Espaços Vetoriais

Espaços Finitamente Gerados

Álgebra Linear

Mariana Silveira - Cristian Coletti

Universidade Federal do ABC

Encontrando geradores para um espaço.

Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real e $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$.

- O conjunto de todas as combinações lineares de elementos de S

$$[S] = \{\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n,\ \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$$

  é um subespaço vetorial de V chamado espaço gerado por S. Os elementos de S são chamados geradores de $[S]$.
- $[S]$ é o menor subespaço de V que contém S.

g_1. W é subespaço, $S \subset W \Rightarrow [S] \subset W$.

Obs: Dados $S_1, S_2 \subset V$, para mostrar que $[S_1] \subset [S_2]$, basta mostrar que $S_1 \subset [S_2]$ e aplicar g_1.

Pergunta: Dado V um espaço vetorial e $S \subset V$, como saber se S é um conjunto de geradores para V?

Encontrando geradores para um espaço.

Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real e $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$.

- O conjunto de todas as combinações lineares de elementos de S

$$[S] = \{\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n,\ \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$$

  é um subespaço vetorial de V chamado espaço gerado por S. Os elementos de S são chamados geradores de $[S]$.

- $[S]$ é o menor subespaço de V que contém S.

g_1. W é subespaço, $S \subset W \Rightarrow [S] \subset W$.

Obs: Dados $S_1, S_2 \subset V$, para mostrar que $[S_1] \subset [S_2]$, basta mostrar que $S_1 \subset [S_2]$ e aplicar g_1.

Pergunta: Dado V um espaço vetorial e $S \subset V$, como saber se S é um conjunto de geradores para V?

Encontrando geradores para um espaço.

Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real e $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$.

- O conjunto de todas as combinações lineares de elementos de S

$$[S] = \{\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n,\ \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$$

  é um subespaço vetorial de V chamado espaço gerado por S. Os elementos de S são chamados geradores de $[S]$.

- $[S]$ é o menor subespaço de V que contém S.

g_1. W é subespaço, $S \subset W \Rightarrow [S] \subset W$.

Obs: Dados $S_1, S_2 \subset V$, para mostrar que $[S_1] \subset [S_2]$, basta mostrar que $S_1 \subset [S_2]$ e aplicar g_1.

Pergunta: Dado V um espaço vetorial e $S \subset V$, como saber se S é um conjunto de geradores para V?

Encontrando geradores para um espaço.

Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real e $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$.

- O conjunto de todas as combinações lineares de elementos de S

$$[S] = \{\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n, \ \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$$

  é um subespaço vetorial de V chamado espaço gerado por S. Os elementos de S são chamados geradores de $[S]$.
- $[S]$ é o menor subespaço de V que contém S.

g_1. W é subespaço, $S \subset W \Rightarrow [S] \subset W$.

Obs: Dados $S_1, S_2 \subset V$, para mostrar que $[S_1] \subset [S_2]$, basta mostrar que $S_1 \subset [S_2]$ e aplicar g_1.

Pergunta: Dado V um espaço vetorial e $S \subset V$, como saber se S é um conjunto de geradores para V?

Encontrando geradores para um espaço.

Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real e $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$.

- O conjunto de todas as combinações lineares de elementos de S

  $$[S] = \{\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n,\ \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$$

  é um subespaço vetorial de V chamado espaço gerado por S. Os elementos de S são chamados geradores de $[S]$.
- $[S]$ é o menor subespaço de V que contém S.

g_1. W é subespaço, $S \subset W \Rightarrow [S] \subset W$.

Obs: Dados $S_1, S_2 \subset V$, para mostrar que $[S_1] \subset [S_2]$, basta mostrar que $S_1 \subset [S_2]$ e aplicar g_1.

Pergunta: Dado V um espaço vetorial e $S \subset V$, como saber se S é um conjunto de geradores para V?

Exemplos

1. $V = \mathbb{R}^2$. Dado $S_1 = \{(1,0),(0,1)\}$, vimos que $[S_1] = \mathbb{R}^2$.

   Para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ temos que $(x,y) = x(1,0) + y(0,1) \in [S_1]$

- $S_2 = \{(1,1),(0,1)\}$. $[S_2] = \mathbb{R}^2$??

Modo 1

$[S_2] = \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \exists\, \alpha, \beta$ tais que

$(x,y) = \alpha(1,1) + \beta(0,1)$

$$\begin{cases} x &= \alpha \\ y &= \alpha + \beta \end{cases} \Leftrightarrow$$

O sistema em α e β tem solução para todo $x, y \in \mathbb{R}$ $\longleftarrow$

O sistema tem solução

$\alpha = x$

$\beta = y - x$

Assim, $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\exists\, \alpha = x$, $\beta = y - x$ tais que

$(x,y) = x(1,1) + (y-x)(0,1)$.

Portanto $[S_2] = \mathbb{R}^2$.

Exemplos

1. $V = \mathbb{R}^2$. Dado $S_1 = \{(1,0),(0,1)\}$, vimos que $[S_1] = \mathbb{R}^2$.

   Para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ temos que $(x,y) = x(1,0) + y(0,1) \in [S_1]$

- $S_2 = \{(1,1),(0,1)\}$. $[S_2] = \mathbb{R}^2$??

Modo 1

$[S_2] = \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \exists\, \alpha, \beta$ tais que

$(x,y) = \alpha(1,1) + \beta(0,1)$

$$\begin{cases} x &= \alpha \\ y &= \alpha + \beta \end{cases} \Leftrightarrow$$

O sistema em α e β tem solução para todo $x, y \in \mathbb{R}$ $\longleftarrow$

O sistema tem solução

$$\alpha = x$$
$$\beta = y - x$$

Assim, $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\exists\, \alpha = x$, $\beta = y - x$ tais que

$(x,y) = x(1,1) + (y-x)(0,1)$.

Portanto $[S_2] = \mathbb{R}^2$.

Exemplos

1. $V = \mathbb{R}^2$. Dado $S_1 = \{(1,0),(0,1)\}$, vimos que $[S_1] = \mathbb{R}^2$.

   Para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ temos que $(x,y) = x(1,0) + y(0,1) \in [S_1]$

- $S_2 = \{(1,1),(0,1)\}$. $[S_2] = \mathbb{R}^2$??

Modo 1

$[S_2] = \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \exists\, \alpha, \beta$ tais que

$(x,y) = \alpha(1,1) + \beta(0,1)$

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha + \beta \end{cases} \Leftrightarrow$$

O sistema em α e β tem solução para todo $x, y \in \mathbb{R}$ $\longleftarrow$

O sistema tem solução

$\alpha = x$

$\beta = y - x$

Assim, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \exists\, \alpha = x,\ \beta = y - x$ tais que

$(x,y) = x(1,1) + (y-x)(0,1)$.

Portanto $[S_2] = \mathbb{R}^2$.

Exemplos

1. $V = \mathbb{R}^2$. Dado $S_1 = \{(1,0),(0,1)\}$, vimos que $[S_1] = \mathbb{R}^2$.

   Para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ temos que $(x,y) = x(1,0) + y(0,1) \in [S_1]$

- $S_2 = \{(1,1),(0,1)\}$. $[S_2] = \mathbb{R}^2$??

Modo 1

$[S_2] = \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \exists\, \alpha, \beta$ tais que

$(x,y) = \alpha(1,1) + \beta(0,1)$

$$\begin{cases} x &= \alpha \\ y &= \alpha + \beta \end{cases} \Leftrightarrow$$

O sistema em α e β tem solução para todo $x, y \in \mathbb{R}$ $\longleftarrow$

O sistema tem solução

$\alpha = x$

$\beta = y - x$

Assim, $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\exists\, \alpha = x$, $\beta = y - x$ tais que

$(x,y) = x(1,1) + (y-x)(0,1)$.

Portanto $[S_2] = \mathbb{R}^2$.

Exemplos

1. $V = \mathbb{R}^2$. Dado $S_1 = \{(1,0),(0,1)\}$, vimos que $[S_1] = \mathbb{R}^2$.

   Para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ temos que $(x,y) = x(1,0) + y(0,1) \in [S_1]$

- $S_2 = \{(1,1),(0,1)\}$. $[S_2] = \mathbb{R}^2$??

