Nome:

Exercício	Pontos
1	
2	
3	
4	
Total	

GABARITO DA PROVA 1 (25/03/2024)
Álgebra Linear
Prof. Cristian F. Coletti
1o Quadrimestre 2024

- Tente resolver todas as questões, mas priorize a qualidade da sua resolução. Boa qualidade em pouca quantidade é melhor do que muita quantidade com pouca qualidade.
- É permitido consultar uma folha de anotações. É terminantemente proibido consultar o colega e usar celular, relógio inteligente ecalculadora.

Exercícios

Ex. 1 — Seja $V = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \text{ e } y > 0\}$. Considere em V a seguinte operação binária

$$(x, y) \boxplus (u, v) = (x + u - 1, yv).$$

(a)(Valor: 1 ponto) Calcule o elemento neutro com respeito à operação binária $\boxplus$. Justifique a sua resposta.
O par (e_1, e_2) é elemento neutro para $\boxplus$ se

$$(x, y) \boxplus (e_1, e_2) = (x, y) = (e_1, e_2) \boxplus (x, y).$$

Agora note que $(x, y) \boxplus (e_1, e_2) = (x, y)$ se e somente se $x + e_1 - 1 = x$ e $ye_2 = y$ se e somente se $e_1 = 1$ e $e_2 = 1$.

(b)(Valor: 1 ponto) Calcule o inverso (com relação à operação $\boxplus$) de $(2y + 1, 2y)$ onde $y > 0$. Justifique a sua resposta.
O par (u, v) é o inverso de (x, y) com relação a $\boxplus$ se

$$(x, y) \boxplus (u, v) = (e_1, e_2) = (1, 1).$$

Desta forma, (u, v) é o inverso aditivo, com relação à operação $\boxplus$, de $(2y + 1, 2y)$ se as seguintes equações são satisfeitas

$$(2y + 1) + u - 1 = 1 \text{ e } 2yv = 1.$$

Resolvendo as equações acima concluimos que $u = 1 - 2y$ e que $v = 1/(2y)$.

Ex. 2 — (Valor 2,5 pontos) Seja V_1 o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$ dado por

$$\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : 2y + 3z - 11w = 0 \text{ e } x = 0\}.$$

Seja V_2 o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$ dado por

$$\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : z = 0 \text{ e } x - y + w = 0\}.$$

(a)Decida se $\mathbb{R}^4 = V_1 \oplus V_2$ ou não. Justifique a sua resposta.
Observe que $(x, y, z, w) \in V_1$ se e somente se $2y + 3z - 11w = 0$ e $x = 0$. Isto é, um elemento genérico de V_1 é da forma

$$(0, y, z, (2y + 3Z)/11) = y(0, 1, 0, 2/11, 0) + z(0, 0, 1, 3/11)$$

Observe que estes dois vetores geram V_1 e são L.I. Logo formam uma base para V_1. Dai tem-se que $dim(V_1) = 2$. Um argumento análogo mostra que $dim(V_2) = 2$.
Por outro lado, $(x, y, z, w) \in V_1 \cap V_2$ se e somente se $x = 0, z = 0$, $27 - 11w = 0$ e $-y + w = 0$ Por tanto, $y = w = 2/11y$ dai $y = 0$ e como $w = y$ tem-se que $w = 0$. Portanto, se $(x, y, z, w) \in V_1 \cap V_2$, então $(x, y, z, w) = (0, 0, 0, 0)$. Dai podemos concluir que $V_1 \cap V_2 = \{(0, 0, 0, 0)\}$. Assim,

$$dim(V_1 + V_2) = dim(V_1) + dim(V_2) - dim(V_1 \cap V_2) = 2 + 2 - 0 = 4.$$

Portanto, $V_1 + V_2$ é um subespaço de $\mathbb{R}^4$ de dimesão 4. Como $dim(\mathbb{R}^4) = 4$, concluimos que

$$\mathbb{R}^4 = V_1 + V_2.$$

Como $V_1 \cap V_2 = \{(0, 0, 0, 0)\}$ tem-se que

$$\mathbb{R}^4 = V_1 \oplus V_2.$$

Ex. 3 — Seja $W \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definido por $W = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : A_{12} + A_{21} + A_{22} = 0\}$

(a)(Valor: 2,5 pontos) Verifique que W é um subespaço vetorial de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e exiba uma base de W. Justifique sua resposta.

- Como $0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ é imediato ver que $0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \in W$.
- Sejam A e B em W. Queremos ver que $A + B \in W$. Agora, $(A + B)_{12} + (A + B)_{21} + (A + B)_{22} = (A_{12} + A_{21} + A_{22}) + (B_{12} + B_{21} + b_{22}) = 0 + 0 = 0$ pois tanto A como B pertencem a W. Dai conclimos que W é fechada para a soma.
- Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e A em W. Queremos ver que $\alpha A \in W$. Agora, $(\alpha A)_{12} + (\alpha A)_{21} + (\alpha A)_{22} = \alpha(A_{12} + A_{21} + A_{22}) = \alpha 0 = 0$ pois $A \in W$. Dai concluimos que W é fechada para o produto por escalar.

Em outras palavras, W é um subspaço vetorial de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Segue das condições que definem W que todo elemento $A \in W$ pode ser escrito da seguinte forma

$$A_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + A_{21}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + A_{22}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

É facil ver que as três matrices acima formam uma base para W (Geram W e são L.I.). Dai concluimos que $\dim(W) = 3$.

(b)(Valor: 2 pontos) Seja $U = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : A_{11} + 2A_{21} + 3A_{22} = 0\}$ um subespaço vetorial de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Qual é a dimensão de $U \cap W$? Justifique a sua resposta.

Segue das condições que definem U que todo elemento $A \in U$ pode ser escrito da seguinte forma

$$A_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix} + A_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + A_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2/3 \end{pmatrix}$$

É facil ver que as três matrices acima formam uma base para U (Geram U e são L.I.). Dai concluimos que $\dim(U) = 3$.
Finalmente, se $A \in W \cap U$ então após alguns cálculos é facil ver que

$$A = A_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + A_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como estas duas matrices são L.I. e geram $W \cap U$ cocnluimos que formam uma baase e dai tem-se que $\dim(W \cap U) = 2$.

Ex. 4 — Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a)(2 pontos) Calcule a inversa de A usando o método de eliminação Gausss - Jordan. Justifique a sua resposta.
A matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

é linha equivalente à matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/10 & 3/10 & 1/10 \\ 0 & 1 & 0 & -7/10 & -1/10 & 3/10 \\ 0 & 0 & 1 & -5/10 & -5/10 & 5/10 \end{pmatrix}$$

e, portanto, A^{-1} é igual a seguinte matriz

$$\begin{pmatrix} 1/10 & 3/10 & 1/10 \\ -7/10 & -1/10 & 3/10 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(b)(1 pontos) Resolva o sistema de equações abaixo utilizando a informação obtida no item anterior. Justifique a sua resposta.

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

Observe que a matriz ampliada do sistema de equações acima é dada por

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que é linha equivalente à matriz ampliada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, o vetor solução é simplesmente a segunda coluna da matriz inversa.