Espaços Vetoriais

Dependência e independência linear

Álgebra Linear

Mariana Silveira - Cristian Coletti

Universidade Federal do ABC

Motivação

Exemplo: $\mathbb{R}^2 = [(1,0),(0,1)]$

$= [(1,0),(0,1),(1,1)]$

$(2,3) = 2(1,0) + 3(0,1)$

$(2,3) = 1(1,0) + 2(0,1) + \underset{\text{supérfluo}}{\underset{\uparrow}{1(1,1)}}$

Sejam $(V,+,.)$ um espaço vetorial real e $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Dizemos que o conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é **linearmente dependente (L.D.)** se existem coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, **não todos nulos** tais que

$$\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n = 0 \qquad (*)$$

Se a equação $(*)$ vale somente para $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, dizemos que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é **linearmente independente (L.I.)**

Motivação

Exemplo: $\mathbb{R}^2 = [(1,0),(0,1)]$

$= [(1,0),(0,1),(1,1)]$

$(2,3) = 2(1,0) + 3(0,1)$

$(2,3) = 1(1,0) + 2(0,1) + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{supérfluo}}}{1(1,1)}$

Sejam $(V,+,.)$ um espaço vetorial real e $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Dizemos que o conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é **linearmente dependente (L.D.)** se existem coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, **não todos nulos** tais que

$$\alpha_1 . v_1 + \alpha_2 . v_2 + \cdots + \alpha_n . v_n = 0 \qquad (*)$$

Se a equação $(*)$ vale somente para $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, dizemos que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é **linearmente independente (L.I.)**

Motivação

Exemplo: $\mathbb{R}^2 = [(1,0),(0,1)]$
$= [(1,0),(0,1),(1,1)]$

$(2,3) = 2(1,0) + 3(0,1)$

$(2,3) = 1(1,0) + 2(0,1) + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{supérfluo}}}{1(1,1)}$

Sejam $(V,+,.)$ um espaço vetorial real e $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Dizemos que o conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é **linearmente dependente (L.D.)** se existem coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, **não todos nulos** tais que

$$\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n = 0 \qquad (*)$$

Se a equação $(*)$ vale somente para $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, dizemos que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é **linearmente independente (L.I.)**

Motivação

Exemplo: $\mathbb{R}^2 = [(1,0),(0,1)]$
$= [(1,0),(0,1),(1,1)]$

$(2,3) = 2(1,0) + 3(0,1)$

$(2,3) = 1(1,0) + 2(0,1) + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{supérfluo}}}{1(1,1)}$

Sejam $(V,+,.)$ um espaço vetorial real e $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Dizemos que o conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é **linearmente dependente (L.D.)** se existem coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, **não todos nulos** tais que

$$\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n = 0 \qquad (*)$$

Se a equação $(*)$ vale somente para $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, dizemos que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é **linearmente independente (L.I.)**

Exemplo

Voltando ao Exemplo: $V = \mathbb{R}^2$

- $\{(1,0),(0,1)\}$ é L.I.

$\{(1,0),(0,1)\}$ é L.D. $\Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta$ não todos nulos tais que

$\alpha(1,0) + \beta(0,1) = (0,0) \quad \leftarrow$ Só vale quando $\alpha = \beta = 0$

- $\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$ é L.D.

$\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$ é L.D. $\Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta, \gamma$ não todos nulos tais que

$\alpha(1,0) + \beta(0,1) + \gamma(1,1) = (0,0) \quad \leftarrow$ Vale quando $\alpha = \beta = -\gamma$

$1(1,0) + 1(0,1) + -1(1,1) = (0,0)$

Exemplo

Voltando ao Exemplo: $V = \mathbb{R}^2$

- $\{(1,0),(0,1)\}$ é L.I.

$\{(1,0),(0,1)\}$ é L.D. $\Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta$ não todos nulos tais que

$\alpha(1,0) + \beta(0,1) = (0,0) \quad \leftarrow$ Só vale quando $\alpha = \beta = 0$

- $\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$ é L.D.

