

Relatório Parcial

Pesquisando Desde o Primeiro Dia

Introdução à Estrutura e Evolução Estelar

Aluno(a): Carlo Domenico Longo de Lemos - 21002915

E-mail do Aluno: carlo_lemos@hotmail.com

Nome do Orientador: Cecilia Bertoni Martha Handler Chirenti

E-mail do Orientador: cecilia.chirenti@ufabc.edu.br

Santo André – São Paulo

2016

Resumo

O conhecimento dos conceitos básicos de astronomia ajudam na compreensão das variadas áreas da astrofísica. A partir dos estudos de gravitação, este relatório apresenta o andamento do projeto de iniciação científica nessa área da ciência. O objetivo é, agora, conhecer as principais equações das estrelas para analisar a sua evolução, produzindo, ao final deste projeto, simulações numéricas de estrelas em diversos estágios da evolução estelar.

Abstract

The knowledge of the basic concepts of astronomy helps in the understanding of the various areas of astrophysics. Starting from the gravity studies, this report presents the progress of the research project in this science area. The goal is now to know the main equations of the stars to analyze it's evolution, producing, at the end of this project, numerical simulations of stars in different stages of stellar evolution.

Sumário

1. Introdução Teórica	4
1.1 Gravitação	4
1.2 O nosso sol	4
2. Objetivos	5
3. Materiais e métodos	5
3.1 Material	5
3.2 Métodos	5
4. Resultados e discussão	6
4.1 Força gravitacional de um anel circular sobre um corpo	6
4.2 Interação gravitacional de duas partículas	9
4.3 Campo gravitacional de uma esfera com cavidade.....	12
4.4 Visualizando a equação de equilíbrio hidrostático para estrelas de simetria esférica	15
4.4.1 Conservação de massa	15
4.4.2 Equilíbrio hidrostático atuando na estrela	16
4.4.3 Equação de equilíbrio hidrostático	17
5. Plano de trabalho e cronograma.....	18
6. Conclusões.....	18
Referências.....	21

1. Introdução Teórica

1.1 Gravitação

Os estudos de Newton sobre a gravidade, não foram resultados de epifanias como sugere a história da maçã caindo da árvore. Muito pelo contrário, tais idéias surgiram em uma sequência de pensamentos que fomentaram uma compreensão diferenciada de Newton a respeito do funcionamento do universo e de suas leis. Cientistas da época alegavam que a possível força de atração que um planeta exerce afetava apenas seu entorno próximo, como por exemplo a Terra atraindo apenas a nossa lua. [1] Entretanto, o simples questionamento desse pensamento demonstra a capacidade intelectual e a criatividade de Newton em visualizar as leis do universo fora de um padrão convencional. Ciência é justamente essa habilidade de fazer as perguntas corretas e a partir da metodologia científica demonstrar o entendimento de como funciona o Cosmo.

Newton nos demonstrou um incrível exemplo de sua genialidade, quando a partir de dados coletados por terceiros, desenvolveu toda uma teoria estruturada matematicamente a respeito da força gravitacional [2]. Atualmente, visualizamos sua importância científica nas inúmeras áreas da ciência e da tecnologia. Impossível imaginar os avanços da engenharia nos últimos séculos sem a correta utilização matemática das idéias de Newton, não só gravitacionais como em suas leis que demonstram conceitos como o de inércia e ação e reação. Num âmbito astronômico, é importante lembrar suas contribuições na complexa teoria da Relatividade Geral de Einstein que demonstra ser cada vez mais completa [3]. Visualizando a gravidade dessa forma, impossível fazer ciência sem a correta compreensão desse conceito tão importante.

1.2 O nosso sol

O sol é a estrela mais próxima de nós, e nossa principal fonte de energia, através de reações termonucleares que ocorrem no centro dessa enorme esfera de gás incandescente, temos essa energia que foi primordial para o surgimento da vida no nosso planeta da forma como conhecemos. O estudo dessa estrela que nos fascina desde a antiguidade, evidenciada através da mitologia dos povos antigos, é de extrema importância para a compreensão da vida terrestre, assim como um ótimo modelo para entender as outras estrelas do universo.

Através de observações pertinentes, as principais propriedades do nosso sol foram visualizadas. Como por exemplo, a distância da Terra foi medida por reflexões de ondas de radar direcionadas a um planeta em uma posição favorável de sua órbita (como Vênus, quando está alinhada com a Terra e o Sol). E a partir dessa descoberta

foi possível visualizar o seu raio a partir de seu tamanho angular e da distância obtida. A massa também foi observada a partir dessas outras propriedades conhecidas utilizando a órbita da Terra para encontrá-la com base na terceira lei de Kepler. A densidade média pôde ser visualizada a partir da massa e do raio. E consequentemente a composição química média pode ser inferida analisando a densidade média [4]. Outras características, puderam ser analisadas com a criação de modelos matemáticos que descreviam essas propriedades. Nesse projeto, o objetivo é compreender tais modelos para uma visualização científica da estrutura e evolução estelar.

2. Objetivos

O projeto tem como objetivo principal complementar os estudos do BC&T do aluno, na busca de conhecimentos mais aprofundados nos principais fundamentos da física e da astrofísica. Entre os objetivos específicos, destacam-se:

- Incluir o aluno no meio de pesquisas científicas, colocando-o em contato com o mundo acadêmico e com a elaboração de relatórios científicos.
- Aprimorar o conhecimento sobre estrelas, e suas principais propriedades, através de um estudo básico da estrutura e evolução estelar.
- Aprender e utilizar uma linguagem de programação para, junto com um embasamento teórico e matemático, realizar simulações numéricas para descrever modelos estelares.