Modo 1

$[S_2] = \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\exists\, \alpha, \beta$ tais que

$(x,y) = \alpha(1,1) + \beta(0,1)$

$$\begin{cases} x &= \alpha \\ y &= \alpha + \beta \end{cases} \Leftrightarrow$$

O sistema em α e β tem solução para todo $x, y \in \mathbb{R}$ $\leftarrow$

O sistema tem solução

$$\alpha = x$$
$$\beta = y - x$$

Assim, $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\exists\, \alpha = x$, $\beta = y - x$ tais que

$(x,y) = x(1,1) + (y-x)(0,1)$.

Portanto $[S_2] = \mathbb{R}^2$.

Exemplos

1. $V = \mathbb{R}^2$. Dado $S_1 = \{(1,0),(0,1)\}$, vimos que $[S_1] = \mathbb{R}^2$.

   Para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ temos que $(x,y) = x(1,0) + y(0,1) \in [S_1]$

- $S_2 = \{(1,1),(0,1)\}$. $[S_2] = \mathbb{R}^2$??

Modo 1

$[S_2] = \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \exists\, \alpha, \beta$ tais que

$(x,y) = \alpha(1,1) + \beta(0,1)$

$$\begin{cases} x &= \alpha \\ y &= \alpha + \beta \end{cases} \Leftrightarrow$$

O sistema em α e β tem solução para todo $x, y \in \mathbb{R}$ $\leftarrow$

O sistema tem solução

$$\begin{aligned} \alpha &= x \\ \beta &= y - x \end{aligned}$$

Assim, $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\exists\,\alpha = x$, $\beta = y - x$ tais que

$(x,y) = x(1,1) + (y-x)(0,1)$.

Portanto $[S_2] = \mathbb{R}^2$.

Exemplos

1. $V = \mathbb{R}^2$. Dado $S_1 = \{(1,0),(0,1)\}$, vimos que $[S_1] = \mathbb{R}^2$.

   Para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ temos que $(x,y) = x(1,0) + y(0,1) \in [S_1]$

- $S_2 = \{(1,1),(0,1)\}$. $[S_2] = \mathbb{R}^2$??

Modo 1

$[S_2] = \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\exists\, \alpha, \beta$ tais que

$(x,y) = \alpha(1,1) + \beta(0,1)$

$\begin{cases} x &= \alpha \\ y &= \alpha + \beta \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ O sistema em α e β tem solução para todo $x, y \in \mathbb{R}$ $\leftarrow$

O sistema tem solução

$\alpha = x$

$\beta = y - x$

Assim, $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\exists\, \alpha = x$, $\beta = y - x$ tais que

$(x,y) = x(1,1) + (y-x)(0,1)$.

Portanto $[S_2] = \mathbb{R}^2$.

Exemplos

1. $V = \mathbb{R}^2$. Dado $S_1 = \{(1,0),(0,1)\}$, vimos que $[S_1] = \mathbb{R}^2$.

   Para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ temos que $(x,y) = x(1,0) + y(0,1) \in [S_1]$

- $S_2 = \{(1,1),(0,1)\}$. $[S_2] = \mathbb{R}^2$??

Modo 1

$[S_2] = \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\exists\, \alpha, \beta$ tais que

$(x,y) = \alpha(1,1) + \beta(0,1)$

$$\begin{cases} x &= \alpha \\ y &= \alpha + \beta \end{cases} \Leftrightarrow$$

O sistema em α e β tem solução para todo $x, y \in \mathbb{R}$ $\leftarrow$

O sistema tem solução

$$\begin{aligned} \alpha &= x \\ \beta &= y - x \end{aligned}$$

Assim, $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\exists\, \alpha = x$, $\beta = y - x$ tais que

$(x,y) = x(1,1) + (y-x)(0,1)$.

Portanto $[S_2] = \mathbb{R}^2$.

Exemplos

Modo 2

Dado $S_1 = \{(1,0),(0,1)\}$, vimos que $[S_1] = \mathbb{R}^2$.

Seja $S_2 = \{(1,1),(0,1)\}$.

Queremos mostrar que $[S_2] = \mathbb{R}^2$, ou seja, $[S_1] = [S_2]$. $\leftarrow$ $S_1 \subset [S_2] \overset{g_1}{\Rightarrow} [S_1] \subset [S_2]$

Pela propriedade g_1, basta mostrar que $S_1 \subset [S_2]$.

$(1,0) = 1(1,1) - 1(0,1)$,

$(0,1) = 0(1,1) + 1(0,1)$. Portanto $[S_2] = \mathbb{R}^2$.

- $S_3 = \{(1,0),(2,0)\}$. $[S_3] = \underbrace{\mathbb{R}^2}_{[S_1]}$??

Pela propriedade g_1, para mostrar que $[S_3] = [S_1]$ basta mostrar que $S_1 \subset [S_3]$.

$(1,0) = 1(1,0) + 0(2,0)$

$(0,1) \notin [S_3]$

Portanto $[S_3] \subsetneq \mathbb{R}^2$.

Exemplos

Modo 2

Dado $S_1 = \{(1,0),(0,1)\}$, vimos que $[S_1] = \mathbb{R}^2$.

Seja $S_2 = \{(1,1),(0,1)\}$.

Queremos mostrar que $[S_2] = \mathbb{R}^2$, ou seja, $[S_1] = [S_2]$. $\leftarrow$ $S_1 \subset [S_2] \overset{g_1}{\Rightarrow} [S_1] \subset [S_2]$

Pela propriedade g_1, basta mostrar que $S_1 \subset [S_2]$.

$(1,0) = 1(1,1) - 1(0,1)$,

$(0,1) = 0(1,1) + 1(0,1)$. Portanto $[S_2] = \mathbb{R}^2$.

- $S_3 = \{(1,0),(2,0)\}$. $[S_3] = \underbrace{\mathbb{R}^2}_{[S_1]}$??

Pela propriedade g_1, para mostrar que $[S_3] = [S_1]$ basta mostrar que $S_1 \subset [S_3]$.

$(1,0) = 1(1,0) + 0(2,0)$

$(0,1) \notin [S_3]$

Portanto $[S_3] \subsetneq \mathbb{R}^2$.

Exemplos

Modo 2

Dado $S_1 = \{(1,0),(0,1)\}$, vimos que $[S_1] = \mathbb{R}^2$.

Seja $S_2 = \{(1,1),(0,1)\}$.

Queremos mostrar que $[S_2] = \mathbb{R}^2$, ou seja, $[S_1] = [S_2]$. $\leftarrow$ $S_1 \subset [S_2] \overset{g_1}{\Rightarrow} [S_1] \subset [S_2]$

Pela propriedade g_1, basta mostrar que $S_1 \subset [S_2]$.

$(1,0) = 1(1,1) - 1(0,1)$,

$(0,1) = 0(1,1) + 1(0,1)$. Portanto $[S_2] = \mathbb{R}^2$.

- $S_3 = \{(1,0),(2,0)\}$. $[S_3] = \underbrace{\mathbb{R}^2}_{[S_1]}$??

Pela propriedade g_1, para mostrar que $[S_3] = [S_1]$ basta mostrar que $S_1 \subset [S_3]$.

$(1,0) = 1(1,0) + 0(2,0)$

$(0,1) \notin [S_3]$

Portanto $[S_3] \subsetneq \mathbb{R}^2$.

Exemplos

Modo 2

Dado $S_1 = \{(1,0),(0,1)\}$, vimos que $[S_1] = \mathbb{R}^2$.

Seja $S_2 = \{(1,1),(0,1)\}$.

Queremos mostrar que $[S_2] = \mathbb{R}^2$, ou seja, $[S_1] = [S_2]$. $\leftarrow$ $S_1 \subset [S_2] \overset{g_1}{\Rightarrow} [S_1] \subset [S_2]$

Pela propriedade g_1, basta mostrar que $S_1 \subset [S_2]$.

$(1,0) = 1(1,1) - 1(0,1)$,

$(0,1) = 0(1,1) + 1(0,1)$. Portanto $[S_2] = \mathbb{R}^2$.

- $S_3 = \{(1,0),(2,0)\}$. $[S_3] = \underbrace{\mathbb{R}^2}_{[S_1]}$??

Pela propriedade g_1, para mostrar que $[S_3] = [S_1]$ basta mostrar que $S_1 \subset [S_3]$.