$\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$ é L.D. $\Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta, \gamma$ não todos nulos tais que

$\alpha(1,0) + \beta(0,1) + \gamma(1,1) = (0,0) \quad \leftarrow$ Vale quando $\alpha = \beta = -\gamma$

$1(1,0) + 1(0,1) + -1(1,1) = (0,0)$

Exemplo

Voltando ao Exemplo: $V = \mathbb{R}^2$

- $\{(1,0),(0,1)\}$ é L.I.

$\{(1,0),(0,1)\}$ é L.D. $\Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta$ não todos nulos tais que

$\alpha(1,0) + \beta(0,1) = (0,0) \quad \leftarrow$ Só vale quando $\alpha = \beta = 0$

- $\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$ é L.D.

$\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$ é L.D. $\Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta, \gamma$ não todos nulos tais que

$\alpha(1,0) + \beta(0,1) + \gamma(1,1) = (0,0) \quad \leftarrow$ Vale quando $\alpha = \beta = -\gamma$

$1(1,0) + 1(0,1) + -1(1,1) = (0,0)$

Exemplo

Voltando ao Exemplo: $V = \mathbb{R}^2$

- $\{(1,0),(0,1)\}$ é L.I.

$\{(1,0),(0,1)\}$ é L.D. $\Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta$ não todos nulos tais que

$\alpha(1,0) + \beta(0,1) = (0,0) \quad \leftarrow$ Só vale quando $\alpha = \beta = 0$

- $\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$ é L.D.

$\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$ é L.D. $\Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta, \gamma$ não todos nulos tais que

$\alpha(1,0) + \beta(0,1) + \gamma(1,1) = (0,0) \quad \leftarrow$ Vale quando $\alpha = \beta = -\gamma$

$1(1,0) + 1(0,1) + -1(1,1) = (0,0)$

Exemplo

Voltando ao Exemplo: $V = \mathbb{R}^2$

- $\{(1,0),(0,1)\}$ é L.I.

$\{(1,0),(0,1)\}$ é L.D. $\Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta$ não todos nulos tais que

$\alpha(1,0) + \beta(0,1) = (0,0)$ $\leftarrow$ Só vale quando $\alpha = \beta = 0$

- $\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$ é L.D.

$\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$ é L.D. $\Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta, \gamma$ não todos nulos tais que

$\alpha(1,0) + \beta(0,1) + \gamma(1,1) = (0,0)$ $\leftarrow$ Vale quando $\alpha = \beta = -\gamma$

$1(1,0) + 1(0,1) + -1(1,1) = (0,0)$

Exemplo

Voltando ao Exemplo: $V = \mathbb{R}^2$

- $\{(1,0),(0,1)\}$ é L.I.

$\{(1,0),(0,1)\}$ é L.D. $\Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta$ não todos nulos tais que

$\alpha(1,0) + \beta(0,1) = (0,0) \quad \leftarrow$ Só vale quando $\alpha = \beta = 0$

- $\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$ é L.D.

$\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$ é L.D. $\Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta, \gamma$ não todos nulos tais que

$\alpha(1,0) + \beta(0,1) + \gamma(1,1) = (0,0) \quad \leftarrow$ Vale quando $\alpha = \beta = -\gamma$

$1(1,0) + 1(0,1) + -1(1,1) = (0,0)$

Exemplo

Voltando ao Exemplo: $V = \mathbb{R}^2$

- $\{(1,0),(0,1)\}$ é L.I.

$\{(1,0),(0,1)\}$ é L.D. $\Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta$ não todos nulos tais que

$\alpha(1,0) + \beta(0,1) = (0,0)$ $\leftarrow$ Só vale quando $\alpha = \beta = 0$

- $\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$ é L.D.

$\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$ é L.D. $\Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta, \gamma$ não todos nulos tais que

$\alpha(1,0) + \beta(0,1) + \gamma(1,1) = (0,0)$ $\leftarrow$ Vale quando $\alpha = \beta = -\gamma$

$1(1,0) + 1(0,1) + -1(1,1) = (0,0)$

Caracterização de Dependência Linear

Teorema: Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real. Um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ em V é L.D. se, e somente se, pelo menos um dos seus vetores é combinação linear dos demais.

