



Universidade Federal do ABC

Órbitas em torno de buracos negros

Felipe de Lima Kelemen

Orientador: Prof. Dr. Carlos Renato Huauara Solorzano

Co-orientador: Profa. Dra. Cecilia B. M. H. Chirenti

Centro de Engenharia, Modelagem e Ciências Sociais Aplicadas (CECS)

Santo André, 2015

Universidade Federal do ABC

Órbitas em torno de buracos negros

Trabalho de Graduação em Engenharia Aeroespacial.

Felipe de Lima Kelemen

Orientador: Prof. Dr. Carlos Renato Huauara Solorzano

Co-orientador: Profa. Dra. Cecilia B. M. H. Chirenti

Centro de Engenharia, Modelagem e Ciências Sociais Aplicadas (CECS)

Santo André, 2015

RESUMO

O presente trabalho apresenta o trabalho de graduação realizado ao longo das três disciplinas, TG I, II e III que foram cursadas no ano letivo de 2015. Como estudante de engenharia aeroespacial, procurei um tema que envolve aplicação de conceitos de engenharia somados a física, e modelos computacionais. O estudo de buracos negros foi escolhido devido a minha participação em programas de iniciação científica durante a graduação que abordaram tópicos como estágios finais da vida estelar, estrelas de nêutrons, estabilidade, colapso radial e buracos negros.

Palavras-Chave: *Relatividade, Satélites em Órbita, Buracos Negros, Geodésicas.*

ABSTRACT

The following report presents the graduation project done in three subjects, TG I, II and III, that were attended in 2015. As an aerospace engineering student, I chose a topic that involved engineering concepts added to physics, and computational models. The study of black holes was chosen because of my participation in scientific initiation projects during my graduation which involved topics such as final stages of stellar evolution, neutron stars, stability, radial collapse, and black holes.

Keywords: Relativity, Satellites in Orbit , Black Holes, Geodesics.

SUMÁRIO

1.INTRODUÇÃO	06
2.OBJETIVOS	08
3.REVISÃO TEÓRICA	09
4.DISSCUSSÃO	12
5.RESULTADOS	22
6.CONCLUSÃO	30
7.REFERÊNCIAS	32
ANEXOS	33

1.INTRODUÇÃO

Formalmente, um buraco negro é uma região no espaço na qual não é possível enviar um sinal até o infinito. Na prática, podemos observar regiões em torno de objetos escuros que possuem discos de acreção, alta emissão de raios X e estrelas em órbitas com excentricidades elevadas, devido a presença de um corpo central com muita massa concentrada num volume relativamente pequeno. Estes corpos celestes são fortes candidatos a buracos negros supermassivos. Existe um corpo semelhante no centro da Via Láctea, chamado de Sagittarius A* (Sgr A*), com uma massa de 4 milhões de vezes a massa do nosso Sol, e este será o objeto de estudo deste projeto.

Nos estágios finais da evolução de uma estrela mais massiva que o Sol, quando todo seu combustível se esgota, ela explode, num evento chamado supernova. O resultado disso pode dar origem a uma estrela de nêutrons ou a um buraco negro.

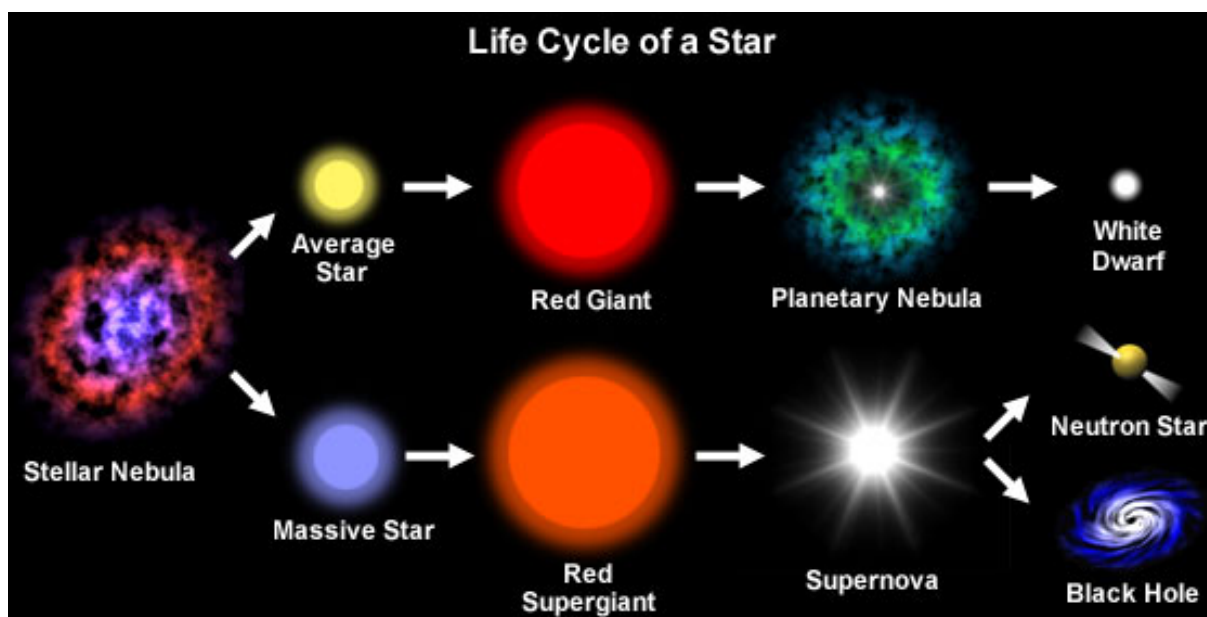


Figura 1: Ciclo de vida de estrelas.

Definindo as coordenadas esféricas e do tempo (t,r,θ,φ) , e utilizando a simetria esférica do espaço de Schwarzschild, é possível encontrar as equações para o equilíbrio hidrostático (Tolman-Oppenheimer-Volkoff) [1] que descrevem a estrutura estelar. Este sistema de equações relaciona a pressão, a massa, e o potencial em função do raio da estrela,

para uma dada equação de estado que relaciona a densidade de energia com o raio e a entropia do sistema.

Resolvendo o sistema de equações de TOV, e variando a densidade de energia central, obtêm-se um ponto de massa total máxima para uma estrela em função da densidade de energia central, ponto o qual divide as estrelas em dois grupos (as estáveis e as instáveis). A região estável é a qual as estrelas que possuem este valor de massa total, raio total e densidade central, são estáveis. E a região instável é, portanto, quando qualquer perturbação pode levar ao colapso radial da estrela.

Para estrelas de nêutrons, a instabilidade radial aparece para valores de densidade de energia central (ρ_0) maiores que o valor da densidade de energia crítica (ρ_{crit} , onde a massa total da estrela é máxima) e a estrela colapsa radialmente para um buraco negro.

Analisando o modo de oscilação radial destas estrelas, encontra-se instabilidades radiais geradas pelo deslocamento de um elemento de fluido a um dado raio a partir do centro. A frequência oscilatória deste elemento de fluido instável possui um termo exponencial real, e então o raio total da estrela tende a zero quando $t \rightarrow \infty$.

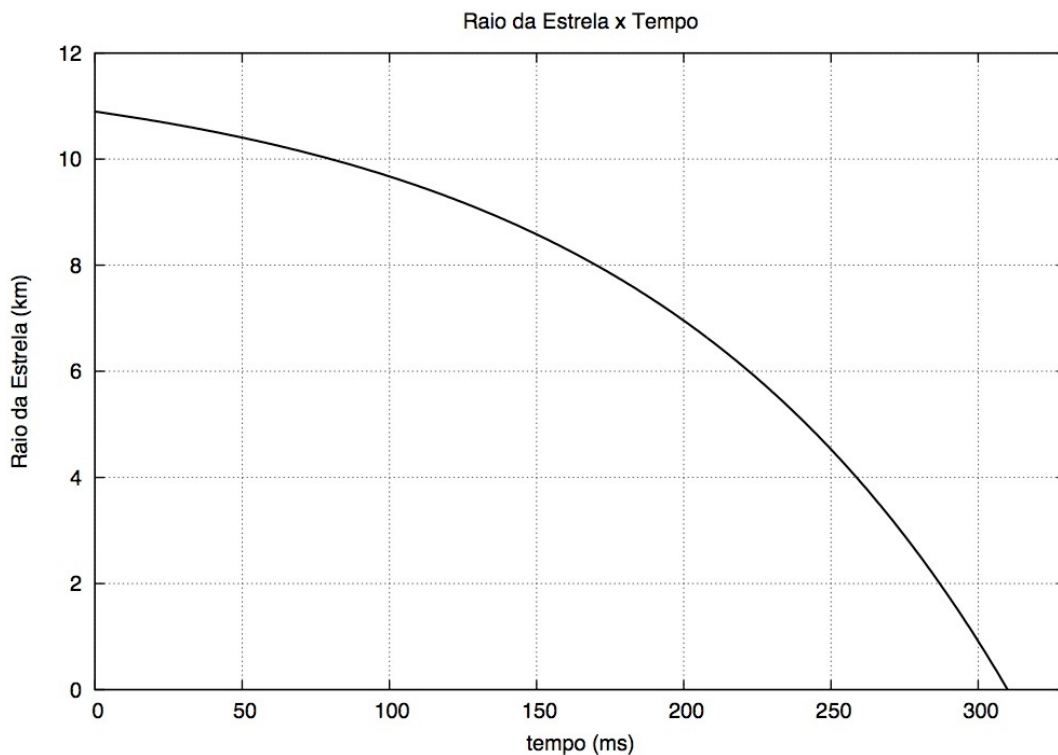


Figura 2: Raio total da estrela instável em função do tempo devido à oscilação radial.