$(1,0) = 1(1,0) + 0(2,0)$

$(0,1) \notin [S_3]$

Portanto $[S_3] \subsetneq \mathbb{R}^2$.

Exemplos

Modo 2

Dado $S_1 = \{(1,0),(0,1)\}$, vimos que $[S_1] = \mathbb{R}^2$.

Seja $S_2 = \{(1,1),(0,1)\}$.

Queremos mostrar que $[S_2] = \mathbb{R}^2$, ou seja, $[S_1] = [S_2]$. $\leftarrow$ $S_1 \subset [S_2] \overset{g_1}{\Rightarrow} [S_1] \subset [S_2]$

Pela propriedade g_1, basta mostrar que $S_1 \subset [S_2]$.

$(1,0) = 1(1,1) - 1(0,1)$,

$(0,1) = 0(1,1) + 1(0,1)$. Portanto $[S_2] = \mathbb{R}^2$.

- $S_3 = \{(1,0),(2,0)\}$. $[S_3] = \underbrace{\mathbb{R}^2}_{[S_1]}$??

Pela propriedade g_1, para mostrar que $[S_3] = [S_1]$ basta mostrar que $S_1 \subset [S_3]$.

$(1,0) = 1(1,0) + 0(2,0)$

$(0,1) \notin [S_3]$

Portanto $[S_3] \subsetneq \mathbb{R}^2$.

Exemplos

Modo 2

Dado $S_1 = \{(1,0),(0,1)\}$, vimos que $[S_1] = \mathbb{R}^2$.

Seja $S_2 = \{(1,1),(0,1)\}$.

Queremos mostrar que $[S_2] = \mathbb{R}^2$, ou seja, $[S_1] = [S_2]$. $\leftarrow$ $S_1 \subset [S_2] \overset{g_1}{\Rightarrow} [S_1] \subset [S_2]$

Pela propriedade g_1, basta mostrar que $S_1 \subset [S_2]$.

$(1,0) = 1(1,1) - 1(0,1)$,

$(0,1) = 0(1,1) + 1(0,1)$. Portanto $[S_2] = \mathbb{R}^2$.

- $S_3 = \{(1,0),(2,0)\}$. $[S_3] = \underbrace{\mathbb{R}^2}_{[S_1]}$??

Pela propriedade g_1, para mostrar que $[S_3] = [S_1]$ basta mostrar que $S_1 \subset [S_3]$.

$(1,0) = 1(1,0) + 0(2,0)$

$(0,1) \notin [S_3]$

Portanto $[S_3] \subsetneq \mathbb{R}^2$.

Exemplos

Modo 2

Dado $S_1 = \{(1,0),(0,1)\}$, vimos que $[S_1] = \mathbb{R}^2$.

Seja $S_2 = \{(1,1),(0,1)\}$.

Queremos mostrar que $[S_2] = \mathbb{R}^2$, ou seja, $[S_1] = [S_2]$. $\leftarrow$ $S_1 \subset [S_2] \overset{g_1}{\Rightarrow} [S_1] \subset [S_2]$

Pela propriedade g_1, basta mostrar que $S_1 \subset [S_2]$.

$(1,0) = 1(1,1) - 1(0,1)$,

$(0,1) = 0(1,1) + 1(0,1)$. Portanto $[S_2] = \mathbb{R}^2$.

- $S_3 = \{(1,0),(2,0)\}$. $[S_3] = \underbrace{\mathbb{R}^2}_{[S_1]}$??

Pela propriedade g_1, para mostrar que $[S_3] = [S_1]$ basta mostrar que $S_1 \subset [S_3]$.

$(1,0) = 1(1,0) + 0(2,0)$

$(0,1) \notin [S_3]$

Portanto $[S_3] \subsetneq \mathbb{R}^2$.

Exemplos

Modo 2

Dado $S_1 = \{(1,0),(0,1)\}$, vimos que $[S_1] = \mathbb{R}^2$.

Seja $S_2 = \{(1,1),(0,1)\}$.

Queremos mostrar que $[S_2] = \mathbb{R}^2$, ou seja, $[S_1] = [S_2]$. $\leftarrow$ $S_1 \subset [S_2] \overset{g_1}{\Rightarrow} [S_1] \subset [S_2]$

Pela propriedade g_1, basta mostrar que $S_1 \subset [S_2]$.

$(1,0) = 1(1,1) - 1(0,1)$,

$(0,1) = 0(1,1) + 1(0,1)$. Portanto $[S_2] = \mathbb{R}^2$.

- $S_3 = \{(1,0),(2,0)\}$. $[S_3] = \underbrace{\mathbb{R}^2}_{[S_1]}$??

Pela propriedade g_1, para mostrar que $[S_3] = [S_1]$ basta mostrar que $S_1 \subset [S_3]$.

$(1,0) = 1(1,0) + 0(2,0)$

$(0,1) \notin [S_3]$

Portanto $[S_3] \subsetneq \mathbb{R}^2$.

Exemplos

Modo 2

Dado $S_1 = \{(1,0),(0,1)\}$, vimos que $[S_1] = \mathbb{R}^2$.

Seja $S_2 = \{(1,1),(0,1)\}$.

Queremos mostrar que $[S_2] = \mathbb{R}^2$, ou seja, $[S_1] = [S_2]$. $\leftarrow$ $S_1 \subset [S_2] \overset{g_1}{\Rightarrow} [S_1] \subset [S_2]$

Pela propriedade g_1, basta mostrar que $S_1 \subset [S_2]$.

$(1,0) = 1(1,1) - 1(0,1)$,

$(0,1) = 0(1,1) + 1(0,1)$. Portanto $[S_2] = \mathbb{R}^2$.

- $S_3 = \{(1,0),(2,0)\}$. $[S_3] = \underbrace{\mathbb{R}^2}_{[S_1]}$??

Pela propriedade g_1, para mostrar que $[S_3] = [S_1]$ basta mostrar que $S_1 \subset [S_3]$.

$(1,0) = 1(1,0) + 0(2,0)$

$(0,1) \notin [S_3]$

Portanto $[S_3] \subsetneq \mathbb{R}^2$.

Exemplos

Modo 2

Dado $S_1 = \{(1,0),(0,1)\}$, vimos que $[S_1] = \mathbb{R}^2$.

Seja $S_2 = \{(1,1),(0,1)\}$.

Queremos mostrar que $[S_2] = \mathbb{R}^2$, ou seja, $[S_1] = [S_2]$. $\leftarrow$ $S_1 \subset [S_2] \overset{g_1}{\Rightarrow} [S_1] \subset [S_2]$

Pela propriedade g_1, basta mostrar que $S_1 \subset [S_2]$.

$(1,0) = 1(1,1) - 1(0,1)$,

$(0,1) = 0(1,1) + 1(0,1)$. Portanto $[S_2] = \mathbb{R}^2$.

- $S_3 = \{(1,0),(2,0)\}$. $[S_3] = \underbrace{\mathbb{R}^2}_{[S_1]}$??

Pela propriedade g_1, para mostrar que $[S_3] = [S_1]$ basta mostrar que $S_1 \subset [S_3]$.

$(1,0) = 1(1,0) + 0(2,0)$

$(0,1) \notin [S_3]$

Portanto $[S_3] \subsetneq \mathbb{R}^2$.

Exemplos

2. $V = P_n(\mathbb{R})$

- Sejam $S_2 = \{1, 1+x, x^2, \dots, x^n\}$. $[S_2] = P_n(\mathbb{R})$?

Dado $S_1 = \{1, x, \dots, x^n\}$, vimos que $[S_1] = P_n(\mathbb{R})$.

Queremos mostrar que $[S_2] = [S_1]$. $\leftarrow$ $S_1 \subset [S_2] \overset{g_1}{\Rightarrow} [S_1] \subset [S_2]$

Pela propriedade g_1, basta mostrar que $S_1 \subset [S_2]$.

$x = \alpha_0(1) + \alpha_1(1+x) + \cdots + \alpha_n x^n$ $\alpha_1 = 1, \alpha_0 + \alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_0 = -1$

$x = (\alpha_0 + \alpha_1)1 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$ $\alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$

$x = -1.1 + 1.(1+x) + \cdots + 0x^n$

Logo $x \in [S_2]$. Claramente, $1, x^2, \dots, x^n \in [S_2]$.