Prova:($\Rightarrow$) Suponhamos que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ seja L.D. Então existem coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que

$\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n = 0.$

Suponha que $\alpha_j \neq 0$. Então

$$\alpha_j v_j = -\alpha_1.v_1 - \cdots - \alpha_{j-1}.v_{j-1} - \alpha_{j+1}.v_{j+1} - \cdots - \alpha_n.v_n$$

$$v_j = -\frac{\alpha_1}{\alpha_j}.v_1 - \cdots - \frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j}.v_{j-1} - \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j}.v_{j+1} - \cdots - \frac{\alpha_n.v_n}{\alpha_j} \qquad \Leftarrow v_j \text{ é supérfluo}$$

ou seja, v_j é combinação linear dos demais vetores.

Caracterização de Dependência Linear

Teorema: Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real. Um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ em V é L.D. se, e somente se, pelo menos um dos seus vetores é combinação linear dos demais.

Prova:($\Rightarrow$) Suponhamos que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ seja L.D. Então existem coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que
$\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n = 0$.
Suponha que $\alpha_j \neq 0$. Então

$$\alpha_j v_j = -\alpha_1.v_1 - \cdots - \alpha_{j-1}.v_{j-1} - \alpha_{j+1}.v_{j+1} - \cdots - \alpha_n.v_n$$

$$v_j = -\frac{\alpha_1}{\alpha_j}.v_1 - \cdots - \frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j}.v_{j-1} - \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j}.v_{j+1} - \cdots - \frac{\alpha_n.v_n}{\alpha_j} \quad \leftarrow v_j \text{ é supérfluo}$$

ou seja, v_j é combinação linear dos demais vetores.

Caracterização de Dependência Linear

Teorema: Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real. Um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ em V é L.D. se, e somente se, pelo menos um dos seus vetores é combinação linear dos demais.

Prova:($\Rightarrow$) Suponhamos que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ seja L.D. Então existem coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que

$\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n = 0.$

Suponha que $\alpha_j \neq 0$. Então

$$\alpha_j v_j = -\alpha_1.v_1 - \cdots - \alpha_{j-1}.v_{j-1} - \alpha_{j+1}.v_{j+1} - \cdots - \alpha_n.v_n$$

$$v_j = -\frac{\alpha_1}{\alpha_j}.v_1 - \cdots - \frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j}.v_{j-1} - \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j}.v_{j+1} - \cdots - \frac{\alpha_n.v_n}{\alpha_j} \quad \leftarrow v_j \text{ é supérfluo}$$

ou seja, v_j é combinação linear dos demais vetores.

Caracterização de Dependência Linear

Teorema: Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real. Um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ em V é L.D. se, e somente se, pelo menos um dos seus vetores é combinação linear dos demais.

Prova:($\Rightarrow$) Suponhamos que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ seja L.D. Então existem coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que

$\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n = 0.$

Suponha que $\alpha_j \neq 0$. Então

$\alpha_j v_j = -\alpha_1.v_1 - \cdots - \alpha_{j-1}.v_{j-1} - \alpha_{j+1}.v_{j+1} - \cdots - \alpha_n.v_n$

$v_j = -\frac{\alpha_1}{\alpha_j}.v_1 - \cdots - \frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j}.v_{j-1} - \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j}.v_{j+1} - \cdots - \frac{\alpha_n.v_n}{\alpha_j}$ $\leftarrow v_j$ é supérfluo

ou seja, v_j é combinação linear dos demais vetores.

Caracterização de Dependência Linear

Teorema: Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real. Um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ em V é L.D. se, e somente se, pelo menos um dos seus vetores é combinação linear dos demais.

Prova:$(\Rightarrow)$ Suponhamos que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ seja L.D. Então existem coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que

$\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n = 0.$

Suponha que $\alpha_j \neq 0$. Então

$$\alpha_j v_j = -\alpha_1.v_1 - \cdots - \alpha_{j-1}.v_{j-1} - \alpha_{j+1}.v_{j+1} - \cdots - \alpha_n.v_n$$

$$v_j = -\frac{\alpha_1}{\alpha_j}.v_1 - \cdots - \frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j}.v_{j-1} - \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j}.v_{j+1} - \cdots - \frac{\alpha_n.v_n}{\alpha_j} \quad \leftarrow v_j \text{ é supérfluo}$$

ou seja, v_j é combinação linear dos demais vetores.