Uma pequena perturbação leva a estrela instável ao seu colapso radial, e é o que mostra a Figura 2, para uma estrela de densidade de energia bariônica central $\rho_{b0} = 0.00358$ com massa total $M = 1.63 \text{ MSol}$ e raio total $R = 10.8963 \text{ km}$, o tamanho da estrela diminui até que $R = 0$, num tempo muito curto, o que origina um buraco negro. [2]

Partículas massivas caindo em direção a um buraco negro seguem geodésicas tipo tempo e podem entrar em uma órbita fechada em torno dele. Um dos objetivos do projeto é estudar os tipos de geodésicas em torno de buracos negros, as órbitas fechadas, e possíveis soluções analíticas e numéricas junto da visualização das órbitas.

Além disso, determinar a posição e velocidade para entrar em uma órbita segura (estável) que chegue o mais próximo possível do astro em seu periastro a fim de levar um a sonda a observá-lo de perto.

O buraco negro escolhido é o que fica no centro da Via Láctea (Sgr A*), e aqui assume-se que existirão, no futuro, tecnologias de propulsão capazes de levar uma sonda até um ponto da órbita determinada que estará muito distante da Terra. Outra hipótese simplificadora é que a sonda suportará as velocidades atingidas enquanto em órbita em torno do buraco negro sem falha estrutural.

2.OBJETIVOS

- Estudar órbitas em torno de buracos negros segundo a teoria da Relatividade Geral;
- Calcular os parâmetros de uma órbita com periastro próximo a um buraco negro que permita uma órbita fechada estável e segura;
- Aplicar os resultados para o buraco negro central da Via Láctea;

3.REVISÃO TEÓRICA

Esta seção contém uma revisão teórica dos principais conceitos relacionados ao tema.

3.1 Princípio Variacional e o Formalismo Langrangiano

Segundo Lemos [3], O princípio Variacional de Hamilton reduz as leis da mecânica a um enunciado segundo o qual, comparado com todos os movimentos imagináveis, o movimento real é aquele para o qual a ação é mínima (estacionária), cujo valor depende do movimento do sistema em sua totalidade. A dinâmica de sistemas físicos é determinada pela aplicação do princípio variacional para um dado funcional (Langragiano) que contém todas as informações físicas do sistema e as forças atuantes nele.

A equação diferencial de Euler [3]:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad (1)$$

Onde, $f = f(y, y', x)$ é uma função qualquer. A eq. (3) é uma condição necessária para a existência de um extremo (máximo ou mínimo) para um dado funcional $J[y]$, tal que:

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x), x) dx \quad (2)$$

Aplicando uma mudança de notação $f(y, y', x) \rightarrow L(q, \dot{q}, t)$, na expressão (2), a Eq. de Euler (1) se reduz à Eq. de Euler-Lagrange (3):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (3)$$

e L é a Lagrangiana que descreve um sistema em coordenadas gerais (independente do sistema de coordenadas).

A Eq. (3) decorre do princípio variacional,

$$\delta S \equiv \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0 \quad (4)$$

com $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$.

Seja a variação da ação S dada por:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right) dt \quad (5)$$

de onde, assumindo $\delta S = 0$ (4), conclui-se que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (6)$$

A Eq. (6) é o conjunto das equações de Lagrange deduzidas a partir do princípio variacional ($\delta S = 0$) que descrevem a evolução no tempo de um dado sistema.

Portanto, para um dado sistema descrito pela Lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$, seu movimento entre dois instantes de tempo é tal que uma ação,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (7)$$

é mínima (estacionária) para a trajetória real, mantidos fixos os pontos inicial e final da trajetória no espaço (Princípio Variacional de Hamilton).

No formalismo Lagrangiano, um sistema mecânico conservativo pode ser descrito por lagrangianas da forma:

$$L = T(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) - V(\vec{r}) \quad (8)$$

Onde, T é a energia cinética e V a energia potencial do sistema.

3.2 Equação da Geodésica na Relatividade Geral

Geodésicas são as linhas de mundo percorridas por partículas em movimento de queda livre (na ausência de forças externas). Do ponto de vista prático, as geodésicas são as curvas de menor comprimento que unem dois pontos no espaço e dependem da geometria que está descrevendo o espaço, respeitando o princípio variacional.

Considerando uma curva λ numa variedade M no espaço, a variação de um campo vetorial Y ao longo de λ , em componentes, num sistema de coordenadas local, é dada por [6]:

$$(\delta Y)^j = Y^j_{,k} \frac{dx^k(\lambda(t))}{dt} \delta t. \quad (9)$$

utilizando a notação de Einstein [4], onde i, j e k são as componentes do espaço 3D e “,” denota a derivada na componente correspondente.

Para a propagação paralela de Y em λ , é necessário que [6]:

$$(\delta Y)^j = -Y^l \Gamma^j_{lk} \frac{dx^k(\lambda(t))}{dt} \delta t \quad (10)$$

Onde Γ são os símbolos de Christoffel que dependem unicamente da métrica do espaço.

A curva λ é chamada de geodésica se o vetor tangente a curva for linearmente dependente quando propagado paralelamente. Portanto, para λ ser uma geodésica em M ,

$$\frac{dx^j(\lambda(t))}{dt} - \Gamma^j_{lk} \frac{dx^l(\lambda(t))}{dt} \frac{dx^k(\lambda(t))}{dt} \delta t = [1 - \phi(t)\delta t] \left(\frac{dx^j(\lambda(t))}{dt} + \frac{d^2 x^j(\lambda(t))}{dt^2} \delta t \right) \quad (11)$$

onde ϕ é uma função de t (que parametriza a curva λ). No limite de $\delta t \rightarrow 0$, a equação da geodésica é resumida para:

$$\frac{d^2 x^j}{dt^2} + \Gamma^j_{lk} \frac{dx^l}{dt} \frac{dx^k}{dt} = \phi(t) \frac{dx^j}{dt} \quad (12)$$

Reparametrizando a curva λ pela variável s , sendo ds o elemento de linha:

$$s = \int^t dt'' e^{\int^{t''} dt' \phi(t')},$$

A Eq. (12) se torna:

$$\frac{d^2 x^j}{ds^2} + \Gamma^j_{lk} \frac{dx^l}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0. \quad (13)$$

A Eq. (13) é a equação geral da geodésica. [6]

4.DISCUSSÃO

4.1 Geodésicas tipo tempo

De acordo com a teoria da Relatividade Geral, existem três tipos de geodésicas (tipo espaço, tempo e luz) onde as tipo luz são as geodésicas de partículas na velocidade da luz, as tipo espaço de particular viajando em velocidades acima da velocidade da luz e um corpo massivo (físico) em queda livre se move em linhas de universo que são geodésicas do tipo tempo. O parâmetro afim deste tipo de curva é escolhido como o tempo próprio da partícula (τ) medido ao longo da sua linha de universo. [5]

Tomando o elemento de linha [1]:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (14)$$

Onde g é a métrica do espaço-tempo e dx comprimentos infinitesimais na notação de Einstein com α e β variando de 0 até 4 (incluindo as três componentes do espaço e uma no tempo). Para encontrar a equação da geodésica tipo tempo através do princípio variacional, definimos o tempo próprio da partícula como sendo $d\tau = -ds^2$, de forma que [1]:

$$\tau_{AB} = \int_A^B \sqrt{-ds^2} = \int_A^B \sqrt{-g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta} \quad (15)$$

Onde temos $c = 1$ (velocidade da luz), nas unidades geométricas normalizadas. Consideramos uma linha de universo parametrizada por σ , onde $\sigma = 0$ em A, e $\sigma = 1$ em B.

Introduzimos a lagrangiana [6]:

$$L \left[\frac{dx^\alpha}{d\sigma}, x^\alpha \right] = \frac{d\tau}{d\sigma} \quad (16)$$

A equação de Euler-Lagrange fica, então, da seguinte forma:

$$-\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial (dx^\gamma / d\sigma)} \right) + \frac{\partial L}{\partial x^\gamma} = 0 \quad (17)$$

Calculando as derivadas, temos:

$$\frac{\partial L}{\partial x^\gamma} = -\frac{L}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \quad (18.i)$$

$$\frac{\partial L}{\partial(dx^\gamma / d\sigma)} = -\frac{1}{L} g_{\alpha\gamma} \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \quad (18.ii)$$

Substituindo os valores de (18) em (17), temos que:

$$L \left[g_{\alpha\gamma} \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} \right) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \right] = \frac{L}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \quad (19)$$

Isolando o termo dependente da métrica e remanejando os outros, obtemos:

$$g_{\alpha\gamma} \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} \right) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \quad (20)$$

A partir da definição dos símbolos de Christoffel [6],

$$\Gamma_{\delta\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\gamma} \left[\frac{\partial g_{\gamma\delta}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^\delta} - \frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial x^\gamma} \right] \quad (21)$$

chegamos que:

$$g_{\alpha\gamma} \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = -g_{\alpha\gamma} \Gamma_{\delta\beta}^\alpha \frac{dx^\delta}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \quad (22)$$

Como a métrica é não-nula, obtemos a equação da geodésica tipo tempo:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = -\Gamma_{\delta\beta}^\alpha \frac{dx^\delta}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \quad (23)$$

Desta forma, uma partícula em órbita em torno de um buraco negro, na relatividade geral, descreveria curvas que obedecem a equação (23).