Portanto $[S_2] = P_n(\mathbb{R})$.

- Analogamente, mostramos que $P_n(\mathbb{R}) = [2, x, x^2, \dots, x^n]$.

Obs: $[1+x, x^2, \dots, x^n] \neq P_n(\mathbb{R})$

Exemplos

2. $V = P_n(\mathbb{R})$

- Sejam $S_2 = \{1, 1+x, x^2, \ldots, x^n\}$. $[S_2] = P_n(\mathbb{R})$?

Dado $S_1 = \{1, x, \ldots, x^n\}$, vimos que $[S_1] = P_n(\mathbb{R})$.

Queremos mostrar que $[S_2] = [S_1]$. $\leftarrow$ $S_1 \subset [S_2] \overset{g_1}{\Rightarrow} [S_1] \subset [S_2]$

Pela propriedade g_1, basta mostrar que $S_1 \subset [S_2]$.

$x = \alpha_0(1) + \alpha_1(1+x) + \cdots + \alpha_n x^n$ $\qquad \alpha_1 = 1,\ \alpha_0 + \alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_0 = -1$

$x = (\alpha_0 + \alpha_1)1 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$ $\qquad \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$

$x = -1.1 + 1.(1+x) + \cdots + 0x^n$

Logo $x \in [S_2]$. Claramente, $1, x^2, \ldots, x^n \in [S_2]$.

Portanto $[S_2] = P_n(\mathbb{R})$.

- Analogamente, mostramos que $P_n(\mathbb{R}) = [2, x, x^2, \ldots, x^n]$.

Obs: $[1+x, x^2, \ldots, x^n] \neq P_n(\mathbb{R})$

Exemplos

2. $V = P_n(\mathbb{R})$

- Sejam $S_2 = \{1, 1+x, x^2, \ldots, x^n\}$. $[S_2] = P_n(\mathbb{R})$?

Dado $S_1 = \{1, x, \ldots, x^n\}$, vimos que $[S_1] = P_n(\mathbb{R})$.

Queremos mostrar que $[S_2] = [S_1]$. $\leftarrow$ $S_1 \subset [S_2] \overset{g_1}{\Rightarrow} [S_1] \subset [S_2]$

Pela propriedade g_1, basta mostrar que $S_1 \subset [S_2]$.

$x = \alpha_0(1) + \alpha_1(1+x) + \cdots + \alpha_n x^n$ $\quad$ $\alpha_1 = 1,\ \alpha_0 + \alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_0 = -1$

$x = (\alpha_0 + \alpha_1)1 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$ $\quad$ $\alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$

$x = -1.1 + 1.(1+x) + \cdots + 0x^n$

Logo $x \in [S_2]$. Claramente, $1, x^2, \ldots, x^n \in [S_2]$.

Portanto $[S_2] = P_n(\mathbb{R})$.

- Analogamente, mostramos que $P_n(\mathbb{R}) = [2, x, x^2, \ldots, x^n]$.

Obs: $[1+x, x^2, \ldots, x^n] \neq P_n(\mathbb{R})$

Exemplos

2. $V = P_n(\mathbb{R})$

- Sejam $S_2 = \{1, 1+x, x^2, \ldots, x^n\}$. $[S_2] = P_n(\mathbb{R})$?

Dado $S_1 = \{1, x, \ldots, x^n\}$, vimos que $[S_1] = P_n(\mathbb{R})$.

Queremos mostrar que $[S_2] = [S_1]$. $\leftarrow$ $S_1 \subset [S_2] \overset{g_1}{\Rightarrow} [S_1] \subset [S_2]$

Pela propriedade g_1, basta mostrar que $S_1 \subset [S_2]$.

$x = \alpha_0(1) + \alpha_1(1+x) + \cdots + \alpha_n x^n$ $\quad$ $\alpha_1 = 1, \alpha_0 + \alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_0 = -1$

$x = (\alpha_0 + \alpha_1)1 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$ $\quad$ $\alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$

$x = -1.1 + 1.(1+x) + \cdots + 0x^n$

Logo $x \in [S_2]$. Claramente, $1, x^2, \ldots, x^n \in [S_2]$.

Portanto $[S_2] = P_n(\mathbb{R})$.

- Analogamente, mostramos que $P_n(\mathbb{R}) = [2, x, x^2, \ldots, x^n]$.

Obs: $[1+x, x^2, \ldots, x^n] \neq P_n(\mathbb{R})$

Exemplos

2. $V = P_n(\mathbb{R})$

- Sejam $S_2 = \{1, 1+x, x^2, \ldots, x^n\}$. $[S_2] = P_n(\mathbb{R})$?

Dado $S_1 = \{1, x, \ldots, x^n\}$, vimos que $[S_1] = P_n(\mathbb{R})$.

Queremos mostrar que $[S_2] = [S_1]$. $\leftarrow$ $S_1 \subset [S_2] \overset{g_1}{\Rightarrow} [S_1] \subset [S_2]$

Pela propriedade g_1, basta mostrar que $S_1 \subset [S_2]$.

$x = \alpha_0(1) + \alpha_1(1+x) + \cdots + \alpha_n x^n$ $\qquad$ $\alpha_1 = 1,\ \alpha_0 + \alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_0 = -1$

$x = (\alpha_0 + \alpha_1)1 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$ $\qquad$ $\alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$

$x = -1.1 + 1.(1+x) + \cdots + 0x^n$

Logo $x \in [S_2]$. Claramente, $1, x^2, \ldots, x^n \in [S_2]$.

Portanto $[S_2] = P_n(\mathbb{R})$.

- Analogamente, mostramos que $P_n(\mathbb{R}) = [2, x, x^2, \ldots, x^n]$.

Obs: $[1+x, x^2, \ldots, x^n] \neq P_n(\mathbb{R})$

Exemplos

2. $V = P_n(\mathbb{R})$

- Sejam $S_2 = \{1, 1+x, x^2, \ldots, x^n\}$. $[S_2] = P_n(\mathbb{R})$?

Dado $S_1 = \{1, x, \ldots, x^n\}$, vimos que $[S_1] = P_n(\mathbb{R})$.

Queremos mostrar que $[S_2] = [S_1]$. $\leftarrow$ $S_1 \subset [S_2] \overset{g_1}{\Rightarrow} [S_1] \subset [S_2]$

Pela propriedade g_1, basta mostrar que $S_1 \subset [S_2]$.

$x = \alpha_0(1) + \alpha_1(1+x) + \cdots + \alpha_n x^n$ $\qquad \alpha_1 = 1,\ \alpha_0 + \alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_0 = -1$

$x = (\alpha_0 + \alpha_1)1 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$ $\qquad \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$

$x = -1.1 + 1.(1+x) + \cdots + 0x^n$

Logo $x \in [S_2]$. Claramente, $1, x^2, \ldots, x^n \in [S_2]$.

Portanto $[S_2] = P_n(\mathbb{R})$.

- Analogamente, mostramos que $P_n(\mathbb{R}) = [2, x, x^2, \ldots, x^n]$.

Obs: $[1+x, x^2, \ldots, x^n] \neq P_n(\mathbb{R})$

Exemplos

2. $V = P_n(\mathbb{R})$

- Sejam $S_2 = \{1, 1+x, x^2, \dots, x^n\}$. $[S_2] = P_n(\mathbb{R})$?

Dado $S_1 = \{1, x, \dots, x^n\}$, vimos que $[S_1] = P_n(\mathbb{R})$.

Queremos mostrar que $[S_2] = [S_1]$. $\leftarrow$ $S_1 \subset [S_2] \overset{g_1}{\Rightarrow} [S_1] \subset [S_2]$

Pela propriedade g_1, basta mostrar que $S_1 \subset [S_2]$.

$x = \alpha_0(1) + \alpha_1(1+x) + \cdots + \alpha_n x^n$ $\quad\alpha_1 = 1,\ \alpha_0 + \alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_0 = -1$

$x = (\alpha_0 + \alpha_1)1 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$ $\quad\alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$

$x = -1.1 + 1.(1+x) + \cdots + 0x^n$

Logo $x \in [S_2]$. Claramente, $1, x^2, \dots, x^n \in [S_2]$.

Portanto $[S_2] = P_n(\mathbb{R})$.