Caracterização de Dependência Linear

Teorema: Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real. Um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ em V é L.D. se, e somente se, pelo menos um dos seus vetores é combinação linear dos demais.

Prova:($\Rightarrow$) Suponhamos que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ seja L.D. Então existem coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que

$\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n = 0.$

Suponha que $\alpha_j \neq 0$. Então

$$\alpha_j v_j = -\alpha_1.v_1 - \cdots - \alpha_{j-1}.v_{j-1} - \alpha_{j+1}.v_{j+1} - \cdots - \alpha_n.v_n$$

$$v_j = -\frac{\alpha_1}{\alpha_j}.v_1 - \cdots - \frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j}.v_{j-1} - \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j}.v_{j+1} - \cdots - \frac{\alpha_n.v_n}{\alpha_j} \quad \leftarrow v_j \text{ é supérfluo}$$

ou seja, v_j é combinação linear dos demais vetores.

Caracterização de Dependência Linear

($\Leftarrow$) Suponhamos que para algum $j = i, \ldots, n$, v_j é combinação linear dos demais vetores.

$v_j = \beta_1.v_1 + \cdots + \beta_{j-1}.v_{j-1} + \beta_{j+1}.v_{j+1} + \cdots + \beta_n.v_n$.

Então

$$\beta_1.v_1 + \cdots + \beta_{j-1}.v_{j-1} - 1.v_j + \beta_{j+1}.v_{j+1} + \cdots + \beta_n.v_n = 0$$

é uma combinação linear de $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ com coeficientes não todos nulos dando o vetor nulo. Portanto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é L.D.. $\square$

Corolário 1: Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real. Um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ em V é L.I. se, e somente se, nenhum dos seus vetores é combinação linear dos demais.

Caracterização de Dependência Linear

($\Leftarrow$) Suponhamos que para algum $j = i, \ldots, n$, v_j é combinação linear dos demais vetores.

$v_j = \beta_1.v_1 + \cdots + \beta_{j-1}.v_{j-1} + \beta_{j+1}.v_{j+1} + \cdots + \beta_n.v_n$.

Então

$\beta_1.v_1 + \cdots + \beta_{j-1}.v_{j-1} - 1.v_j + \beta_{j+1}.v_{j+1} + \cdots + \beta_n.v_n = 0$

é uma combinação linear de $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ com coeficientes não todos nulos dando o vetor nulo. Portanto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é L.D.. $\square$

Corolário 1: Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real. Um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ em V é L.I. se, e somente se, nenhum dos seus vetores é combinação linear dos demais.

Caracterização de Dependência Linear

($\Leftarrow$) Suponhamos que para algum $j = i, \ldots, n$, v_j é combinação linear dos demais vetores.

$v_j = \beta_1.v_1 + \cdots + \beta_{j-1}.v_{j-1} + \beta_{j+1}.v_{j+1} + \cdots + \beta_n.v_n$.

Então

$\beta_1.v_1 + \cdots + \beta_{j-1}.v_{j-1} - 1.v_j + \beta_{j+1}.v_{j+1} + \cdots + \beta_n.v_n = 0$

é uma combinação linear de $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ com coeficientes não todos nulos dando o vetor nulo. Portanto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é L.D.. $\square$

Corolário 1: Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real. Um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ em V é L.I. se, e somente se, nenhum dos seus vetores é combinação linear dos demais.

Caracterização de Dependência Linear

($\Leftarrow$) Suponhamos que para algum $j = i, \ldots, n$, v_j é combinação linear dos demais vetores.

$v_j = \beta_1.v_1 + \cdots + \beta_{j-1}.v_{j-1} + \beta_{j+1}.v_{j+1} + \cdots + \beta_n.v_n$.

Então

$$\beta_1.v_1 + \cdots + \beta_{j-1}.v_{j-1} - 1.v_j + \beta_{j+1}.v_{j+1} + \cdots + \beta_n.v_n = 0$$

é uma combinação linear de $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ com coeficientes não todos nulos dando o vetor nulo. Portanto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é L.D.. $\square$

Corolário 1: Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real. Um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ em V é L.I. se, e somente se, nenhum dos seus vetores é combinação linear dos demais.