4.2 Buraco Negro de Schwarzschild

A teoria da Relatividade Geral prediz que uma estrela fria não pode ter um aumento de massa indefinidamente (ou seja, possui uma massa máxima para seu raio). Uma estrela mais massiva que seu limite será instável e qualquer perturbação levará ao seu colapso. O resultado deste colapso é um buraco negro, e a solução mais simples para um buraco negro é descrita pela geometria de Schwarzschild. [7]

Nas coordenadas (t, r, θ, ϕ) , a solução para o elemento de linha (ds) é dada por [1]:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (24)$$

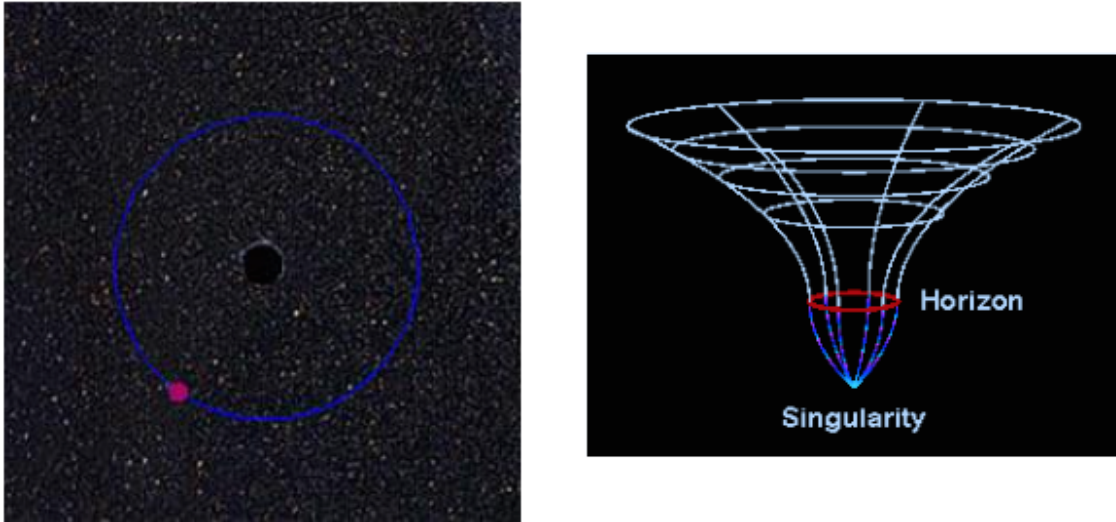


Figura 3: Horizonte de Eventos e Singularidade em um Buraco Negro.

Na solução (24), em unidades geométricas normalizadas, r é variado de 0 até o infinito, e M é a massa total do corpo central e t é o tempo. A solução é válida tanto para $0 < r < 2M$ quanto para $r > 2M$. O valor $r = 2M$ é chamado de raio de Schwarzschild, e a região $< 2M$ é o interior do buraco negro. A região limite ($r = 2M$) é a fronteira do buraco negro que é seu Horizonte de Eventos. Neste ponto, a velocidade de escape é igual a velocidade da luz (c), e portanto, um evento que aconteça para $r < 2M$ precisa obter velocidade $v' > c$ para afetar um observador externo. De acordo com a Relatividade Restrita um corpo massivo possui velocidade $v' < c$, e um corpo de massa igual a zero se move exatamente com $v' = c$, logo é impossível uma informação sair de um buraco negro e encontrar um observador externo.

Em $r = 0$ encontramos uma singularidade na variedade, o que implica que o espaço-tempo de Schwarzschild é geodesicamente incompleto. Além disto, no infinito o espaço se reduz ao espaço de Minkowski (espaço-tempo plano) e $dt/ds = \gamma$ (Fator de Lorentz).

4.2.1 Velocidade de escape relativística

Na Relatividade Geral, a expressão da energia de um corpo que atinge velocidade zero no infinito (definição de velocidade de escape) é dada por [9]:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - R_s/R}} \quad (25)$$

Onde R_s é o Raio de Schwarzschild ($= 2M$) e R é o raio total calculado da órbita, e m é a massa do corpo em órbita. E a energia relativística é dada por [9]:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (26)$$

Onde v é a velocidade do corpo em órbita, assim, temos para a velocidade de escape:

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - v_e^2/c^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - R_s/R}} \quad (27)$$

De onde obtemos, em unidades geométricas:

$$v_e = c \sqrt{\frac{R_s}{R}} \quad (28)$$

Portanto, a velocidade de escape relativística, para órbitas circulares, é igual a Newtoniana, em unidades padrão [9]:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad (29)$$

Onde M é a massa do corpo central e G a constante gravitacional.

4.2.2 Órbitas no espaço de Schwarzschild

Quantitativamente, existem muito mais tipos de órbitas no espaço de Schwarzschild do que no campo de força central de Newton (onde as órbitas são cônicas). Existem por exemplo, órbitas que espiralam e que caem dentro de um buraco negro, o que não seria possível na mecânica clássica.

Adotando $\theta = \pi/2$ como o plano das órbitas, e transformando a métrica de Schwarzschild, obtemos a Lagrangiana [8]:

$$\mathcal{L} = \alpha \dot{t}^2 - \alpha^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\phi}^2 \quad (30)$$

Onde a notação da derivada com o ponto, aqui, representa d/ds .

As soluções das equações de Euler-Lagrange (6) para a dada Lagrangiana são:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \dot{t} = k \\ r^2 \dot{\phi} = h \\ \left(\frac{\dot{r}}{\alpha} \right) = \frac{2m}{r^2} \dot{t}^2 - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\dot{r}^2}{\alpha} \right) - 2r\dot{\phi}^2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (30.i) \\ (30.ii) \\ (30.iii) \end{array}$$

Tendo, k e h como constantes, que são a energia total da partícula e seu momento angular específico, respectivamente e m a massa do corpo central. Assumindo $dr/ds = 0$, da equação (30.iii), obtemos:

$$\left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 = \frac{m}{r^3} \quad (31)$$

que substituindo na métrica, nos dá a seguinte relação:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{3m}{r} \right) dt^2 \quad (32)$$

Isso mostra que, para partículas massivas, é necessário $r > 3m$ (ds e dt são reais e positivos). E o caso onde $r = 3m$ é justamente o caso dos caminhos circulares da luz em torno do buraco negro.

Para geodésicas tipo tempo, onde $L = 1$, das soluções das equações de Euler-Lagrange obtemos a equação do movimento [9]:

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = k^2 - \frac{1}{r^3} (r - 2m) (r^2 + h^2) \quad (33)$$

E podemos definir [9]:

$$V(r) \triangleq \frac{1}{r^3} (r - 2m) (r^2 + h^2) \quad (34)$$

como o Potencial Relativístico Efetivo. Em comparação, o potencial Newtoniano é dado por [9]:

$$V_N(r) \triangleq \frac{1}{r^2} (h^2 - 2mr) \quad (35)$$

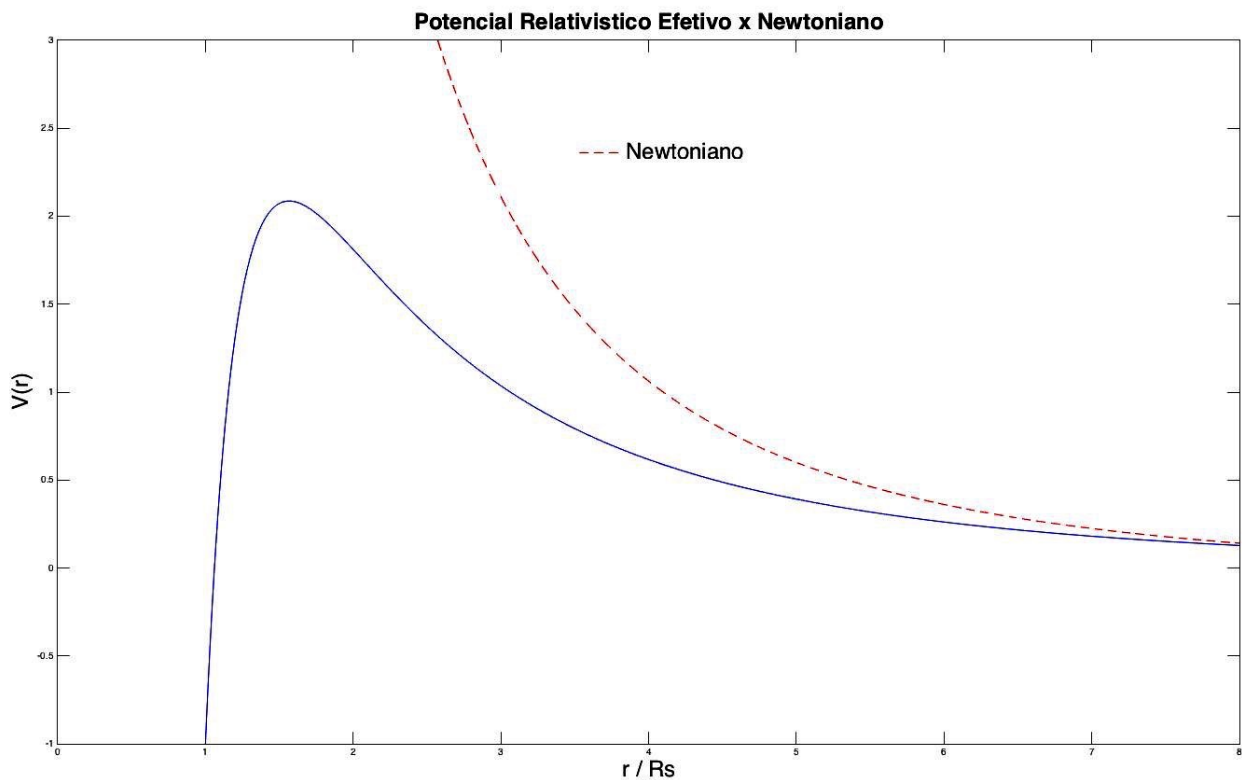


Figura 4: Potencial Relativístico.