- Analogamente, mostramos que $P_n(\mathbb{R}) = [2, x, x^2, \dots, x^n]$.

Obs: $[1+x, x^2, \dots, x^n] \neq P_n(\mathbb{R})$

Exemplos

2. $V = P_n(\mathbb{R})$

- Sejam $S_2 = \{1, 1+x, x^2, \ldots, x^n\}$. $[S_2] = P_n(\mathbb{R})$?

Dado $S_1 = \{1, x, \ldots, x^n\}$, vimos que $[S_1] = P_n(\mathbb{R})$.

Queremos mostrar que $[S_2] = [S_1]$. $\leftarrow$ $S_1 \subset [S_2] \overset{g_1}{\Rightarrow} [S_1] \subset [S_2]$

Pela propriedade g_1, basta mostrar que $S_1 \subset [S_2]$.

$x = \alpha_0(1) + \alpha_1(1+x) + \cdots + \alpha_n x^n$ $\qquad$ $\alpha_1 = 1$, $\alpha_0 + \alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_0 = -1$

$x = (\alpha_0 + \alpha_1)1 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$ $\qquad$ $\alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$

$x = -1.1 + 1.(1+x) + \cdots + 0x^n$

Logo $x \in [S_2]$. Claramente, $1, x^2, \ldots, x^n \in [S_2]$.

Portanto $[S_2] = P_n(\mathbb{R})$.

- Analogamente, mostramos que $P_n(\mathbb{R}) = [2, x, x^2, \ldots, x^n]$.

Obs: $[1+x, x^2, \ldots, x^n] \neq P_n(\mathbb{R})$

Exemplos

2. $V = P_n(\mathbb{R})$

- Sejam $S_2 = \{1, 1+x, x^2, \dots, x^n\}$. $[S_2] = P_n(\mathbb{R})$?

Dado $S_1 = \{1, x, \dots, x^n\}$, vimos que $[S_1] = P_n(\mathbb{R})$.

Queremos mostrar que $[S_2] = [S_1]$. $\leftarrow$ $S_1 \subset [S_2] \overset{g_1}{\Rightarrow} [S_1] \subset [S_2]$

Pela propriedade g_1, basta mostrar que $S_1 \subset [S_2]$.

$x = \alpha_0(1) + \alpha_1(1+x) + \dots + \alpha_n x^n$ $\qquad \alpha_1 = 1,\ \alpha_0 + \alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_0 = -1$

$x = (\alpha_0 + \alpha_1)1 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n$ $\qquad \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

$x = -1.1 + 1.(1+x) + \dots + 0x^n$

Logo $x \in [S_2]$. Claramente, $1, x^2, \dots, x^n \in [S_2]$.

Portanto $[S_2] = P_n(\mathbb{R})$.

- Analogamente, mostramos que $P_n(\mathbb{R}) = [2, x, x^2, \dots, x^n]$.

Obs: $[1+x, x^2, \dots, x^n] \neq P_n(\mathbb{R})$

Exemplos

2. $V = P_n(\mathbb{R})$

- Sejam $S_2 = \{1, 1+x, x^2, \dots, x^n\}$. $[S_2] = P_n(\mathbb{R})$?

Dado $S_1 = \{1, x, \dots, x^n\}$, vimos que $[S_1] = P_n(\mathbb{R})$.

Queremos mostrar que $[S_2] = [S_1]$. $\leftarrow$ $S_1 \subset [S_2] \overset{g_1}{\Rightarrow} [S_1] \subset [S_2]$

Pela propriedade g_1, basta mostrar que $S_1 \subset [S_2]$.

$x = \alpha_0(1) + \alpha_1(1+x) + \cdots + \alpha_n x^n$ $\qquad \alpha_1 = 1,\ \alpha_0 + \alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_0 = -1$

$x = (\alpha_0 + \alpha_1)1 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$ $\qquad \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$

$x = -1.1 + 1.(1+x) + \cdots + 0x^n$

Logo $x \in [S_2]$. Claramente, $1, x^2, \dots, x^n \in [S_2]$.

Portanto $[S_2] = P_n(\mathbb{R})$.

- Analogamente, mostramos que $P_n(\mathbb{R}) = [2, x, x^2, \dots, x^n]$.

Obs: $[1+x, x^2, \dots, x^n] \neq P_n(\mathbb{R})$

Exemplos

2. $V = P_n(\mathbb{R})$

- Sejam $S_2 = \{1, 1+x, x^2, \ldots, x^n\}$. $[S_2] = P_n(\mathbb{R})$?

Dado $S_1 = \{1, x, \ldots, x^n\}$, vimos que $[S_1] = P_n(\mathbb{R})$.

Queremos mostrar que $[S_2] = [S_1]$. $\leftarrow$ $S_1 \subset [S_2] \overset{g_1}{\Rightarrow} [S_1] \subset [S_2]$

Pela propriedade g_1, basta mostrar que $S_1 \subset [S_2]$.

$x = \alpha_0(1) + \alpha_1(1+x) + \cdots + \alpha_n x^n$ $\qquad \alpha_1 = 1$, $\alpha_0 + \alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_0 = -1$

$x = (\alpha_0 + \alpha_1)1 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$ $\qquad \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$

$x = -1.1 + 1.(1+x) + \cdots + 0x^n$

Logo $x \in [S_2]$. Claramente, $1, x^2, \ldots, x^n \in [S_2]$.

Portanto $[S_2] = P_n(\mathbb{R})$.

- Analogamente, mostramos que $P_n(\mathbb{R}) = [2, x, x^2, \ldots, x^n]$.

Obs: $[1+x, x^2, \ldots, x^n] \neq P_n(\mathbb{R})$

Exemplos

2. $V = P_n(\mathbb{R})$

- Sejam $S_2 = \{1, 1+x, x^2, \ldots, x^n\}$. $[S_2] = P_n(\mathbb{R})$?

Dado $S_1 = \{1, x, \ldots, x^n\}$, vimos que $[S_1] = P_n(\mathbb{R})$.

Queremos mostrar que $[S_2] = [S_1]$. $\leftarrow$ $S_1 \subset [S_2] \overset{g_1}{\Rightarrow} [S_1] \subset [S_2]$

Pela propriedade g_1, basta mostrar que $S_1 \subset [S_2]$.

$x = \alpha_0(1) + \alpha_1(1+x) + \cdots + \alpha_n x^n \qquad \alpha_1 = 1,\ \alpha_0 + \alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_0 = -1$

$x = (\alpha_0 + \alpha_1)1 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n \qquad \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$

$x = -1.1 + 1.(1+x) + \cdots + 0x^n$

Logo $x \in [S_2]$. Claramente, $1, x^2, \ldots, x^n \in [S_2]$.

Portanto $[S_2] = P_n(\mathbb{R})$.

- Analogamente, mostramos que $P_n(\mathbb{R}) = [2, x, x^2, \ldots, x^n]$.

Obs: $[1+x, x^2, \ldots, x^n] \neq P_n(\mathbb{R})$

Espaços finitamente gerados

Seja S um conjunto infinito.

$[S] :=$ conjunto de todas as combinações lineares **finitas** de elementos de S.

$u \in [S] \Leftrightarrow \exists\ v_1, v_2, \ldots, v_n \in S,\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$u = \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n$

Exemplos:

1. $V = \mathbb{R}^2$. Dado $S = \{(1,0), (0,\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$, $[S] = \mathbb{R}^2$.
2. $V = P(\mathbb{R})$, $S = \{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$. $[S] = P(\mathbb{R})$.

Dizemos que um espaço vetorial é **finitamente gerado** se existe $S \subset V$ finito tal que $[S] = V$.

Espaços finitamente gerados

Seja S um conjunto infinito.

$[S] :=$ conjunto de todas as combinações lineares **finitas** de elementos de S.

$u \in [S] \Leftrightarrow \exists\ v_1, v_2, \ldots, v_n \in S,\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que
$u = \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n$

Exemplos:

1. $V = \mathbb{R}^2$. Dado $S = \{(1,0), (0,\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$, $[S] = \mathbb{R}^2$.
2. $V = P(\mathbb{R})$, $S = \{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$. $[S] = P(\mathbb{R})$.

Dizemos que um espaço vetorial é **finitamente gerado** se existe $S \subset V$ finito tal que $[S] = V$.