3. Materiais e métodos

3.1 Material

O material necessário para a execução deste projeto inclui recursos computacionais modestos, incluindo um compilador Java, um editor de LaTeX e um programa gráfico para a visualização dos dados. O material bibliográfico básico necessário está disponível na biblioteca da UFABC.

3.2 Métodos

Foram utilizadas, até o momento, bibliografias para a obtenção dos principais conceitos referentes à ciência das estrelas e mais especificamente problemas referentes à gravitação. Os livros utilizados mais relevantes são o *Gravity from the ground up*, de Bernard Schutz [3], *Curso de Física Básica vol. 1 Mecânica*, de H. Moysés Nussenzveig [2], *Astronomia e Astrofísica*, de Kepler de Oliveira e M. F. Saraiva [4], e o livro *Introdução à Estrutura e Evolução Estelar*, de W. J. Maciel [5]. A partir da leitura e resolução de exercícios, alguns exemplificados no item 4 desse relatório, foram estruturados os primeiros aprendizados do projeto.

4. Resultados e discussão

Nos tópicos 4.1, 4.2, 4.3 foram resolvidos exercícios do livro do Dr. Moysés Nussenzveig, *Curso de Física Básica vol. 1 Mecânica* [2], no qual foram selecionados problemas teóricos de gravitação para compreensão dos conceitos, além de uma análise sobre os sistemas encontrados. Já na seção 4.4 há uma pequena discussão sobre como o equilíbrio hidrostático ocorre na estrela.

4.1 Força gravitacional de um anel circular sobre um corpo

Um fio homogêneo de massa M tem a forma de um anel circular de raio a . Calcule a força de atração gravitacional exercida pelo fio sobre uma partícula de massa m situada sobre o eixo (perpendicular ao plano do anel que passa pelo seu centro), à distância D do centro do anel como representado na figura 1 [2].

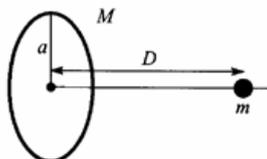


Figura 1: Demonstração espacial do sistema do anel circular e massa m [2].

A partir dos dados propostos no exercício podemos montar o diagrama de forças atuando na partícula m (figura 2) e encontramos, com a utilização da fórmula geral da força gravitacional [2], a relação

$$d\vec{F} = \frac{G dM m}{(\sqrt{a^2 + D^2})^2} \vec{r}.$$

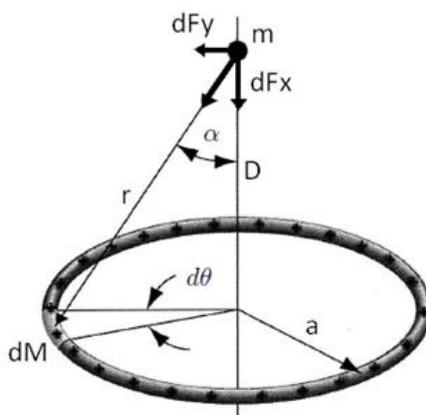


Figura 2: Representação do anel com a descrição das forças atuando [6].

Devido à simetria, a integração sobre as componentes $d\vec{F}_y$ do campo se anulam. Então temos apenas

$$d\vec{F}_x = \frac{G dM m}{a^2 + D^2} \cdot \cos\alpha = d\vec{F}.$$

Integrando o diferencial de força encontrada teremos

$$(1) \quad \int d\vec{F} = \vec{F} = \int \frac{G \cos\alpha m dM}{a^2 + D^2}.$$

Podemos, agora, utilizando a densidade linear do anel ρ , manipular os dados do exercício:

$$\rho = \frac{dM}{dl},$$

onde dl é um comprimento infinitesimal do anel.

Modificando a expressão e sabendo que dl de uma circunferência é a multiplicação do raio com o $d\theta$ equivalente ao arco de dl desejado, teremos

$$(2) \quad dM = \rho a d\theta.$$

A partir do desenho da figura 2 podemos ver também que:

$$(3) \quad \cos\alpha = \frac{D}{\sqrt{a^2 + D^2}}.$$

Substituindo (2) e (3) em (1), temos

$$\vec{F} = \int_0^{2\pi} \frac{G D m \rho a d\theta}{(a^2 + D^2)^2 \sqrt{a^2 + D^2}}.$$

E, sabendo que $\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$, encontramos a expressão

$$(4) \quad \vec{F} = \frac{G m D \rho a 2\pi}{(a^2 + D^2)^{3/2}}.$$

Da integral de (2),

$$\int dM = \rho a \int_0^{2\pi} d\theta,$$

visualizamos que

$$(5) \quad \rho = \frac{M}{2\pi a}.$$

E substituindo (5) no (4), encontramos a força:

$$\vec{F} = \frac{G M D m}{(a^2 + D^2)^{3/2}}$$

no sentido de \vec{F}_x , ou seja, apontando para o centro do anel.

Podemos agora visualizar o problema de outra forma explorando a expressão encontrada para a força e comparando-a com a fórmula geral da força da gravidade entre duas partículas de massa m e M , separadas por uma distância j :

$$\vec{F} = \frac{G M m}{j^2}.$$

Dessa forma, podemos pensar então que se o anel fosse uma partícula pontual, a distância j entre ele e a partícula de massa m seria:

$$\frac{1}{j^2} = \frac{D}{(a^2 + D^2)^{3/2}} \rightarrow j = \sqrt{\frac{(a^2 + D^2)^{3/2}}{D}}.$$

Consemos ainda, pensar em valores para uma visualização tal relação.