Para uma razão de $h/M = 4$, os potenciais assumem a forma mostrada na Figura 4. Órbitas circulares estáveis são possíveis para valores de r que sejam mínimos locais da função $V(r)$, e as órbitas circulares instáveis acontecem nos pontos de r máximo.

Órbitas elípticas são possíveis dentro do poço de potencial variando entre um r máximo e um r mínimo. Partículas com energias menores que o valor máximo, em geral, baterão na barreira de potencial e sofrerão espalhamento. Um detalhe importante é que o potencial relativístico não cresce indefinidamente quando $r \rightarrow 0$, e portanto isto dá um leque maior de tipos de órbitas possíveis no espaço relativístico comparado às soluções cônicas da mecânica Newtoniana.

4.3 Precessão do Periélio de Mercúrio

De acordo com a mecânica newtoniana, as órbitas dos planetas deveriam ser elipses fechadas, com o sol situado em um dos focos e os eixos apontando sempre as mesmas direções do espaço. Entretanto, as medições apontam que devido a influência de outros corpos celestes (como outros planetas e suas luas) a órbita elíptica não fica sempre no mesmo lugar.

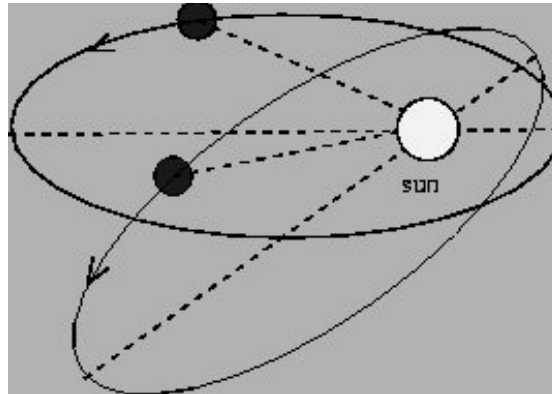


Figura 5: Precessão da órbita.

De fato, no caso dos planetas do sistema Solar, ocorre uma precessão do ponto de máxima aproximação ao Sol, que muda de posição a cada volta em torno do centro. E a teoria da Relatividade Geral previa uma discrepância na precessão do periélio de Mercúrio, adicionando a curvatura do espaço-tempo, que não podia ser explicada pela mecânica clássica. O cálculo dessa variação é um bom teste para a teoria da Relatividade Geral.

A equação diferencial segundo a relatividade geral [9], que descreve o movimento do planeta (tomando a variável $u = 1/r$) é:

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{m}{h^2} + 3mu^2 \quad (36)$$

Onde, r é o raio da posição do corpo em órbita ($u = 1/r$), m é a massa central, h é o momento angular específico da órbita, e ϕ é a anomalia verdadeira (como temos as órbitas sempre contidas no plano escolhido [$\theta = \pi/2$], não existe inclinação e a variação angular da posição na órbita será sempre a anomalia verdadeira).

O segundo termo do lado direito é justamente o termo adicional que corresponde à contribuição relativística.

A solução clássica é dada pela seguinte expressão:

$$u = \frac{m}{h^2}(1 + e \cos \phi) \quad (37)$$

Onde e é a excentricidade. Uma abordagem para obter a solução relativística é substituir (37) em (36) e resolver a equação diferencial em u :

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{m}{h^2} + \frac{3m^3}{h^4}(1 + 2e \cos \phi + e^2 \cos^2 \phi) \quad (38)$$

As soluções particulares de (38) podem ser obtidas reescrevendo a equação da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{m}{h^2} + \frac{3m^3}{h^4} \end{array} \right. \quad (38.i)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \left(\frac{m}{h^2} + \frac{3m^3}{h^4} \right) \cos \phi \end{array} \right. \quad (38.ii)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \left(\frac{m}{h^2} + \frac{3m^3}{h^4} \right) \cos^2 \phi \end{array} \right. \quad (38.iii)$$

As soluções separadas de (38.i), (38.ii), e (38.iii) são as seguintes:

$$u = \frac{m}{h^2} + \frac{3m^3}{h^4} \quad (39.i)$$

$$u = \frac{3m^3 \phi e \cos \phi}{h^4} \quad (39.ii)$$

$$u = \frac{3m^3 e^2}{h^4} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos^2 \phi}{6} \right) \quad (39.iii)$$

Onde apenas (39.ii) soma uma contribuição significativa e não-periódica à solução clássica, e é o termo que corresponde à precessão da órbita. A solução final de (38) em u é obtida somando todas as contribuições relativísticas na solução clássica (37), porém (no caso da precessão) só será considerado o termo não periódico, então temos:

$$u = \frac{m}{h^2}(1 + e \cos \phi) + \frac{3m^3 e \phi \cos \phi}{h^4} \quad (40)$$

O período da função (40) é dado por (T) [9]:

$$T = \frac{2\pi}{1 - 3m^2/h^2} > 2\pi \quad (41)$$

Subtraindo o valor final de uma volta (2π), obtemos a diferença do tempo de precessão (Δ):

$$\Delta = \frac{2\pi}{1 - 3m^2/h^2} - 2\pi \quad (42)$$

$$\Delta = \frac{6\pi m^2/h^2}{1 - 3m^2/h^2} \approx \frac{6\pi m^2}{h^2} \quad (43)$$

Podemos escrever Δ em função dos elementos orbitais através da relação:

$$\frac{2m}{h^2} = \frac{2}{a(1 - e^2)} \quad (44)$$

Onde a é o semi-eixo maior da órbita.

Então,

$$\Delta = \frac{6\pi m}{a(1 - e^2)} \quad (45)$$

Em unidades padrão:

$$\Delta = \frac{6\pi Gm}{ac^2(1 - e^2)} \quad (46)$$

Resolvendo para o exemplo de Mercúrio, obtemos que o valor de Δ é aproximadamente 43,19 segundos de arco por século (calculado no Anexo).

4.4 Perturbações

Todo corpo em órbita está sujeito a perturbações que alteram sua posição, atitude, velocidade, etc. Um satélite em torno da Terra, por exemplo, sofre ação do gradiente

gravitacional, influências do seu campo magnético, pressão da radiação solar, interação com as órbitas da Lua e do Sol, arrasto atmosférico, entre outras.

Considerando uma sonda orbitando um buraco negro, os principais tipos de perturbações que afetariam sua órbita são:

- Interação das correntes elétricas dos equipamentos da sonda com o campo magnético do buraco negro;
- Alto gradiente gravitacional devido a curvatura do espaço-tempo e grandes forças de maré;
- Força gravitacional de outros corpos orbitando o buraco negro;
- Fluxo de partículas em torno do buraco negro.

Todo corpo em órbita funciona como se estivesse em queda livre em direção ao centro do campo gravitacional. E um corpo orbitando um buraco negro está sujeito a um campo gravitacional muito alto. No caso da sonda (de massa insignificante comparada a do buraco negro), a queda em direção ao centro do buraco negro é muito acentuada, e portanto um sistema de controle é necessário para corrigir sua velocidade com atuadores e mantê-lo na órbita desejada.

A interação com partículas em torno do buraco negro pode causar desaceleração do satélite diminuindo sua órbita e o aproximando do horizonte de eventos. Mais uma vez, um sistema de controle é necessário para controlar a velocidade a fim de manter a órbita.

Caso um apontamento específico seja necessário para a missão, a força atrativa de outros corpos pode causar uma mudança na atitude do satélite, giroscópios podem ser utilizados para medir e atuar corrigindo a atitude do satélite com relação ao sistema de coordenadas específico.

As medidas dos sensores do satélite podem ser afetadas pelo campo magnético, portanto este deve ser levado em consideração, caso exista um campo magnético muito forte em torno do buraco negro.

5.RESULTADOS

5.1 Órbita de Mercúrio

Utilizando os dados da órbita de Mercúrio, foram calculados [através da solução obtida na expressão (40)] os valores do raio da orbita em função da anomalia verdadeira, para uma volta completa em torno do centro. A visualização da órbita é obtida no plano polar com os valores de r e ϕ .

Para exemplificar a presença dos efeitos relativísticos na precessão da órbita, foi comparada a solução analítica obtida com a solução clássica da mecânica Newtoniana. E observa-se que a órbita se desloca no plano polar no sentido do movimento, e não fecha a elipse no final de uma volta.

