}/p^{(rad)}] \propto T^{-3}$.



(Gráfico 8. Profundidade óptica τ_* em função do raio orbital r .)

Pelo Gráfico 8, observamos que, tanto no modelo relativístico quanto no newtoniano, a profundidade óptica do disco cresce conforme nos afastamos do buraco negro; i.e. o disco torna-se mais opaco nas regiões externas. Dessa maneira, para camadas mais afastadas, a estrutura óptica do disco dificulta a emissão de radiação através das faces superior e inferior

do mesmo. Este resultado afeta diretamente o fluxo de energia radiante, F . Como o disco é mais “transparente” quanto mais próximo estamos do buraco negro, então o fluxo de energia radiante também deverá ser mais intenso nestas áreas. Retornando novamente ao Gráfico 2, vemos que este é exatamente o comportamento determinado pelas soluções de ambos os modelos. Assim, concluímos que os discos de acreção tem um brilho muito mais intenso nas regiões internas comparado às regiões externas.

3 Conclusões

Nos primeiros contatos com o projeto, antes mesmo de iniciarmos a revisão da literatura associada aos fenômenos de acreção e seus fluxos em formato de discos, buscamos verificar algo mais fundamental, porém de vital importância às justificativas pelas quais expomos a relevância do projeto: a viabilidade deste processo. Através de um retrato simplista do problema, fomos capazes de mostrar que a acreção caracteriza um fenômeno energeticamente favorável. Este primeiro resultado, apesar de simples, é poderoso o suficiente para garantir um embasamento mais sólido à todas as discussões que vieram a seguir.

Tomando como base um artigo clássico sobre a teoria de acreção, Shakura & Sunyaev (1973), apresentamos um desenvolvimento teórico das equações que governam a estrutura de um disco de acreção geometricamente fino apenas utilizando mecânica newtoniana. As soluções deste primeiro modelo descrevem as diversas características exibidas pelo disco através de funções da distância radial em relação ao buraco negro central. Em linhas gerais, estas soluções determinam toda a estrutura do disco de acreção. Por fim, ao realizarmos a análise gráfica destas funções, a qual fora apresentada conjuntamente aos gráficos do disco relativístico, vemos que há uma notável consistência entre as estimativas e as interpretações qualitativas quanto ao contexto físico por trás de nossas suposições.

Estabelecido um primeiro contato com os discos de fato, seguimos ao estudo da gravitação universal através do formalismo lagrangiano da mecânica. Com as ferramentas desenvolvidas neste processo, fomos capazes de derivar analiticamente as três leis de Kepler. A importância desse resultado vai muito além do que podemos imaginar num primeiro momento. Historicamente, estas leis foram apresentadas por Johannes Kepler após uma completa análise das tabelas que continham os dados astronômicos coletados por Thyco Brahe. Ou seja, estas relações surgem, originalmente, como frutos de observações celestes. Séculos depois, somos capazes, à partir das formulações mecânicas conhecidas, de demonstrar matematicamente estes resultados; exatamente o que foi feito na Seção 2.3.2 deste relatório. Isso demonstra o quanto rico é o conhecimento humano acerca de representações abstratas da realidade.

Como dito por diversas vezes ao longo do texto, tínhamos como objetivo final o estudo do modelo relativístico para o chamado *thin accretion disk*, i.e. um disco de acreção geometricamente fino. Mas, para que isso fosse realizado primorosamente, precisávamos compreender bem os conceitos básicos da teoria da relatividade de Einstein. Além do que, uma vez estudada a teoria clássica da gravitação universal, devemos também buscar compreender a visão científica moderna sobre a gravidade. Quanto à eficiência na conclusão desta meta, podemos avaliá-la através do conteúdo exposto nas Seções 2.4 e 2.5.

Um dos resultados principais, ainda considerando os estudos em relatividade geral, trata-se da solução numérica para as órbitas geodésicas e suas visualizações disponíveis no Gráfico 8. Através deste conjunto de simulações, fomos capazes de extrair informações sobre a energia da partícula de acordo com o tipo de órbita realizada e diante os aspectos únicos que cada uma delas possui.

Finalmente, quanto ao último objetivo designado, os resultados associados são, talvez, os mais importantes dentre todos, levando em conta o título do projeto. Baseando-se no artigo de Novikov & Thorne (1973), apresentamos um desenvolvimento matemático aprofundado para derivação das equações de conservação. Neste contexto, em decorrência da implementação correta de equações relativísticas e de suposições pertinentes, eventualmente auferimos as funções que descrevem a estrutura deste modelo. Considerando as soluções obtidas, em relação àquelas do modelo newtoniano, observamos que o comportamento geral das propriedades do disco não foi alterado qualitativamente. Ou seja, as quantidades que determinam sua estrutura, em cada um dos modelos estudados, comportam-se semelhantemente em termos da distância radial. Ainda sim, claramente notamos diferenças quanto às magnitudes das estimativas. O modelo relativístico apresenta valores mais próximos aos dados observacionais fornecidos pelas principais referências; o que sustenta a credibilidade das correções relativísticas adotadas.

4 Cronograma

O cronograma do projeto foi finalizado dentro do prazo estipulado, com alguns pequenos atrasos no meio de seu desenvolvimento.

1. Revisão da literatura e conceitos básicos de relatividade geral. (01/08/2016 a 30/09/2016)
2. Estudo das equações da gravitação universal. (01/10/2016 a 30/11/2016)
3. Integração numérica das equações de movimento. Elaboração do relatório parcial. (01/12/2016 a 31/01/2017)
4. Implementação das correções relativísticas, visualização das órbitas. (01/02/2017 a 31/03/2017)
5. Estudo do modelo de disco de acreção fino. (01/04/2017 a 31/05/2017)
6. Cálculo das propriedades dos discos de acreção. Relatório Final. (01/06/2017 a 31/07/2017)

5 Bibliografia

- [1] Juhan Frank; Andrew King; Derek Raine. *Accretion Power in Astrophysics*. Cambridge University Press, Cambridge, 3^ª edition, 2002.
- [2] Stuart L. Shapiro; Saul A. Teukolsky. *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects*. Wiley-VCH, Weinheim, 2004.
- [3] N. I. Shakura; R. A. Sunyaev. Black holes in binary systems. observational appearance. *Astron. & Astrophys.* *24*, pages 337–355, 1973.
- [4] L. Rezzolla and O. Zanotti. *Relativistic Hydrodynamics*. Oxford University Press, 2013.
- [5] I.D. Novikov and K.S. Thorne. Astrophysics of black holes. *Black Holes, eds. C. DeWitt and B. DeWitt*, pages 343–450, 1973.
- [6] James B. Hartle. *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity*. Addison-Wesley, San Francisco, 2003.
- [7] Norbert Straumann. *General Relativity*. Springer Science+Business Media, Dordrecht, 2^ª edition, 2013.
- [8] H. Goldstein; C. Poole; J. Safko. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, San Francisco, 2002.
- [9] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons, Inc., 1972.
- [10] Oyvind Gron; Sigbjorn Hervik. *Einstein's General Theory of Relativity: With Modern Applications to Cosmology*. Springer Science+Business Media, LLC, 2007.
- [11] Sean M. Carroll. *An Introduction to General Relativity: Spacetime and Geometry*. Addison-Wesley, San Francisco, 2004.
- [12] Alan P. Lightman; William H. Press; Richard H. Price; Saul A. Teukolsky. *Problem Book in Relativity and Gravitation*. Princeton University Press, 1979.