Assumindo para a (raio do anel circular) o valor de 1 metro, por exemplo, e para D (distância do anel à partícula de massa m) o valor de 2 metros encontramos para a distância j (nova distância entre a massa m e a partícula de massa M tal que produz uma força gravitacional de mesma intensidade):

$$j = \sqrt{\frac{(1^2 + 2^2)^{3/2}}{2}} \rightarrow j = \sqrt{\frac{(5)^{3/2}}{2}} \rightarrow j = \sqrt{\frac{125^{1/2}}{2}} = 2,364354\text{m}.$$

É possível perceber como a distribuição da massa é um grande diferencial no cálculo da força gravitacional. A mesma massa concentrada em um ponto com uma distância significativamente maior produz um efeito gravitacional de mesma intensidade.

Vamos exemplificar isso agora diminuindo o raio a do anel para 0,5 metros e o valor j se aproximará de 2:

$$j = \sqrt{\frac{(0,5^2 + 2^2)^{3/2}}{2}} \rightarrow j = \sqrt{\frac{(4,25)^{3/2}}{2}} \rightarrow j = 2,093036\text{m.}$$

E da mesma forma, assumindo valores de raios maiores, como por exemplo 2 metros, a distância j fica ainda que maior os mais de 2,3 metros encontrados anteriormente:

$$j = \sqrt{\frac{(2^2 + 2^2)^{3/2}}{2}} \rightarrow j = \sqrt{\frac{(8)^{3/2}}{2}} \rightarrow j = 3,36358566\text{m.}$$

Visualizando o limite de um anel com raio de 0 metros visualizamos que a distância j seria justamente a distância D pois o anel "sem raio" já seria uma partícula pontual:

$$j = \sqrt{\frac{(a^2 + D^2)^{3/2}}{D}} \rightarrow j = \sqrt{\frac{(D^2)^{3/2}}{D}} \rightarrow j = D.$$

E no outro extremo temos um anel de raio tendendo ao infinito e visualizamos que a distância j também tenderia ao infinito, demonstrando que sua força no anel tenderia a ser nula.

4.2 Interação gravitacional de duas partículas

Duas partículas de massas m_1 e m_2 são soltas em repouso, separada de uma distância inicial r_0 , movendo-se apenas sob o efeito de sua atração gravitacional mútua. Calcule as velocidades das duas partículas quando se aproximam até uma distância r ($<r_0$) uma da outra [2].

Analisando as energias potenciais e cinéticas envolvidas, podemos resolver tal problema por conservação de energia total do sistema. Temos

$$E_0 = -\frac{m_1 m_2 G}{r_0} \quad \text{e} \quad E = -\frac{m_1 m_2 G}{r} + \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

E a sabendo que o sistema das duas partículas é fechado podemos visualizar que

$$\Delta E = -\frac{m_1 m_2 G}{r} + \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{m_1 m_2 G}{r_0} = 0.$$

(6)

Definindo um ponto O como origem podemos descrever as posições relativas das partículas m_1 e m_2 através dos vetores \vec{r}_1 e \vec{r}_2 , respectivamente, como sugere a figura 3.

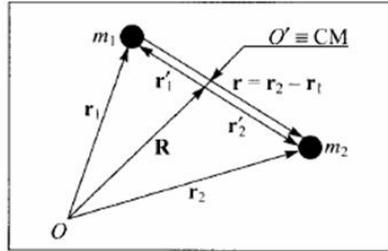


Figura 3: Interação entre duas partículas [2].

O vetor \vec{r}_1' e o vetor \vec{r}_2' podem ser escritos como combinação linear dessa forma:

$$\vec{r}_1' = \vec{r}_1 - \vec{R} \quad \text{e} \quad \vec{r}_2' = \vec{r}_2 - \vec{R}.$$

O vetor \vec{R} que representa a posição do centro de massa é definido como:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M},$$

onde, $M = m_1 + m_2$.

A partir daí podemos fazer manipulações que simplificam o nosso problema:

$$\vec{r}_1' = \vec{r}_1 - \vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_1 - m_1 \vec{r}_1 - m_2 \vec{r}_2}{M} = \frac{m_2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{M} \text{ e}$$

$$\vec{r}_2' = \vec{r}_2 - \vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_2 + m_2 \vec{r}_2 - m_1 \vec{r}_1 - m_2 \vec{r}_2}{M} = \frac{m_1(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{M}.$$

Que, simplificando nos leva a:

$$\vec{r}_1' = \frac{m_2(-\vec{r})}{M} \quad \text{e} \quad \vec{r}_2' = \frac{m_1(\vec{r})}{M}.$$

Agora, derivando tais equações em relação ao tempo em ambos os lados e lembrando que as massas das partículas não varia encontramos tal relação:

$$\vec{v}_1 = \frac{m_2(-\dot{v})}{M} \quad \text{e} \quad \vec{v}_2 = \frac{m_1(\dot{v})}{M}.$$

(7)

Onde \dot{v} é a derivada de r (distância entre as duas partículas) no tempo, então podemos considerar \dot{v} como uma velocidade relativa entre as partículas.