Orbital parameters

	Mercury	Earth	Ratio (Mercury/Earth)
Semimajor axis (10^6 km)	57.91	149.60	0.387
Sidereal orbit period (days)	87.969	365.256	0.241
Tropical orbit period (days)	87.968	365.242	0.241
Perihelion (10^6 km)	46.00	147.09	0.313
Aphelion (10^6 km)	69.82	152.10	0.459
Synodic period (days)	115.88	-	-
Mean orbital velocity (km/s)	47.36	29.78	1.590
Max. orbital velocity (km/s)	58.98	30.29	1.947
Min. orbital velocity (km/s)	38.86	29.29	1.327
Orbit inclination (deg)	7.00	0.00	-
Orbit eccentricity	0.2056	0.0167	12.311
Sidereal rotation period (hrs)	1407.6	23.9345	58.785
Length of day (hrs)	4222.6	24.0000	175.942
Obliquity to orbit (deg)	0.034	23.44	0.001

Figura 6: Parâmetros Orbitais de Mercúrio. [10]

Ambas as soluções chegam em um raio do periélio inicial de 46.00×10^6 km, que conferem com o valor dado pela NASA, entretanto a solução relativística mostra que o valor newtoniano do afélio (69.82×10^6 km) varia de acordo com a angulação da órbita em sua precessão (no caso foi obtido 70.21×10^6 km). A comparação dos resultados pode ser vista na Figura 7.

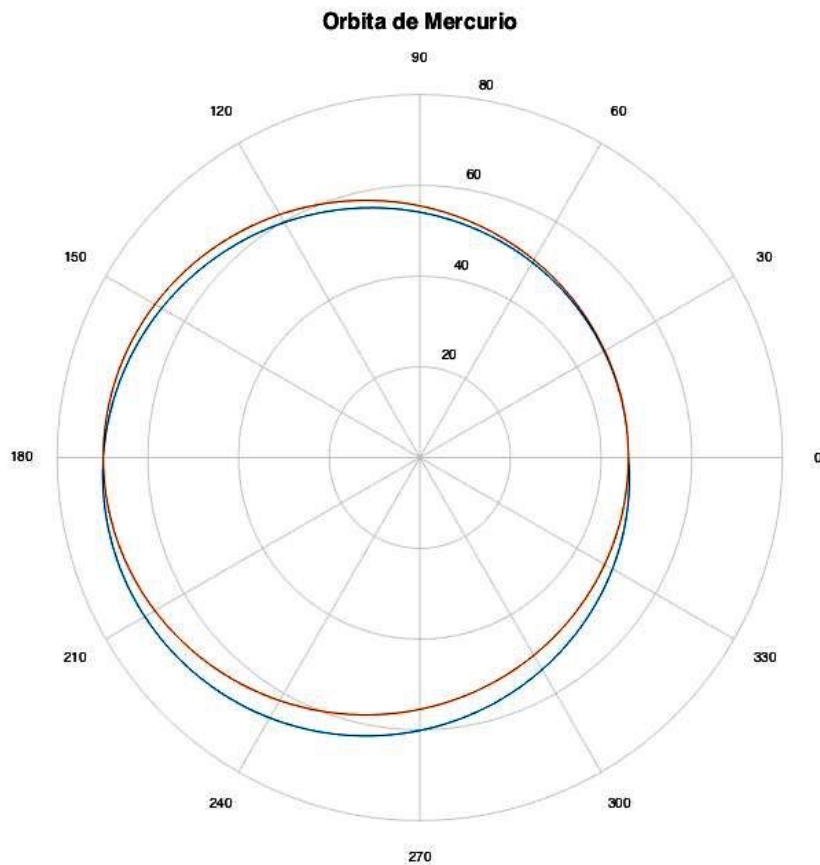


Figura 7: Plano polar da Órbita de Mercúrio.

Em vermelho temos a solução clássica (uma elipse, órbita fechada) e em azul a solução com os termos relativísticos (sofre um deslocamento na direção do movimento em torno do foco e não é fechada).

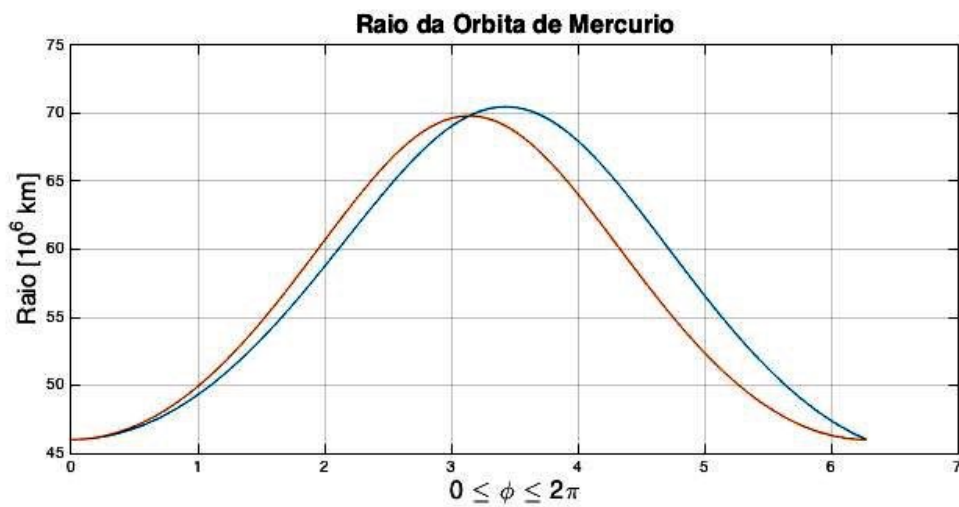


Figura 8: Raio da Órbita de Mercúrio.

Não é possível perceber a precessão da órbita relativística para uma revolução apenas. Foi verificado a existência da precessão da órbita calculada, com uma variação angular de 5.046×10^{-7} rad/rev, variando ϕ para 3 revoluções. É possível perceber (Figura 9) que a órbita não se fecha e é deslocada na direção do movimento do planeta em torno do foco (Sol).

Para o caso de Mercúrio, o valor da contribuição relativística é pequeno se comparado à influência do Sol e de Júpiter na precessão da órbita, todavia, é um valor que serve como uma verificação da teoria de Einstein. E no caso de uma sonda orbitando um buraco negro o efeito é ainda maior, principalmente para órbitas próximas ao buraco negro, devido à alta massa central, pequeno raio e altas velocidades no periastro.

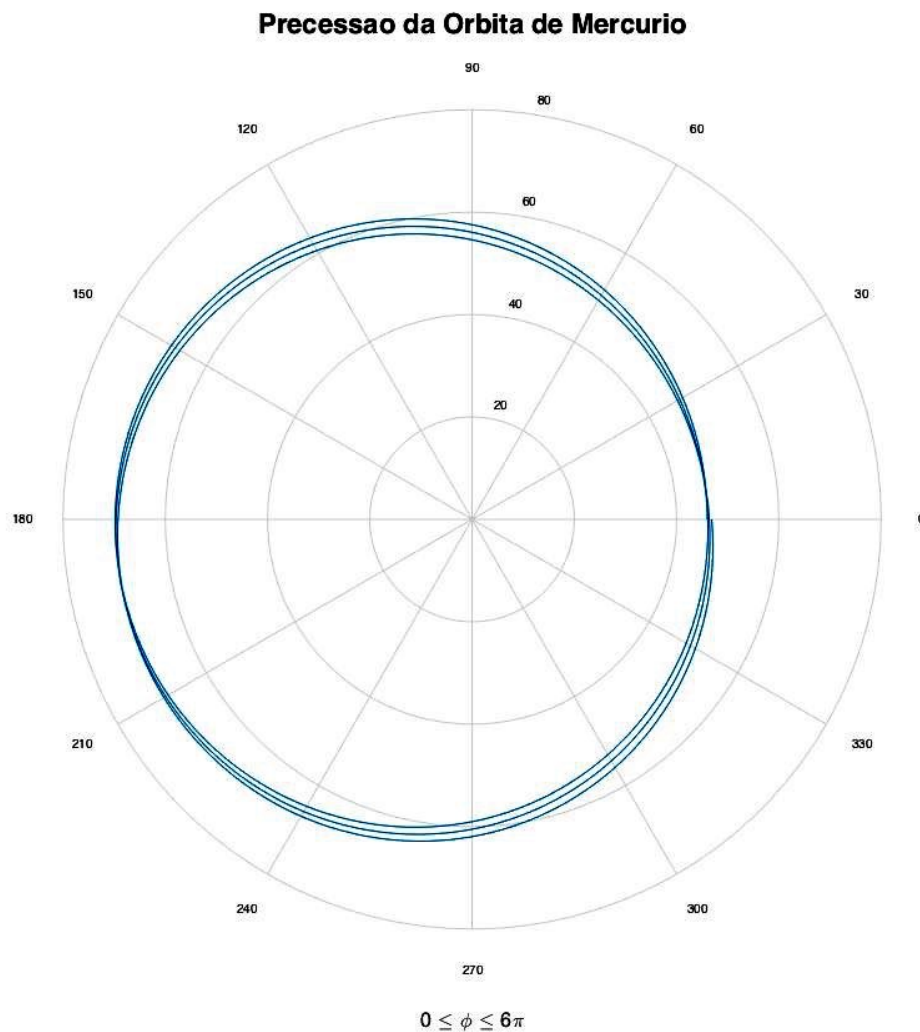


Figura 9: Precessão da Órbita de Mercúrio.