Espaços finitamente gerados

Seja S um conjunto infinito.

$[S] :=$ conjunto de todas as combinações lineares **finitas** de elementos de S.

$u \in [S] \Leftrightarrow \exists\ v_1, v_2, \ldots, v_n \in S,\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$u = \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n$

Exemplos:

1. $V = \mathbb{R}^2$. Dado $S = \{(1,0), (0,\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$, $[S] = \mathbb{R}^2$.
2. $V = P(\mathbb{R})$, $S = \{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$. $[S] = P(\mathbb{R})$.

Dizemos que um espaço vetorial é **finitamente gerado** se existe $S \subset V$ finito tal que $[S] = V$.

Espaços finitamente gerados

Seja S um conjunto infinito.

$[S] :=$ conjunto de todas as combinações lineares **finitas** de elementos de S.

$u \in [S] \Leftrightarrow \exists\ v_1, v_2, \ldots, v_n \in S,\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$u = \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n$

Exemplos:

1. $V = \mathbb{R}^2$. Dado $S = \{(1,0),(0,\alpha),\alpha \in \mathbb{R}\}$, $[S] = \mathbb{R}^2$.
2. $V = P(\mathbb{R})$, $S = \{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$. $[S] = P(\mathbb{R})$.

Dizemos que um espaço vetorial é **finitamente gerado** se existe $S \subset V$ finito tal que $[S] = V$.

Espaços finitamente gerados

Seja S um conjunto infinito.

$[S] :=$ conjunto de todas as combinações lineares **finitas** de elementos de S.

$u \in [S] \Leftrightarrow \exists\ v_1, v_2, \ldots, v_n \in S,\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que
$u = \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n$

Exemplos:

1. $V = \mathbb{R}^2$. Dado $S = \{(1,0),(0,\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$, $[S] = \mathbb{R}^2$.
2. $V = P(\mathbb{R})$, $S = \{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$. $[S] = P(\mathbb{R})$.

Dizemos que um espaço vetorial é **finitamente gerado** se existe $S \subset V$ finito tal que $[S] = V$.

Espaços finitamente gerados

Seja S um conjunto infinito.

$[S] :=$ conjunto de todas as combinações lineares **finitas** de elementos de S.

$u \in [S] \Leftrightarrow \exists\ v_1, v_2, \ldots, v_n \in S,\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que
$u = \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n$

Exemplos:

1. $V = \mathbb{R}^2$. Dado $S = \{(1,0), (0,\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$, $[S] = \mathbb{R}^2$.
2. $V = P(\mathbb{R})$, $S = \{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$. $[S] = P(\mathbb{R})$.

Dizemos que um espaço vetorial é **finitamente gerado** se existe $S \subset V$ finito tal que $[S] = V$.

Espaços finitamente gerados

1. $V = \mathbb{R}^2$. Vimos que $\mathbb{R}^2 = [(1,0),(0,1)]$, $\mathbb{R}^2 = [(1,1),(0,1)]$.
   Portanto $\mathbb{R}^2$ é finitamente gerado.
2. $V = \mathbb{R}^3$.

   $$\begin{aligned} v \in \mathbb{R}^3 &\Leftrightarrow v = (x,y,z), x,y,z \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow v = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) \\ &\Leftrightarrow v \in [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)] \end{aligned}$$

   Portanto $\mathbb{R}^3 = [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)]$ é finitamente gerado.

Mais geralmente, $\mathbb{R}^n = [(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots(0,\ldots,0,1)]$ é finitamente gerado.

3. $V = P_n(\mathbb{R})$.

   $$\begin{aligned} p \in P_n(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,\ a_i \in \mathbb{R}, i = 1,\ldots,n. \\ &\Leftrightarrow p \in [1, x, \ldots, x^n] \end{aligned}$$

   Portanto $P_n(\mathbb{R}) = [1, x, \ldots, x^n]$ é finitamente gerado.

Espaços finitamente gerados

1. $V = \mathbb{R}^2$. Vimos que $\mathbb{R}^2 = [(1,0),(0,1)]$, $\mathbb{R}^2 = [(1,1),(0,1)]$.
   Portanto $\mathbb{R}^2$ é finitamente gerado.
2. $V = \mathbb{R}^3$.

   $$\begin{aligned} v \in \mathbb{R}^3 &\Leftrightarrow v = (x,y,z), x,y,z \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow v = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) \\ &\Leftrightarrow v \in [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)] \end{aligned}$$

   Portanto $\mathbb{R}^3 = [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)]$ é finitamente gerado.

Mais geralmente, $\mathbb{R}^n = [(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots(0,\ldots,0,1)]$ é finitamente gerado.

3. $V = P_n(\mathbb{R})$.

   $$\begin{aligned} p \in P_n(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n,\ a_i \in \mathbb{R}, i = 1,\ldots,n. \\ &\Leftrightarrow p \in [1,x,\ldots,x^n] \end{aligned}$$

   Portanto $P_n(\mathbb{R}) = [1,x,\ldots,x^n]$ é finitamente gerado.

Espaços finitamente gerados

1. $V = \mathbb{R}^2$. Vimos que $\mathbb{R}^2 = [(1,0),(0,1)]$, $\mathbb{R}^2 = [(1,1),(0,1)]$.
   Portanto $\mathbb{R}^2$ é finitamente gerado.
2. $V = \mathbb{R}^3$.

   $v \in \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow v = (x,y,z), x,y,z \in \mathbb{R}$

   $\Leftrightarrow v = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$

   $\Leftrightarrow v \in [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)]$

   Portanto $\mathbb{R}^3 = [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)]$ é finitamente gerado.

Mais geralmente, $\mathbb{R}^n = [(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots(0,\ldots,0,1)]$ é finitamente gerado.

3. $V = P_n(\mathbb{R})$.

   $p \in P_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, $a_i \in \mathbb{R}, i = 1,\ldots,n$.

   $\Leftrightarrow p \in [1,x,\ldots,x^n]$

   Portanto $P_n(\mathbb{R}) = [1,x,\ldots,x^n]$ é finitamente gerado.

Espaços finitamente gerados

1. $V = \mathbb{R}^2$. Vimos que $\mathbb{R}^2 = [(1,0),(0,1)]$, $\mathbb{R}^2 = [(1,1),(0,1)]$.

   Portanto $\mathbb{R}^2$ é finitamente gerado.

2. $V = \mathbb{R}^3$.

   $$\begin{aligned} v \in \mathbb{R}^3 &\Leftrightarrow v = (x,y,z), x,y,z \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow v = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) \\ &\Leftrightarrow v \in [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)] \end{aligned}$$

   Portanto $\mathbb{R}^3 = [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)]$ é finitamente gerado.

Mais geralmente, $\mathbb{R}^n = [(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots(0,\ldots,0,1)]$ é finitamente gerado.

3. $V = P_n(\mathbb{R})$.

   $$\begin{aligned} p \in P_n(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,\ a_i \in \mathbb{R}, i = 1,\ldots,n. \\ &\Leftrightarrow p \in [1, x, \ldots, x^n] \end{aligned}$$

   Portanto $P_n(\mathbb{R}) = [1, x, \ldots, x^n]$ é finitamente gerado.

Espaços finitamente gerados

1. $V = \mathbb{R}^2$. Vimos que $\mathbb{R}^2 = [(1,0),(0,1)]$, $\mathbb{R}^2 = [(1,1),(0,1)]$.

   Portanto $\mathbb{R}^2$ é finitamente gerado.

2. $V = \mathbb{R}^3$.

   $$\begin{aligned} v \in \mathbb{R}^3 &\Leftrightarrow v = (x,y,z), x,y,z \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow v = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) \\ &\Leftrightarrow v \in [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)] \end{aligned}$$

   Portanto $\mathbb{R}^3 = [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)]$ é finitamente gerado.

Mais geralmente, $\mathbb{R}^n = [(1,0,\dots,0),(0,1,\dots,0),\dots(0,\dots,0,1)]$ é finitamente gerado.

3. $V = P_n(\mathbb{R})$.

   $$\begin{aligned} p \in P_n(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n,\ a_i \in \mathbb{R}, i = 1,\dots,n. \\ &\Leftrightarrow p \in [1, x, \dots, x^n] \end{aligned}$$

   Portanto $P_n(\mathbb{R}) = [1, x, \dots, x^n]$ é finitamente gerado.