Substituindo agora tais velocidades na relação da conservação de energia encontrada anteriormente (6), conseguimos resolver a equação:

$$-\frac{m_1 m_2 G}{r} + \frac{m_1 \left(\frac{m_2(-\vec{v})}{M}\right)^2}{2} + \frac{m_2 \left(\frac{m_1(\vec{v})}{M}\right)^2}{2} + \frac{m_1 m_2 G}{r_0} = 0,$$

achando como resultado de \vec{v} :

$$\sqrt{2 M G \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}.$$

E voltando na relação (7), temos então o módulo das velocidades de m_1 e m_2 :

$$\vec{v}_1 = m_2 \sqrt{\frac{2G}{M} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)} \text{ e } \vec{v}_2 = m_1 \sqrt{\frac{2G}{M} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}.$$

A partir do esboço do gráfico dessas funções encontradas, podemos assumir valores para as massas das partículas e a distância inicial. Dessa forma podemos visualizar a relação entre a velocidade e a massa. No exemplo abaixo foram assumidos tais valores:

$$m_1 = 1kg, m_2 = 3kg \text{ e } r_0 = 1m.$$

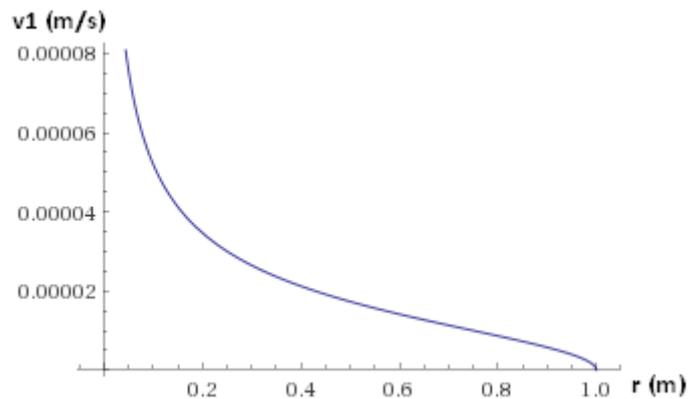


Figura 4: Gráfico da velocidade em módulo da massa 1 em função da distância relativa r entre as partículas [7].

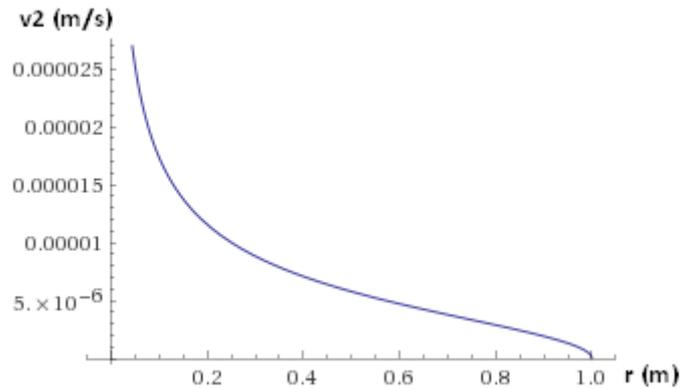


Figura 5: Gráfico da velocidade em módulo da massa 2 em função da distância relativa r entre as partículas [7].

Podemos observar uma diferença nas velocidades das massas 1 e 2, nas figuras 4 e 5, fruto da conservação do momento linear nesse sistema fechado (onde a interação somente ocorre entre as duas partículas). Sabendo que, no sistema inicial, os corpos estão em repouso podemos visualizar uma relação entre as velocidades:

$$p(r_0) = m_1 \vec{v}_{10} + m_2 \vec{v}_{20} = 0 \text{ e } p(r) = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2,$$

e, por conservação do momento linear,

$$p(r_0) = p(r) \rightarrow m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = 0.$$

Visualizando essa relação:

$$\frac{m_1}{m_2} = -\frac{\vec{v}_2}{\vec{v}_1}.$$

A partir disso, visualizamos que a velocidade da partícula em módulo é inversamente proporcional à sua massa. O que é corretamente exposto nos gráficos em que a velocidade, em módulo, da menor massa apresenta a maior velocidade para qualquer r diferente de 1 metro.

4.3 Campo gravitacional de uma esfera com cavidade

Dentro de uma esfera de raio R e de densidade ρ existe uma cavidade esférica de raio a . A distância entre os centros O e O' da esfera e da cavidade é d (figura 6). (a) Para um ponto P externo, alinhado com os centros O e O' e à distância r de O , calcule a razão entre o campo gravitacional (força por unidade de massa) da esfera com a cavidade e aquele que existiria se a esfera fosse maciça (sem cavidade). (b) Calcule o campo gravitacional (em módulo, direção e sentido) num ponto P' qualquer situado dentro da cavidade [2].

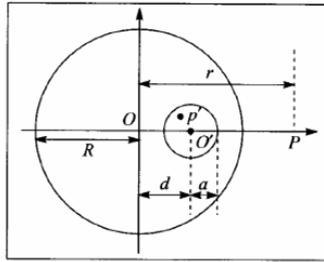


Figura 6: Representação do sistema proposto [2].

(a) Podemos achar o campo em P, pensando como uma superposição de dois sistemas. Em um primeiro momento podemos pensar na esfera completa e teremos para ela um campo, em P, igual a

$$\frac{4\pi R^3 \rho G}{3 r^2}.$$

A partir daí podemos pensar, agora, em uma espécie de "massa negativa" para a parte oca da esfera. Tal massa, a uma distância $(r - d)$ estaria compensando a massa existente para a esfera maciça. Ficamos então com

$$\frac{\frac{4\pi R^3 \rho G}{3 r^2} - \frac{4\pi a^3 \rho G}{3 (r - d)^2}}{\frac{4\pi R^3 \rho G}{3 r^2}}.$$

E, com a devida manipulação algébrica, encontramos, para o campo em P:

$$1 - \frac{\left(\frac{a}{R}\right)^3}{\left(1 - \frac{d}{r}\right)^2}.$$

(b)

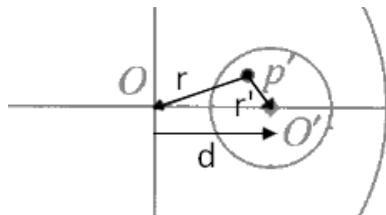


Figura 7: Visualização da combinação linear entre os vetores \vec{r} , \vec{r}' e \vec{d} .