5.2 Órbitas em Sgr A*

O objeto astronômico localizado no centro da Via Láctea (Sgr A*) é um candidato a buraco negro supermassivo (o mais massivo da nossa galáxia) e foi escolhido para aplicação neste trabalho. Ele se encontra na constelação de Sagitário, localizado a cerca de 26,000 anos-luz (200,000 trilhões de quilômetros) do Sistema Solar. E possui uma massa de aproximadamente 4 milhões de massas solares.

Certamente é o objeto mais massivo da galáxia, mas não é o buraco negro mais próximo. Para fins de analisar os efeitos relativísticos nas órbitas é um bom candidato, mas para realizar uma missão utilizando sistemas propulsivos convencionais é inviável. Existem outros buracos negros como A0620-00 na constelação de Monoceros que se localiza a cerca de 2,000 anos-luz do Sistema Solar, que estão mais próximos e podem ser alvos de futuras missões.

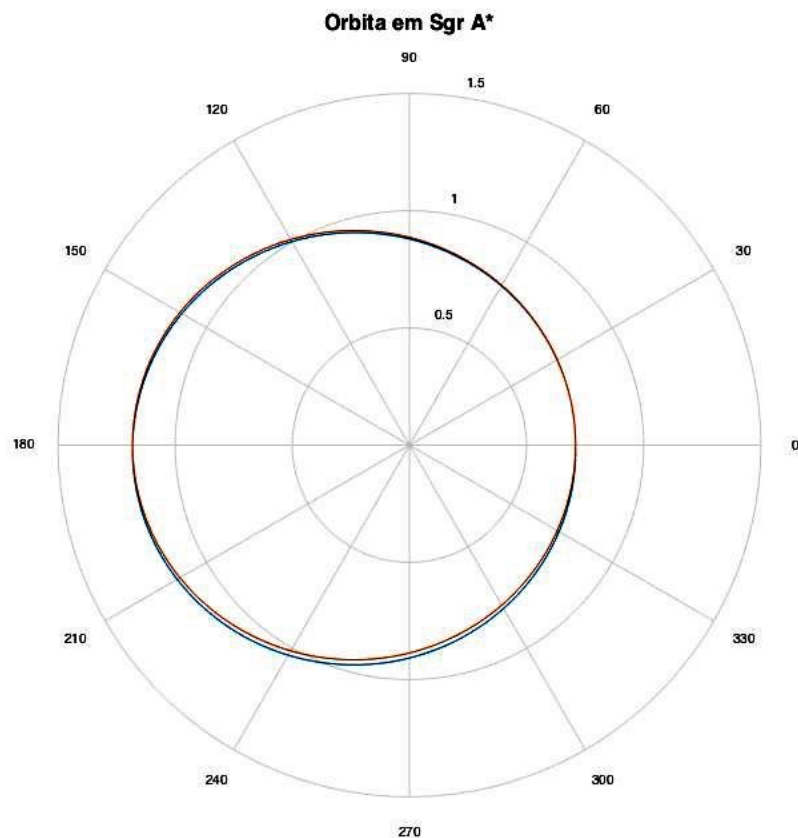


Figura 10: Plano polar da Órbita simulada em Sgr A*.

Foi simulado uma órbita similar a de Mercúrio em torno do Sol, com a mesma excentricidade de 0.2056, orbitando o corpo supermassivo com semi-eixo maior da órbita escolhido de 150 R_s , onde R_s é o Raio de Schwarzschild ($= 2M$), que mantém uma similaridade com a órbita de Mercúrio (Figura 10). Observa-se, a órbita clássica (em vermelho), muito próxima da órbita com as correções relativísticas (em azul), devido à escala. O valor do Δ para este caso é de 0.0656 rad/rev, consideravelmente maior que o valor obtido para Mercúrio. Portanto, o fato da presença de um corpo supermassivo no centro da órbita indica um aumento muito alto na precessão da órbita.

Para determinar uma órbita segura em torno do buraco negro, que chegue próximo o suficiente e seja estável, foi feito um estudo comparativo das órbitas variando a excentricidade, mantendo fixo os outros parâmetros orbitais em torno da mesma massa $M = 4 \times 10^6 \text{ MSol}$. Para este estudo foi escolhido um semi-eixo maior de 10 R_s .

As órbitas com linhas azuis tracejadas são a solução clássica, e as linhas cheias vermelhas mostram a comparação com a solução relativística. O efeito da precessão aumenta muito com o aumento da excentricidade, como era esperado, uma vez que Δ depende do inverso diferença $(1 - e^2)$ que diminuiu com o aumento de e .

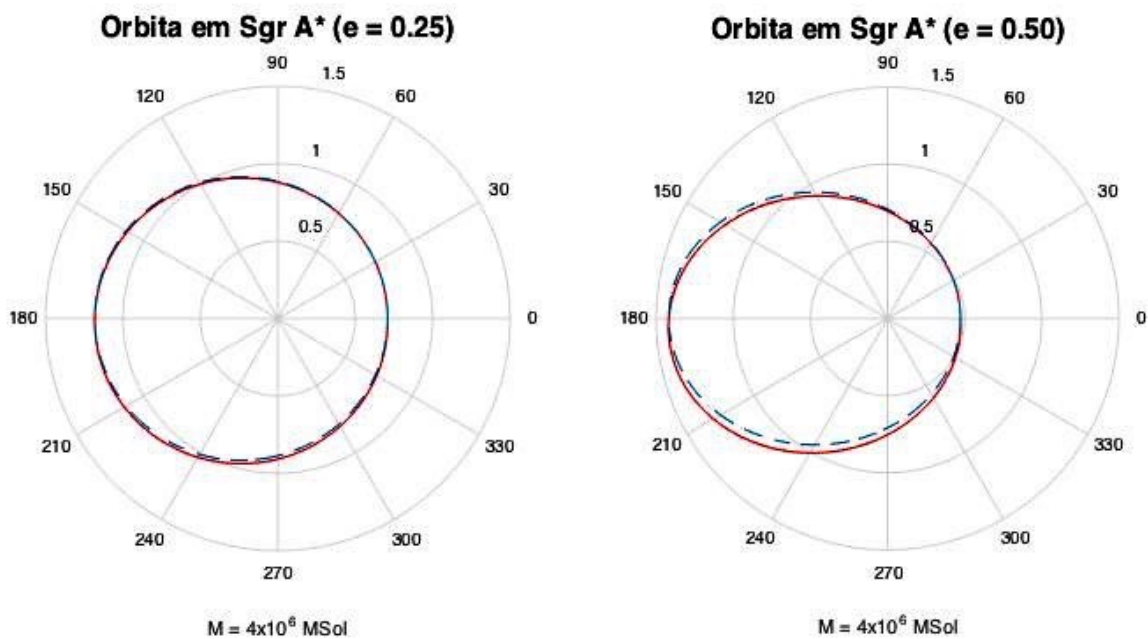


Figura 11.a: Variação da excentricidade em 0.25 e 0.50 em torno de Sgr A*.

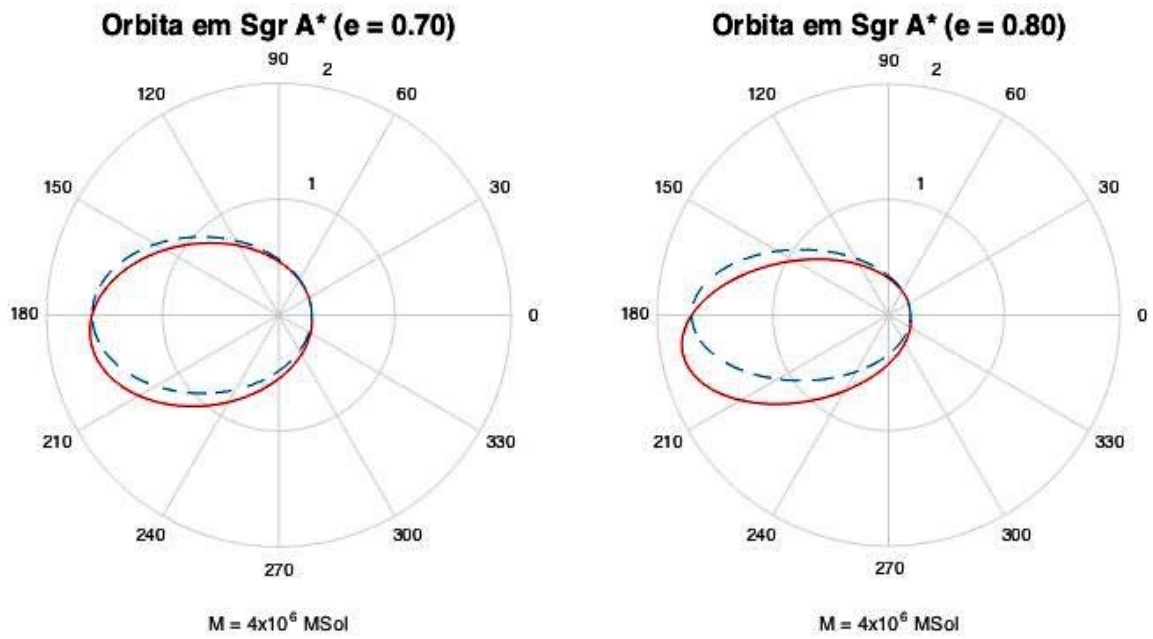


Figura 11.b: Variação da excentricidade em 0.70 e 0.80 em torno de Sgr A*.