Espaços finitamente gerados

1. $V = \mathbb{R}^2$. Vimos que $\mathbb{R}^2 = [(1,0),(0,1)]$, $\mathbb{R}^2 = [(1,1),(0,1)]$.

   Portanto $\mathbb{R}^2$ é finitamente gerado.

2. $V = \mathbb{R}^3$.

   $$\begin{aligned} v \in \mathbb{R}^3 &\Leftrightarrow v = (x,y,z), x,y,z \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow v = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) \\ &\Leftrightarrow v \in [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)] \end{aligned}$$

   Portanto $\mathbb{R}^3 = [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)]$ é finitamente gerado.

Mais geralmente, $\mathbb{R}^n = [(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots(0,\ldots,0,1)]$ é finitamente gerado.

3. $V = P_n(\mathbb{R})$.

   $$\begin{aligned} p \in P_n(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n,\ a_i \in \mathbb{R}, i = 1,\ldots,n. \\ &\Leftrightarrow p \in [1,x,\ldots,x^n] \end{aligned}$$

   Portanto $P_n(\mathbb{R}) = [1,x,\ldots,x^n]$ é finitamente gerado.

Espaços finitamente gerados

1. $V = \mathbb{R}^2$. Vimos que $\mathbb{R}^2 = [(1,0),(0,1)]$, $\mathbb{R}^2 = [(1,1),(0,1)]$.

   Portanto $\mathbb{R}^2$ é finitamente gerado.

2. $V = \mathbb{R}^3$.

   $$\begin{aligned} v \in \mathbb{R}^3 &\Leftrightarrow v = (x,y,z), x,y,z \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow v = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) \\ &\Leftrightarrow v \in [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)] \end{aligned}$$

   Portanto $\mathbb{R}^3 = [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)]$ é finitamente gerado.

Mais geralmente, $\mathbb{R}^n = [(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots(0,\ldots,0,1)]$ é finitamente gerado.

3. $V = P_n(\mathbb{R})$.

   $$\begin{aligned} p \in P_n(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n,\ a_i \in \mathbb{R}, i = 1,\ldots,n. \\ &\Leftrightarrow p \in [1,x,\ldots,x^n] \end{aligned}$$

   Portanto $P_n(\mathbb{R}) = [1,x,\ldots,x^n]$ é finitamente gerado.

Espaços finitamente gerados

1. $V = \mathbb{R}^2$. Vimos que $\mathbb{R}^2 = [(1,0),(0,1)]$, $\mathbb{R}^2 = [(1,1),(0,1)]$.

   Portanto $\mathbb{R}^2$ é finitamente gerado.

2. $V = \mathbb{R}^3$.

   $$\begin{aligned} v \in \mathbb{R}^3 &\Leftrightarrow v = (x,y,z), x,y,z \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow v = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) \\ &\Leftrightarrow v \in [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)] \end{aligned}$$

   Portanto $\mathbb{R}^3 = [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)]$ é finitamente gerado.

Mais geralmente, $\mathbb{R}^n = [(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots(0,\ldots,0,1)]$ é finitamente gerado.

3. $V = P_n(\mathbb{R})$.

   $$\begin{aligned} p \in P_n(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n,\ a_i \in \mathbb{R}, i = 1,\ldots,n. \\ &\Leftrightarrow p \in [1,x,\ldots,x^n] \end{aligned}$$

   Portanto $P_n(\mathbb{R}) = [1,x,\ldots,x^n]$ é finitamente gerado.

Espaços finitamente gerados

1. $V = \mathbb{R}^2$. Vimos que $\mathbb{R}^2 = [(1,0),(0,1)]$, $\mathbb{R}^2 = [(1,1),(0,1)]$.

   Portanto $\mathbb{R}^2$ é finitamente gerado.

2. $V = \mathbb{R}^3$.

   $$\begin{aligned} v \in \mathbb{R}^3 &\Leftrightarrow v = (x,y,z), x,y,z \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow v = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) \\ &\Leftrightarrow v \in [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)] \end{aligned}$$

   Portanto $\mathbb{R}^3 = [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)]$ é finitamente gerado.

Mais geralmente, $\mathbb{R}^n = [(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots(0,\ldots,0,1)]$ é finitamente gerado.

3. $V = P_n(\mathbb{R})$.

   $$\begin{aligned} p \in P_n(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,\ a_i \in \mathbb{R}, i = 1,\ldots,n. \\ &\Leftrightarrow p \in [1, x, \ldots, x^n] \end{aligned}$$

   Portanto $P_n(\mathbb{R}) = [1, x, \ldots, x^n]$ é finitamente gerado.

Espaços finitamente gerados

1. $V = \mathbb{R}^2$. Vimos que $\mathbb{R}^2 = [(1,0),(0,1)]$, $\mathbb{R}^2 = [(1,1),(0,1)]$.

   Portanto $\mathbb{R}^2$ é finitamente gerado.

2. $V = \mathbb{R}^3$.

   $$\begin{aligned} v \in \mathbb{R}^3 &\Leftrightarrow v = (x,y,z), x,y,z \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow v = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) \\ &\Leftrightarrow v \in [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)] \end{aligned}$$

   Portanto $\mathbb{R}^3 = [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)]$ é finitamente gerado.

Mais geralmente, $\mathbb{R}^n = [(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots(0,\ldots,0,1)]$ é finitamente gerado.

3. $V = P_n(\mathbb{R})$.

   $$\begin{aligned} p \in P_n(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n,\ a_i \in \mathbb{R}, i = 1,\ldots,n. \\ &\Leftrightarrow p \in [1,x,\ldots,x^n] \end{aligned}$$

   Portanto $P_n(\mathbb{R}) = [1,x,\ldots,x^n]$ é finitamente gerado.

Espaços finitamente gerados

1. $V = \mathbb{R}^2$. Vimos que $\mathbb{R}^2 = [(1,0),(0,1)]$, $\mathbb{R}^2 = [(1,1),(0,1)]$.

   Portanto $\mathbb{R}^2$ é finitamente gerado.

2. $V = \mathbb{R}^3$.

   $$\begin{aligned} v \in \mathbb{R}^3 &\Leftrightarrow v = (x,y,z), x,y,z \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow v = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) \\ &\Leftrightarrow v \in [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)] \end{aligned}$$

   Portanto $\mathbb{R}^3 = [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)]$ é finitamente gerado.

Mais geralmente, $\mathbb{R}^n = [(1,0,\dots,0),(0,1,\dots,0),\dots(0,\dots,0,1)]$ é finitamente gerado.

3. $V = P_n(\mathbb{R})$.

   $$\begin{aligned} p \in P_n(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n,\ a_i \in \mathbb{R}, i = 1,\dots,n. \\ &\Leftrightarrow p \in [1, x, \dots, x^n] \end{aligned}$$

   Portanto $P_n(\mathbb{R}) = [1, x, \dots, x^n]$ é finitamente gerado.

Espaços finitamente gerados

4. $V = M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, a_{ij} \in \mathbb{R},\ i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n$$

$$\Leftrightarrow A = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{mn}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A \in \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\right]$$

Portanto $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ é finitamente gerado.

Espaços finitamente gerados

4. $V = M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, a_{ij} \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$$

$$\Leftrightarrow A = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{mn} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A \in \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right]$$

Portanto $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ é finitamente gerado.

Espaços finitamente gerados

4. $V = M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, a_{ij} \in \mathbb{R},\ i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n$$

$$\Leftrightarrow A = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{mn}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A \in \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\right]$$

Portanto $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ é finitamente gerado.

Espaços finitamente gerados

4. $V = M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, a_{ij} \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$$

$$\Leftrightarrow A = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{mn} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A \in \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right]$$

Portanto $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ é finitamente gerado.

Espaços finitamente gerados

4. $V = M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, a_{ij} \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$$

$$\Leftrightarrow A = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{mn} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A \in \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right]$$

Portanto $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ é finitamente gerado.

Espaços finitamente gerados

5. $V = P(\mathbb{R})$ não é finitamente gerado.

   Suponhamos que existe $S \subset P(\mathbb{R})$ finito tal que $[S] = P(\mathbb{R})$.