Caracterização de Dependência Linear

($\Leftarrow$) Suponhamos que para algum $j = i, \ldots, n$, v_j é combinação linear dos demais vetores.

$v_j = \beta_1.v_1 + \cdots + \beta_{j-1}.v_{j-1} + \beta_{j+1}.v_{j+1} + \cdots + \beta_n.v_n$.

Então

$$\beta_1.v_1 + \cdots + \beta_{j-1}.v_{j-1} - 1.v_j + \beta_{j+1}.v_{j+1} + \cdots + \beta_n.v_n = 0$$

é uma combinação linear de $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ com coeficientes não todos nulos dando o vetor nulo. Portanto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é L.D.. $\square$

Corolário 1: Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real. Um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ em V é L.I. se, e somente se, nenhum dos seus vetores é combinação linear dos demais.

Caracterização de Dependência Linear

($\Leftarrow$) Suponhamos que para algum $j = i, \ldots, n$, v_j é combinação linear dos demais vetores.

$v_j = \beta_1.v_1 + \cdots + \beta_{j-1}.v_{j-1} + \beta_{j+1}.v_{j+1} + \cdots + \beta_n.v_n$.

Então

$$\beta_1.v_1 + \cdots + \beta_{j-1}.v_{j-1} - 1.v_j + \beta_{j+1}.v_{j+1} + \cdots + \beta_n.v_n = 0$$

é uma combinação linear de $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ com coeficientes não todos nulos dando o vetor nulo. Portanto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é L.D.. $\square$

Corolário 1: Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real. Um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ em V é L.I. se, e somente se, nenhum dos seus vetores é combinação linear dos demais.

Caracterização de Dependência Linear

V espaço vetorial, $\{u, v\} \subset V$ é L.D.

$\Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que $\alpha.u + \beta.v = 0$

$\Leftrightarrow u = -\dfrac{\beta}{\alpha}.v$ $(\alpha \neq 0)$ ou $v = -\dfrac{\alpha}{\beta}.u$ $(\beta \neq 0)$.

Corolário 2: Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real. Um par de vetores $\{u, v\}$ em V é L.D. se, e somente se, pelo menos um dos seus vetores é múltiplo do outro.

Obs: Se $\{u, v\} \subset V$ é L.D. e u, v são não nulos, então $u = \lambda v$ e $v = \frac{1}{\lambda} u$.

Obs (Convenção): O conjunto $\emptyset$ é L.I..

Caracterização de Dependência Linear

V espaço vetorial, $\{u, v\} \subset V$ é L.D.

$\Leftrightarrow \ \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que $\alpha.u + \beta.v = 0$

$\Leftrightarrow u = -\dfrac{\beta}{\alpha}.v$ $(\alpha \neq 0)$ ou $v = -\dfrac{\alpha}{\beta}.u$ $(\beta \neq 0)$.

Corolário 2: Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real. Um par de vetores $\{u, v\}$ em V é L.D. se, e somente se, pelo menos um dos seus vetores é múltiplo do outro.

Obs: Se $\{u, v\} \subset V$ é L.D. e u, v são não nulos, então $u = \lambda v$ e $v = \frac{1}{\lambda}u$.

Obs (Convenção): O conjunto $\emptyset$ é L.I..

Caracterização de Dependência Linear

V espaço vetorial, $\{u, v\} \subset V$ é L.D.

$\Leftrightarrow \ \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que $\alpha.u + \beta.v = 0$

$\Leftrightarrow u = -\dfrac{\beta}{\alpha}.v \ (\alpha \neq 0)$ ou $v = -\dfrac{\alpha}{\beta}.u \ (\beta \neq 0)$.

Corolário 2: Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real. Um par de vetores $\{u, v\}$ em V é L.D. se, e somente se, pelo menos um dos seus vetores é múltiplo do outro.

Obs: Se $\{u, v\} \subset V$ é L.D. e u, v são não nulos, então $u = \lambda v$ e $v = \frac{1}{\lambda}u$.