Portanto a escolha de uma órbita estável e segura deve ser feita buscando órbitas com baixas excentricidades ou circulares ($e = 0$).

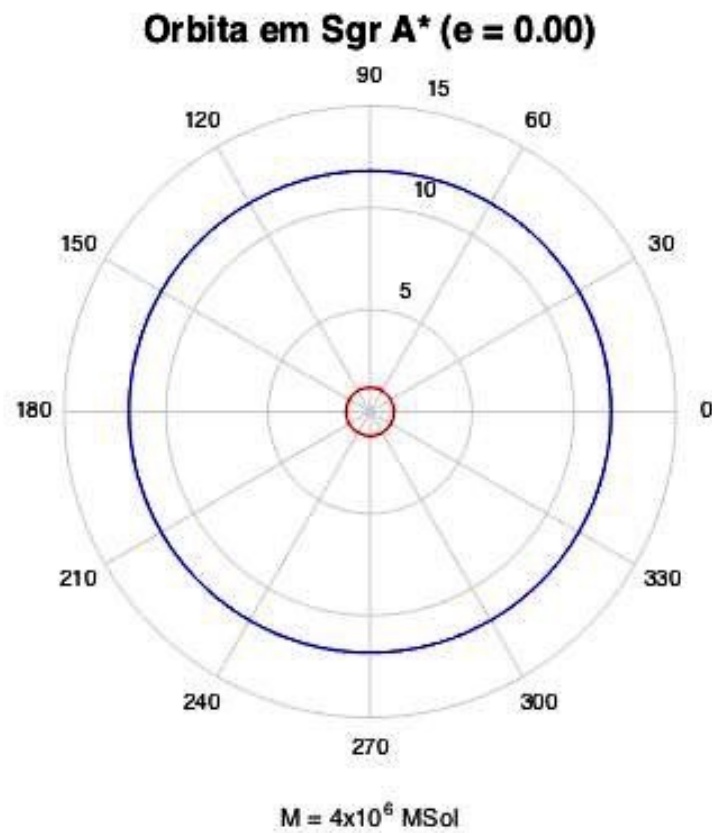


Figura 12: Órbita em Sgr A* com $e = 0$.

Em vermelho temos o horizonte de eventos em ($R = 2M$) e em azul uma órbita circular estável com $R = 10 R_s$. Devido à escala não é possível perceber o efeito da precessão que é muito pequeno, entretanto, a órbita não é totalmente fechada após uma revolução.

Na Figura 13 temos o potencial efetivo relativístico geral, descrito pelas equações deduzidas na seção 4.2.2, este tipo de órbita circular (Figura 12) se encontra no ponto mínimo local do potencial gravitacional em função do raio da órbita, garantindo a estabilidade da órbita circular.

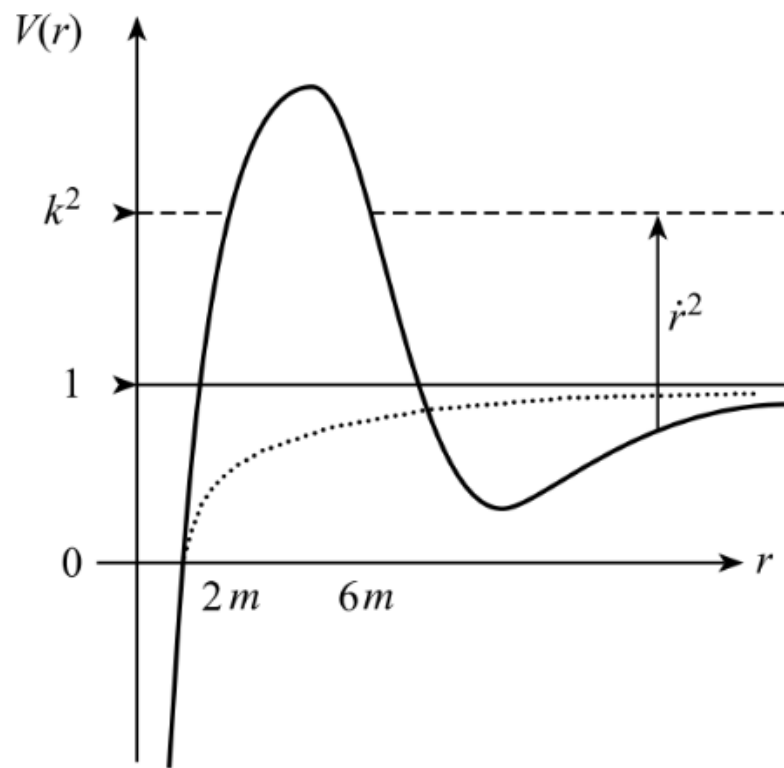


Figura 13: Potencial Efetivo Relativístico.

5.3 Equação do movimento em função do Tempo Próprio

A partir da equação (30.ii), podemos reescrever e separar as variáveis a fim de obter uma expressão para $\phi(\tau)$:

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{h}{r^2} \quad (47)$$

Onde $r = r(\phi)$ foi obtido na expressão (40) em u ($:= 1/r$) e τ é o tempo próprio.

Separando as variáveis temos:

$$d\tau = \frac{r^2(\phi)}{h} d\phi \quad (48)$$

Integrando,

$$\int_0^{\Delta\tau} d\tau = \int_{\phi_0}^{\phi_1} \frac{r^2(\phi)}{h} d\phi \quad (49)$$

De onde obtemos o intervalo de tempo próprio medido pela partícula enquanto variando um ângulo $\Delta\phi$ em sua órbita:

$$\Delta\tau = \frac{1}{h} \int_{\phi_0}^{\phi_1} \frac{1}{\left\{ \left(\frac{M}{h^2} \right) \left[1 + e (\cos \phi + \frac{3M^2}{h^2} \phi \sin \phi) \right] \right\}^2} d\phi \quad (50)$$

Integrando numericamente a expressão (50) obtêm-se uma relação para $\phi(\tau)$ que se substituída na expressão (40) retornará uma relação numérica para $r(\phi(\tau))$, assim podemos obter a posição medida pela partícula no tempo próprio ao longo de sua órbita.

Para obter o período de uma órbita (no tempo próprio), os intervalos de integração de (40) são de 0 a 2π . Resolvendo a integral para os dados de Mercúrio, o $\Delta\tau$ obtido foi de 7.6×10^6 segundos que corresponde a 87,96 dias terrestres (o valor confere com os dados da NASA para o período orbital de Mercúrio [10]).

Realizando o mesmo calculo para o tempo de uma órbita idêntica à de Mercúrio, apenas que orbitando agora Sgr A* ao invés do Sol, o valor obtido para o período orbital é de 81.94 minutos! Ou seja, as velocidades em torno do buraco negro supermassivo para realizar a mesma orbita são muito mais altas.

No caso da órbita circular escolhida, com excentricidade 0 e semi-eixo maior de 10 R_s , o período orbital calculado foi de 3.07 horas. A velocidade de escape nesse caso é de 0.33c (33% da velocidade da luz) e a velocidade orbital é de aproximadamente 20% da velocidade da luz. Estes valores altíssimos são devido ao gradiente gravitacional do buraco

negro supermassivo, uma vez que a expressão das velocidades depende da massa central, quanto maior a massa, maiores serão as velocidades atingidas.

6.CONCLUSÃO

Visto que no espaço de Schwarzschild a variedade de possíveis órbitas é muito maior do que as cônicas da mecânica Newtoniana, o estudo da energia de uma sonda vinda do infinito é importante para determinar quais tipos órbitas ligadas são possíveis e quais são mais estáveis e, portanto, seguras. A análise do potencial relativístico (seção 5.2.2) permite visualizar quais tipos de órbitas são possíveis no espaço de Schwarzschild, e a conclusão é que dependendo da massa central e do momento angular específico das órbitas com $r > R_s = 2M$, podemos ter órbitas ligadas “quase cônicas” dentro do poço de potencial (semelhante ao caso Newtoniano, adicionado a precessão), espalhamentos para energias menores que a barreira de potencial (que diferem das parábolas Newtonianas), e órbitas que caem dentro do horizonte de eventos (a partir de um certo instante de tempo próprio $r < R_s$) que possuem energia superior à barreira de potencial.

O interesse do ponto de vista da engenharia são órbitas ligadas e estáveis, portanto, é necessário que a energia da órbita escolhida se encontre dentro dos limites do poço de potencial para seus dados valores de M e h .

A segunda análise a ser feita é a intensidade de precessão da órbita e estabilidade radial variando os parâmetros orbitais (uma vez fixados M , a , e h). Como visto (seção 6.2), a excentricidade da órbita, bem como a velocidade atingida no periastro, afetam a intensidade da precessão da órbita, portanto, órbitas circulares são melhores escolhas para manter uma órbita estável com pouco Δ de precessão.

Aplicadas as teorias da relatividade geral para órbitas em torno de Sgr A* (buraco negro no centro da Via Láctea), escolhendo um semi-eixo maior da órbita de $10R_s$, temos que a órbita mais estável e que também possui menor Δ de precessão é com $e = 0$.

Ainda que para chegar num ponto na dada órbita leve muito tempo (devido à grande distância da Terra), as velocidades atingidas na órbita sejam altas, e o período de revolução

muito rápido, espera-se que um dia sondas possam ser levadas próximas a este ou a outros buracos negros para poder estudar mais de perto estes objetos astrofísicos. Um estudo semelhante a este deve ser feito para determinar a órbita ótima em torno do corpo a fim de cumprir os requisitos da missão.