A partir da observação da figura 7, podemos assumir uma relação entre os vetores:

$$\vec{r}' - \vec{r} = \vec{d}.$$

(8)

E, analogamente, visualizamos uma relação para o campo gravitacional da esfera dentro da esfera oca:

$$\vec{g}_{total} = \vec{g} + \vec{g}'.$$

Pela simetria dos elementos opostos, derivada do teorema das cascas esféricas, demonstrado por Newton, através do uso do Cálculo Diferencial e Integral [4], podemos afirmar que a força gravitacional sobre uma partícula interna a uma camada esférica uniforme oca (casca esférica) é nula.

Dessa forma, um ponto interno à esfera de raio j a uma distância k do centro, tal que $k < j$, pode ser simplificado para um sistema onde apenas as massas interiores a esfera menor de raio j estariam interagindo com o ponto. Os valores de raio $j-k$ estariam sendo anulados por essa simetria.

Como em (a), analisando o exemplo como a superposição de dois sistemas, e levando em conta a simetria dos elementos opostos, podemos desconsiderar os raios maiores que r para o sistema esfera completa e para a situação da "massa negativa" da cavidade oca podemos desconsiderar também os elementos com raio maior que r' . Ficamos então com a expressão

$$\frac{\rho G 4\pi (\vec{r})^3}{3 (\vec{r})^2} - \frac{\rho G 4\pi (\vec{r}')^3}{3 (\vec{r}')^2}$$

para o campo gravitacional no ponto p' . E, manipulando,

$$(9) \quad \frac{\rho G 4\pi}{3} (\vec{r} - \vec{r}').$$

Lembrando da relação (8), podemos reescrever tal combinação linear como

$$\vec{r} - \vec{r}' = -\vec{d}.$$

E utilizá-la em (9), para encontrar o resultado esperado.

$$\vec{g} = -\frac{\rho G 4\pi}{3} \vec{d},$$

ou seja, $\vec{g}_{total} = \frac{\rho G 4\pi d}{3}$ no sentido $\vec{O'O}$.

Neste último exercício é interessante visualizar os limites de tamanho das distâncias a e d .

Por exemplo em um $d=0$ (distância da cavidade ao centro da esfera), podemos visualizar que o campo valeria 0 também, independente do tamanho do raio a da cavidade. Tal propriedade seria explicada novamente pela simetria dos elementos

opostos já utilizada nesse exercício, já que seria uma esfera com um oco no centro novamente.

Podemos visualizar que o campo dentro da esfera oca não é em função do tamanho do seu raio, desde de que respeite os limites de se manter dentro da esfera. Por outro lado, quando analisamos o campo de fora da esfera, como por exemplo em um observador P situado a uma distância r , como mostrando no primeiro item do exercício, quanto maior o raio da esfera oca menor seria o campo gravitacional produzido no ponto.

Escolhendo b e a , valores para o raio da esfera oca, temos:

$$g(a, r) = \frac{4\pi R^3 \rho G}{3 r^2} - \frac{4\pi a^3 \rho G}{3 (r - d)^2} \text{ e}$$

$$g(b, r) = \frac{4\pi R^3 \rho G}{3 r^2} - \frac{4\pi b^3 \rho G}{3 (r - d)^2}.$$

Pensando em um $b > a$, teremos $g(a, r) > g(b, r)$. Isso pode ser explicado pois quanto maior o tamanho desse buraco, visualizamos um deslocamento do centro de massa do sistema esfera com cavidade se afastando do ponto P. Além do fato de que um buraco maior implica menos massa no sistema, já que a densidade seria a mesma. Mas mesmo que a massa dessas duas esferas fossem a mesma, observaríamos essa tendência do centro de massa que faria com que o campo tivesse menos intensidade.

4.4 Visualizando a equação de equilíbrio hidrostático para estrelas de simetria esférica

Primeiro, para melhor compreensão de como funciona a equação de equilíbrio hidrostático, devemos entender a equação de continuidade de massa.

4.4.1 Conservação de massa

Para uma estrela esférica em que r é a distância ao centro, chamamos de $M(r)$ a massa contida na esfera de raio r , e $\rho(r)$ a densidade em r . Lembrando que a área da superfície de uma esfera de raio r pode ser descrita como $4\pi r^2$, conseguimos escrever a massa dM contida em uma casca de espessura dr da seguinte forma [5]:

$$dM(r) = 4\pi r^2 \rho(r) dr \text{ e } \frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r).$$

Essa equação demonstra que a diferença entre as massas das esferas de raios $r + dr$ e r (figura 8) é igual a massa contida na casca de espessura dr .

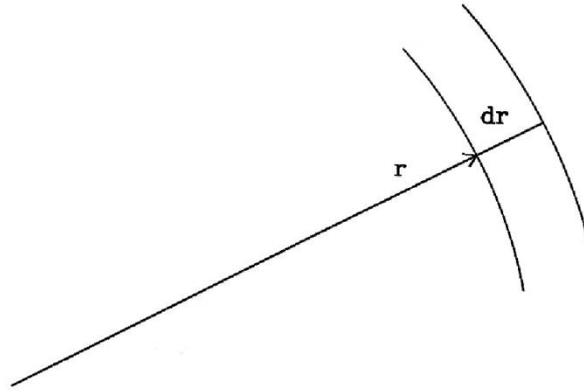


Figura 8: Sistema ilustrando a espessura dr da estrela [5].