   Considere $S = \{p_1, \ldots, p_k,\ p_i \in P(\mathbb{R}), i = 1, \ldots, k\}$. Então

   $[S] = \{\alpha_1 p_1 + \cdots + \alpha_k p_k,\ \alpha_i \in \mathbb{R}\}$

   Denotemos por $\delta_i =$ grau de p_i, $i = 1, \ldots, k$. Seja $\delta = max\{\delta_i\}$. Então

   $$p \in [S] \Rightarrow \text{ grau de } p \leq \delta$$

   Portanto $[S] \subset P_\delta(\mathbb{R})$ e $[S] \neq P(\mathbb{R})$.

Consequentemente, $F(\mathbb{R})$ não é finitamente gerado.

Espaços finitamente gerados

5. $V = P(\mathbb{R})$ não é finitamente gerado.

   Suponhamos que existe $S \subset P(\mathbb{R})$ finito tal que $[S] = P(\mathbb{R})$.

   Considere $S = \{p_1, \ldots, p_k,\ p_i \in P(\mathbb{R}), i = 1, \ldots, k\}$. Então

   $[S] = \{\alpha_1 p_1 + \cdots + \alpha_k p_k,\ \alpha_i \in \mathbb{R}\}$

   Denotemos por $\delta_i =$ grau de $p_i, i = 1, \ldots, k$. Seja $\delta = max\{\delta_i\}$. Então

   $$p \in [S] \Rightarrow \text{ grau de } p \leq \delta$$

   Portanto $[S] \subset P_\delta(\mathbb{R})$ e $[S] \neq P(\mathbb{R})$.

Consequentemente, $F(\mathbb{R})$ não é finitamente gerado.

Espaços finitamente gerados

5. $V = P(\mathbb{R})$ não é finitamente gerado.

   Suponhamos que existe $S \subset P(\mathbb{R})$ finito tal que $[S] = P(\mathbb{R})$.

   Considere $S = \{p_1, \ldots, p_k,\ p_i \in P(\mathbb{R}), i = 1, \ldots, k\}$. Então

   $[S] = \{\alpha_1 p_1 + \cdots + \alpha_k p_k,\ \alpha_i \in \mathbb{R}\}$

   Denotemos por $\delta_i =$ grau de $p_i, i = 1, \ldots, k$. Seja $\delta = max\{\delta_i\}$. Então

   $$p \in [S] \Rightarrow \text{ grau de } p \leq \delta$$

   Portanto $[S] \subset P_\delta(\mathbb{R})$ e $[S] \neq P(\mathbb{R})$.

Consequentemente, $F(\mathbb{R})$ não é finitamente gerado.

Espaços finitamente gerados

5. $V = P(\mathbb{R})$ não é finitamente gerado.

   Suponhamos que existe $S \subset P(\mathbb{R})$ finito tal que $[S] = P(\mathbb{R})$.

   Considere $S = \{p_1, \ldots, p_k,\ p_i \in P(\mathbb{R}), i = 1, \ldots, k\}$. Então

   $[S] = \{\alpha_1 p_1 + \cdots + \alpha_k p_k,\ \alpha_i \in \mathbb{R}\}$

   Denotemos por $\delta_i =$ grau de $p_i, i = 1, \ldots, k$. Seja $\delta = max\{\delta_i\}$. Então

   $$p \in [S] \Rightarrow \text{ grau de } p \leq \delta$$

   Portanto $[S] \subset P_\delta(\mathbb{R})$ e $[S] \neq P(\mathbb{R})$.

Consequentemente, $P(\mathbb{R})$ não é finitamente gerado.

Espaços finitamente gerados

5. $V = P(\mathbb{R})$ não é finitamente gerado.

   Suponhamos que existe $S \subset P(\mathbb{R})$ finito tal que $[S] = P(\mathbb{R})$.

   Considere $S = \{p_1, \ldots, p_k,\ p_i \in P(\mathbb{R}), i = 1, \ldots, k\}$. Então

   $[S] = \{\alpha_1 p_1 + \cdots + \alpha_k p_k,\ \alpha_i \in \mathbb{R}\}$

   Denotemos por $\delta_i =$ grau de $p_i, i = 1, \ldots, k$. Seja $\delta = max\{\delta_i\}$. Então

$$p \in [S] \Rightarrow \text{ grau de } p \leq \delta$$

   Portanto $[S] \subset P_\delta(\mathbb{R})$ e $[S] \neq P(\mathbb{R})$.

Consequentemente, $F(\mathbb{R})$ não é finitamente gerado.

Espaços finitamente gerados

5. $V = P(\mathbb{R})$ não é finitamente gerado.

   Suponhamos que existe $S \subset P(\mathbb{R})$ finito tal que $[S] = P(\mathbb{R})$.

   Considere $S = \{p_1, \ldots, p_k,\ p_i \in P(\mathbb{R}), i = 1, \ldots, k\}$. Então

   $[S] = \{\alpha_1 p_1 + \cdots + \alpha_k p_k,\ \alpha_i \in \mathbb{R}\}$

   Denotemos por $\delta_i =$ grau de $p_i, i = 1, \ldots, k$. Seja $\delta = max\{\delta_i\}$. Então

   $$p \in [S] \Rightarrow \text{ grau de } p \leq \delta$$

   Portanto $[S] \subset P_\delta(\mathbb{R})$ e $[S] \neq P(\mathbb{R})$.

Consequentemente, $F(\mathbb{R})$ não é finitamente gerado.

Espaços finitamente gerados

5. $V = P(\mathbb{R})$ não é finitamente gerado.

   Suponhamos que existe $S \subset P(\mathbb{R})$ finito tal que $[S] = P(\mathbb{R})$.

   Considere $S = \{p_1, \ldots, p_k,\ p_i \in P(\mathbb{R}), i = 1, \ldots, k\}$. Então

   $[S] = \{\alpha_1 p_1 + \cdots + \alpha_k p_k,\ \alpha_i \in \mathbb{R}\}$

   Denotemos por $\delta_i =$ grau de $p_i, i = 1, \ldots, k$. Seja $\delta = max\{\delta_i\}$. Então

$$p \in [S] \Rightarrow \text{ grau de } p \leq \delta$$

   Portanto $[S] \subset P_\delta(\mathbb{R})$ e $[S] \neq P(\mathbb{R})$.

Consequentemente, $F(\mathbb{R})$ não é finitamente gerado.

Espaços finitamente gerados

5. $V = P(\mathbb{R})$ não é finitamente gerado.

   Suponhamos que existe $S \subset P(\mathbb{R})$ finito tal que $[S] = P(\mathbb{R})$.

   Considere $S = \{p_1, \ldots, p_k,\ p_i \in P(\mathbb{R}), i = 1, \ldots, k\}$. Então

   $[S] = \{\alpha_1 p_1 + \cdots + \alpha_k p_k,\ \alpha_i \in \mathbb{R}\}$

   Denotemos por $\delta_i =$ grau de $p_i, i = 1, \ldots, k$. Seja $\delta = max\{\delta_i\}$. Então

   $$p \in [S] \Rightarrow \text{ grau de } p \leq \delta$$

   Portanto $[S] \subset P_\delta(\mathbb{R})$ e $[S] \neq P(\mathbb{R})$.

Consequentemente, $F(\mathbb{R})$ não é finitamente gerado.

Espaços finitamente gerados

5. $V = P(\mathbb{R})$ não é finitamente gerado.

   Suponhamos que existe $S \subset P(\mathbb{R})$ finito tal que $[S] = P(\mathbb{R})$.

   Considere $S = \{p_1, \ldots, p_k,\ p_i \in P(\mathbb{R}), i = 1, \ldots, k\}$. Então

   $[S] = \{\alpha_1 p_1 + \cdots + \alpha_k p_k,\ \alpha_i \in \mathbb{R}\}$

   Denotemos por $\delta_i =$ grau de $p_i, i = 1, \ldots, k$. Seja $\delta = max\{\delta_i\}$. Então

   $$p \in [S] \Rightarrow \text{ grau de } p \leq \delta$$

   Portanto $[S] \subset P_\delta(\mathbb{R})$ e $[S] \neq P(\mathbb{R})$.

Consequentemente, $F(\mathbb{R})$ não é finitamente gerado.