7.REFERÊNCIAS

- [1] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, **Gravitation**. W. H. FREEMAN AND COMPANY, San Francisco (1993).
- [2] F. L. Kelemen, “**Estágios finais da Evolução Estelar: Estrelas de Nêutron e Buracos Negros**”. Iniciação Científica, Santo André (2014).
- [3] N. A. Lemos, **Mecânica Analítica**. Segunda Edição, LF Editorial (2007).
- [4] R. Steve, “**Lecture 10: Einstein Summation Convention**”, Oxford University, Department of Physics, Astrophysics. Vector Calculus Lectures (2008).
- [5] S. Winitzki, “**Advanced General Relativity Course**”, Lecture Notes, version 1.1 (2007).
- [6] S. Chandrasekhar, **The Mathematical Theory of Black Holes**. Oxford University Press, New York (1983).
- [7] H. S. Reall, **Black Holes**. Cambridge University, 2014.
- [8] J. B. Hartle, **GRAVITY An Introduction to Einstein’s General Relativity**. Addison Wesley, San Francisco (2003).
- [9] W. Rindler, **Relativity: Special, General, and Cosmological**. Sccond Edition. Oxford University Press, Dallas (2006)
- [10] NASA’s Mercury Fact Sheet (<http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/mercuryfact.html>)

ANEXOS

ANEXO A - DETALHAMENTO DO CÁLCULO DA PRECESSÃO DO PERIÉLIO DE MERCÚRIO.

A expressão do Δ deduzida na seção (5.3), em unidades padrão, para a solução relativística da órbita de Mercúrio fornece a variação angular da órbita a cada revolução:

$$\Delta = \frac{6\pi Gm}{ac^2(1-e^2)} \quad (51)$$

Onde, G é a constante gravitacional, m é a massa do Sol, a é o semi-eixo maior da órbita do planeta, e é a excentricidade e c é a velocidade da luz. Para Mercúrio, os valores são:

$$m = 1.99 \times 10^{30} kg$$

$$e = 0.2056$$

$$a = 57.91 \times 10^9 m$$

E as constantes são:

$$G = 6.67 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$$

$$c = 2.9979 \times 10^8 m/s$$

Substituindo estes valores na expressão (51), temos:

$$\Delta = 5.046 \times 10^{-7} rad/rev$$

Foi calculado na seção (6.3) que o período orbital (T) de Mercúrio é de 87.96 dias para uma revolução. Sabendo que 1 século possui aproximadamente 36525 dias (então Mercúrio dá 415 revoluções em torno do Sol por século), e ainda 1 radiano corresponde a 206265 segundos de arco, transformamos as unidades de Δ :

$$\Delta = 2.094 \times 10^{-4} rad/sec \cong 43.19''/sec$$

Este é o valor medido na prática e que corrobora o teste da teoria de Einstein, explicando a discrepância da órbita de Mercúrio.

ANEXO B - ÓRBITAS QUE ESPIRALAM.

Considerando uma órbita radial de uma partícula em queda livre ($h = 0$ e $k = 0$), a partir da expressão (33), chegamos que:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \frac{m}{r} = 0 \quad (52)$$

Reescrevendo, temos que:

$$r^{1/2} dr = -(2m)^{1/2} d\tau \quad (53)$$

Integrando ambos os lados e fixando o tempo próprio da partícula quando $r = 0$ como sendo uma constante (τ^* aqui escolhida como 100), chegamos na expressão de $r(\tau)$:

$$r(\tau) = (3/2)^{(2/3)} (2M)^{(1/3)} (\tau^* - \tau)^{(2/3)} \quad (54)$$

A equação (54) mostra que a partícula em queda livre vinda do infinito demora um tempo próprio finito para atingir o horizonte de eventos ($r = R_s = 2M$).

Utilizando a métrica, podemos transformar (53) para obter $r(t)$:

$$\frac{dt}{dr} = - \left(\frac{2m}{r} \right)^{-1/2} \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} \quad (55)$$

Separando as variáveis e integrando nos mesmos moldes da expressão (54), obtemos $r(t)$ implicitamente:

$$t = t_* + 2m \left[-\frac{2}{3} \left(\frac{r}{2m} \right)^{3/2} - 2 \left(\frac{r}{2m} \right)^{1/2} + \log \left| \frac{(r/2m)^{1/2} + 1}{(r/2m)^{1/2} - 1} \right| \right] \quad (56)$$

Podemos notar que $r \rightarrow \infty$, quando $t \rightarrow -\infty$, e portanto, levaria um tempo infinito em coordenadas t para o corpo atingir o horizonte de eventos vindo do infinito, ou seja, um observador externo nunca vê o corpo atingir o horizonte de eventos.

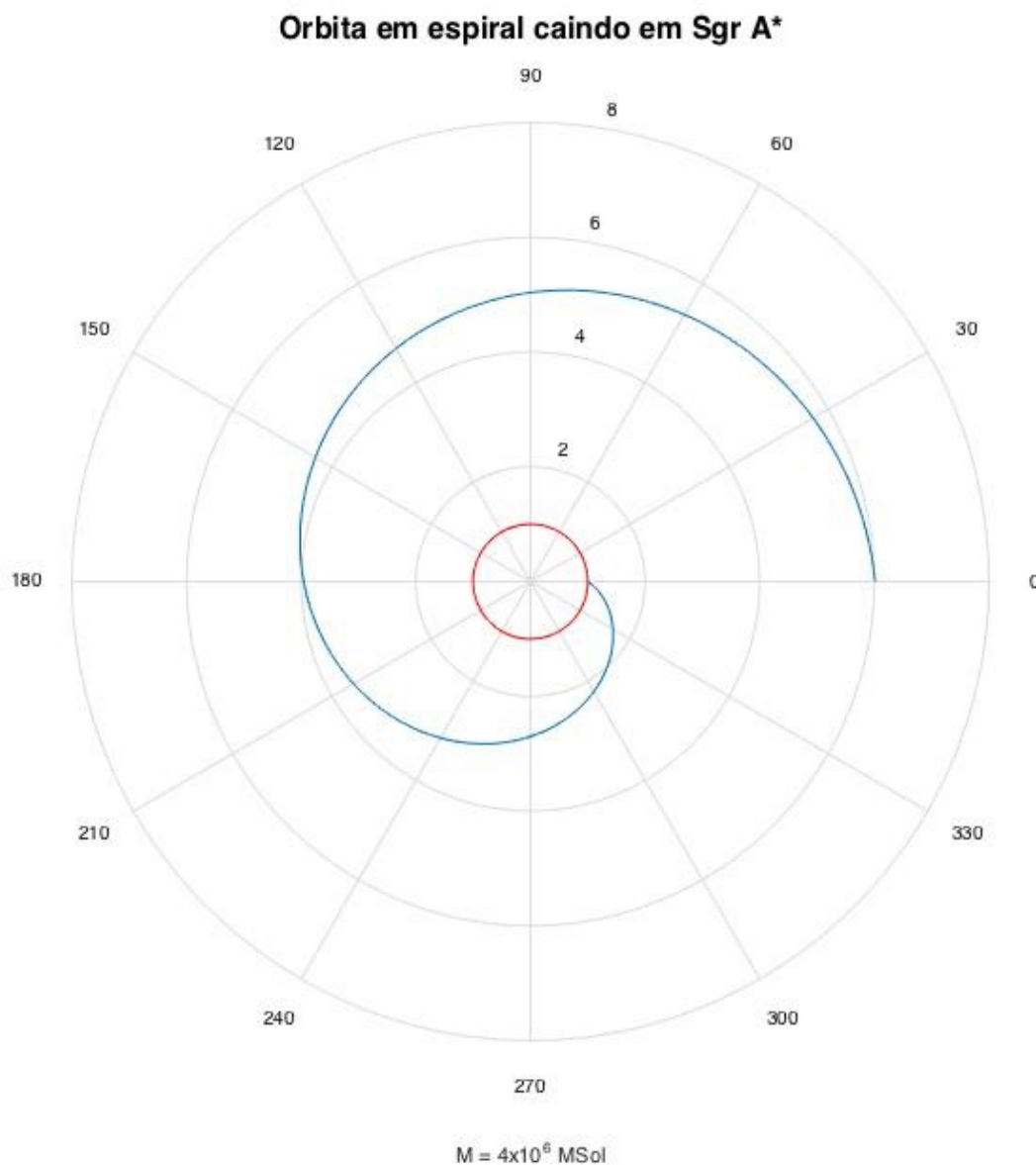


Figura 14: Órbita em espiral caindo no horizonte de eventos de Sgr A*.

Orbitando Sgr A*, foi feita uma simulação num tempo próprio finito com 100 passos de integração para obter a forma da órbita em espiral que cai no horizonte de eventos do buraco negro num tempo próprio finito.

Portanto, uma partícula vinda do infinito em queda livre radial, cai em uma órbita espiral (em azul) em direção ao horizonte de eventos (em vermelho). A escala do gráfico está em função do raio da órbita por unidades do raio de Schwarzschild.

A queda pode ser evitada entrando em uma órbita estável (chegando com energia menor que a barreira de potencial, especificamente, dentro do poço de potencial que varia de acordo como fator do momento angular específico com a massa central $[h/M]$).