4.4.2 Equilíbrio hidrostático atuando na estrela

As forças atuando em qualquer elemento de volume dentro de estrela têm que ser compensadas exatamente, já que uma força resultante diferente de zero implicaria mudanças na estrutura estelar. É um fato observacional que essa mudança ocorre lentamente, logo, tal estabilidade pode ser estudada. Podemos, então, levantar hipóteses para descrever esse equilíbrio hidrostático (mecânico) dentro do astro a partir de equações matemáticas [5].

O equilíbrio mecânico sugerido demonstra um balanço entre a gravidade e a pressão em cada camada esfericamente simétrica da estrela, como demonstrado na figura 9. Deve haver uma estabilidade bem precisa para a que a casca não colapse devido a uma gravidade, mas também a pressão não faça com que a casca expanda [4].

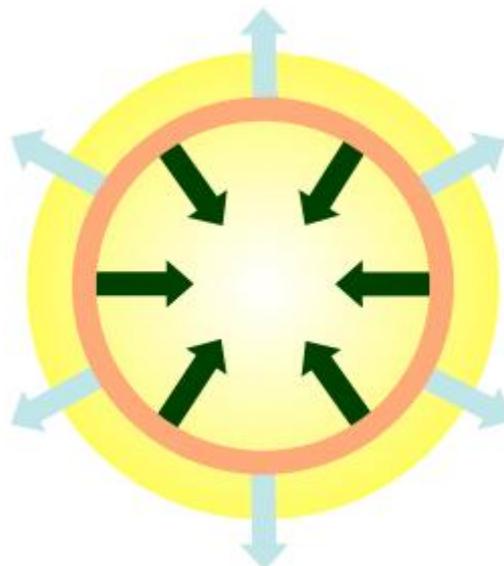


Figura 9: A gravidade representada pela seta de cor verde comprime a estrela, enquanto a pressão interna (seta de cor azul) empurra a camada para fora [8].

4.4.3 Equação de equilíbrio hidrostático

Considerando um paralelepípedo, a uma distância r do centro da estrela, com seu eixo na direção do centro, com altura dr , área da seção transversal dA e massa dm , demonstrado na figura 10. Como visualizamos anteriormente, o equilíbrio mecânico implica em uma igualdade das forças gravitacionais e de pressão.

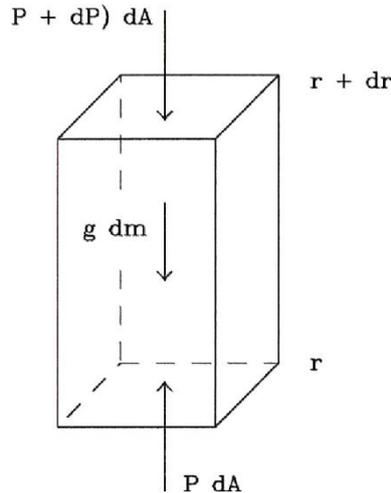


Figura 10: Sistema volume no interior da estrela [5].

Chamando P a pressão na face inferior e $P + dP$ a pressão na face à distância $r + dr$ do centro, e lembrando que a força genérica F associada a uma pressão k em uma área de contato j respeita a seguinte relação $F = j k$, podemos escrever a relação entre as forças da seguinte forma [5]

$$(10) \quad P dA - (P + dP) dA = g dm,$$

onde $g = g(r)$ é a aceleração gravitacional devida à matéria interior a r .

E, simplificando a equação (10), chegamos a relação

$$dP dA = -g dm.$$

Como $dm = \rho dA dr$ no nosso paralelepípedo, e para a estrela esférica

$$g(r) = \frac{GM(r)}{r^2},$$

obtemos:

$$dP dA = \rho dA dr dm \quad e \quad \frac{dP}{dr} = -\rho g.$$

Utilizando, por fim, a relação entre gravidade e raio chegamos a equação que descreve o equilíbrio hidrostático da estrela:

$$\frac{dm}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2}.$$

5. Plano de trabalho e cronograma

Este projeto possui a duração de 10 meses, de 01/10/2015 a 31/07/2016. O projeto deverá ser desenvolvido aproximadamente de acordo com o seguinte cronograma:

01/10/2015 a 30/11/2015 Revisão da literatura: fundamentos da astronomia [4]. Estudo de gravitação universal, resolução de exercícios [2].

01/12/2015 a 31/01/2016 Estudo das equações de estrutura estelar [5] e introdução aos métodos numéricos para a resolução de equações diferenciais ordinárias [9].

01/02/2016 a 31/03/2016 Simulações iniciais da estrutura estelar com o software Triana [10]. Elaboração do Relatório Parcial.

01/04/2016 a 31/05/2016 Modificações no código numérico. Correções relativísticas necessárias para objetos compactos (estrelas de nêutrons) [3].

01/06/2016 a 31/07/2016 Estudo qualitativo da evolução estelar. Elaboração do Relatório Final.

Atualmente, o projeto ainda está finalizando a segunda fase do projeto, atrasado devido a um maior dedicação pelo aluno em relação as matérias cursadas, visto que o primeiro ano da graduação pode ser um período de adaptação e de construção das ferramentas que serão levadas durante toda sua formação. Nesse cenário, houve um cuidado, por parte do aluno em realizar as matérias bases com um empenho maior que acarretou em uma relegação parcial da pesquisa. Entretanto, para os próximos meses, o foco é acelerar o projeto para retomar o cronograma de uma forma efetiva.

6. Conclusões

As equações mais simples para descrição da estrutura estelar [5] são

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi\rho r^2$$

(conservação de massa) e

$$\frac{dm}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2}$$

(equilíbrio hidrostático),

onde $m(r)$ é a massa contida dentro de um raio r , $\rho(r)$ é a densidade e $P(r)$ é a pressão do fluido que compõe a estrela. Para resolvê-las, necessitamos de uma equação de estado $P = P(\rho)$ e do valor desejado para a pressão (ou densidade) central da estrela. Uma equação de estado politrópica, da forma $P = \kappa\rho^\Gamma$ é um modelo simples que pode ser utilizado desde que os valores dos parâmetros κ e Γ sejam especificados.

O próximo passo do projeto pretende, a partir da utilização do software Triana [10], compreender o comportamento e as propriedades das estrelas através da visualização. O programa demonstra uma estrela com equação de estado politrópica e podemos observar os gráficos das principais variáveis de acordo com o raio, enxergando os contrastes de pressão, temperatura e densidade dentro da estrela e em suas camadas mais superficiais, a composição e a massa relacionadas a uma determinada família de estrelas e como a pressão e a temperatura centrais devem ser para suportar tais massas [3].

No programa do Triana, mais especificamente no estudo das estrelas, podemos modificar, a partir de uma interface de entrada de dados, os parâmetros principais que descrevem as propriedades necessárias para a criação do modelo estelar (expoente politrópico, pressão central, temperatura central e a média do peso molecular do gás dentro da estrela) e selecionar a saída de dados desejado. O programa nos dá então o gráfico da saída desejada em relação a distância do centro. Temos, como exemplo, alguns gráficos nas figuras 11, 12 e 13 demonstrando o esboço criado pelo programa.

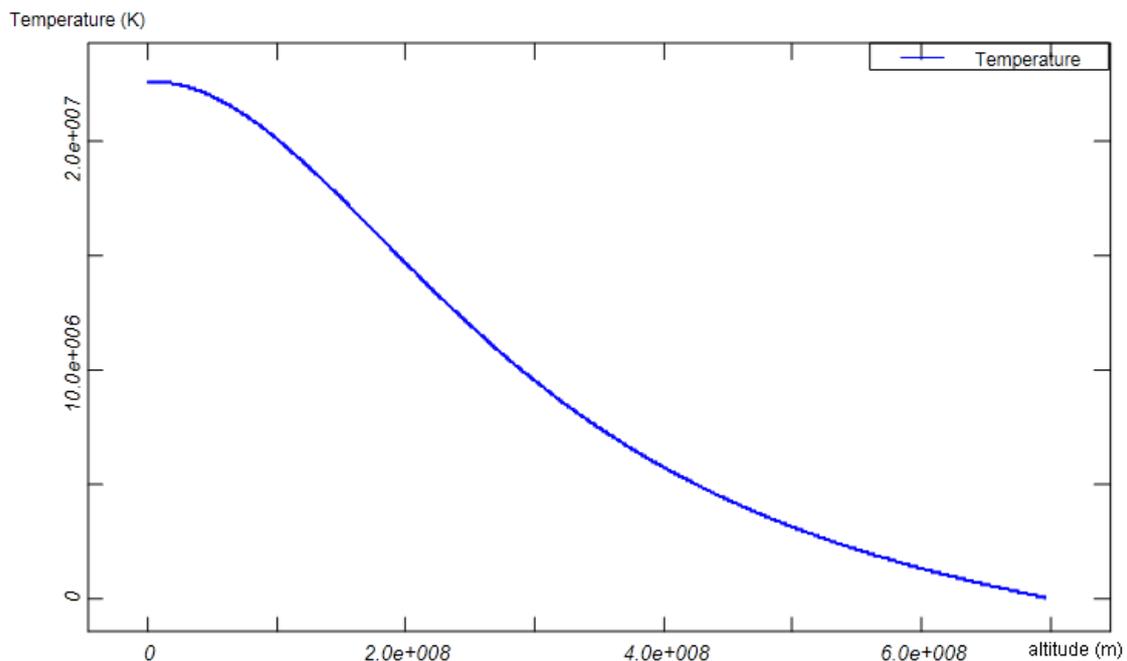


Figura 11: Gráfico da temperatura pela distância do centro para uma estrela modelo [10].

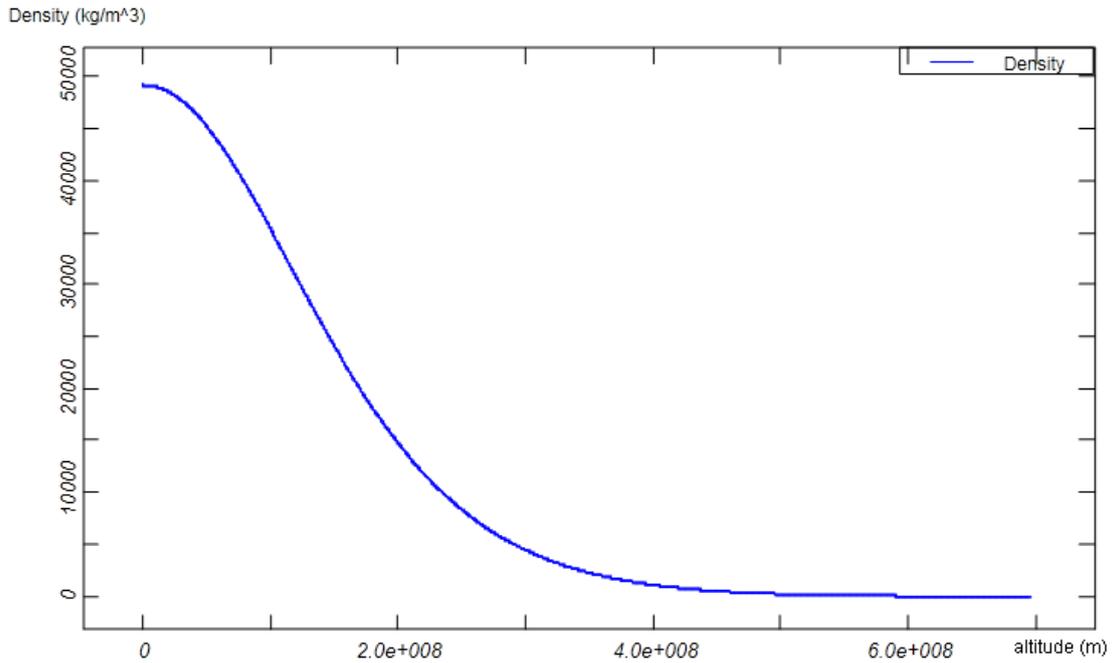


Figura 12: Gráfico da densidade pela distância do centro para uma estrela modelo [10].

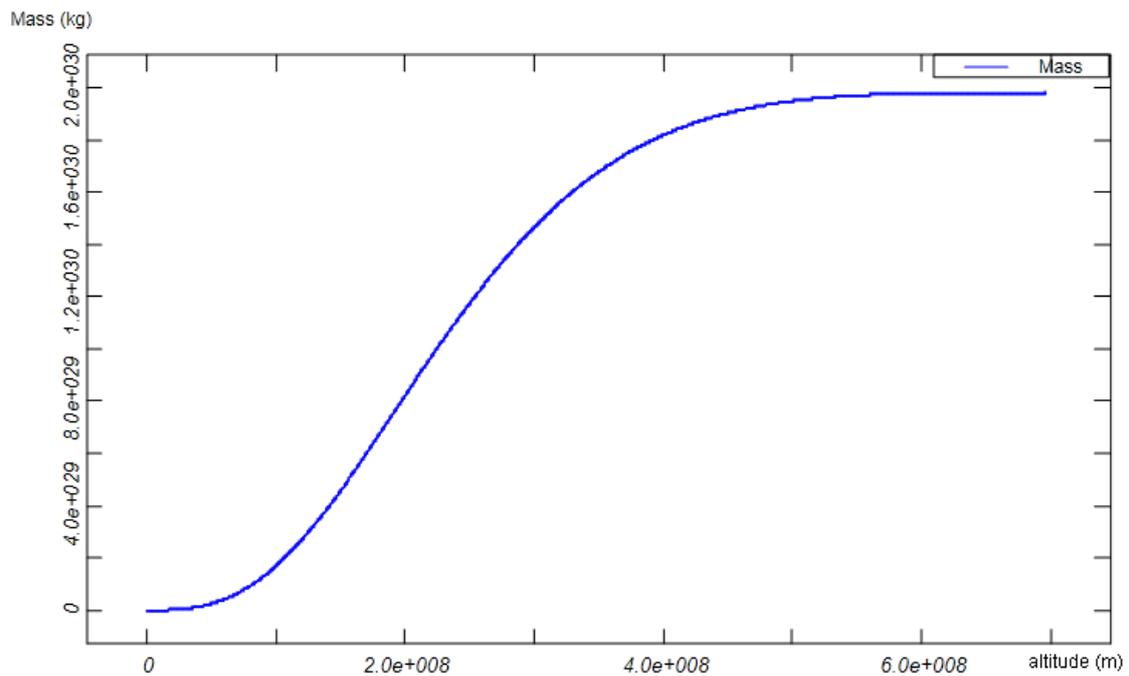


Figura 13: Gráfico da massa pela distância do centro para uma estrela modelo [10].

A utilização de um programa desse tipo ilustra como os astrônomos estudam os detalhes das estrelas. A partir de modelos simples como o do programa, podem alterar as propriedades desejadas para entender problemas físicos mais complexos. Esses modelos computacionais foram primordiais para a compreensão do universo que temos atualmente.

Referências

- [1] Mlodinow, Leonard, De primatas a astronautas: A jornada do homem em busca do conhecimento, 1.ed, Rio de Janeiro: Zahar (2015).
- [2] H. Moyses Nussenzveig, Curso de Física Básica vol. 1 Mecânica, Edgard Blücher, São Paulo (2002).
- [3] B. Schutz, Gravity from the ground up: An introductory guide to gravity and general relativity, Cambridge University Press, Cambridge (2007).
- [4] K. de Oliveira e M. F. Saraiva, Astronomia e Astrofísica, Ed. Livraria da Física, São Paulo (2014).
- [5] W. J. Maciel, Introdução à Estrutura e Evolução Estelar, Edusp, São Paulo (1999).
- [6] D. Halliday, R. Resnick e K. S. Krane, Física, Vol. 3, LTC
- [7] <http://www.wolframalpha.com/>
- [8] Aula de Estrutura Estelar, INEP.
- [9] W. H. Press et al., Numerical Recipes, Cambridge University Press, Cambridge (1992).
- [10] <http://www.trianacode.org/gftgu/download.htm>