Obs (Convenção): O conjunto $\emptyset$ é L.I..

Caracterização de Dependência Linear

V espaço vetorial, $\{u, v\} \subset V$ é L.D.

$\Leftrightarrow \ \exists \, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que $\alpha . u + \beta . v = 0$

$\Leftrightarrow u = -\dfrac{\beta}{\alpha} . v \ (\alpha \neq 0)$ ou $v = -\dfrac{\alpha}{\beta} . u \ (\beta \neq 0)$.

Corolário 2: Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real. Um par de vetores $\{u, v\}$ em V é L.D. se, e somente se, pelo menos um dos seus vetores é múltiplo do outro.

Obs: Se $\{u, v\} \subset V$ é L.D. e u, v são não nulos, então $u = \lambda v$ e $v = \frac{1}{\lambda} u$.

Obs (Convenção): O conjunto $\emptyset$ é L.I..

Caracterização de Dependência Linear

V espaço vetorial, $\{u, v\} \subset V$ é L.D.

$\Leftrightarrow\ \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que $\alpha.u + \beta.v = 0$

$\Leftrightarrow u = -\dfrac{\beta}{\alpha}.v$ $(\alpha \neq 0)$ ou $v = -\dfrac{\alpha}{\beta}.u$ $(\beta \neq 0)$.

Corolário 2: Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real. Um par de vetores $\{u, v\}$ em V é L.D. se, e somente se, pelo menos um dos seus vetores é múltiplo do outro.

Obs: Se $\{u, v\} \subset V$ é L.D. e u, v são não nulos, então $u = \lambda v$ e $v = \frac{1}{\lambda}u$.

Obs (Convenção): O conjunto $\emptyset$ é L.I..

Exemplos

1. $V = \mathbb{V}^3$.

- $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ $\overrightarrow{u} = \alpha.\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{v} = \beta.\overrightarrow{u}$
$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{u} // \overrightarrow{v}$.

- $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ pelo menos um deles é combinação linear dos demais
$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ são paralelos ao mesmo plano.

2. $V = \mathbb{R}^3$.

- $\{u, v\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ $u = \alpha.v$ ou $v = \beta.u$.
$\Leftrightarrow$ u, v estão na mesma reta passando pela origem.

- $\{u, v, w\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ pelo menos um deles é combinação linear dos demais.
$\overset{\text{SPG}}{\Leftrightarrow}$ $w = \alpha.u + \beta.v \Leftrightarrow w \in [u, v]$
$\Leftrightarrow$ u, v, w estão no mesmo plano passando pela origem.

Exemplos

1. $V = \mathbb{V}^3$.

- $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ $\overrightarrow{u} = \alpha.\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{v} = \beta.\overrightarrow{u}$

  $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{u} // \overrightarrow{v}$.

- $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ pelo menos um deles é combinação linear dos demais

  $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ são paralelos ao mesmo plano.

2. $V = \mathbb{R}^3$.

- $\{u, v\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ $u = \alpha.v$ ou $v = \beta.u$.

  $\Leftrightarrow$ u, v estão na mesma reta passando pela origem.

- $\{u, v, w\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ pelo menos um deles é combinação linear dos demais.

  $\overset{\text{SPG}}{\Leftrightarrow}$ $w = \alpha.u + \beta.v \Leftrightarrow w \in [u, v]$

  $\Leftrightarrow$ u, v, w estão no mesmo plano passando pela origem.

Exemplos

1. $V = \mathbb{V}^3$.

- $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ $\vec{u} = \alpha.\vec{v}$ ou $\vec{v} = \beta.\vec{u}$
  $\Leftrightarrow$ $\vec{u} // \vec{v}$.

- $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ pelo menos um deles é combinação linear dos demais
  $\Leftrightarrow$ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são paralelos ao mesmo plano.

2. $V = \mathbb{R}^3$.

- $\{u, v\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ $u = \alpha.v$ ou $v = \beta.u$.
  $\Leftrightarrow$ u, v estão na mesma reta passando pela origem.

- $\{u, v, w\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ pelo menos um deles é combinação linear dos demais.
  $\overset{\text{SPG}}{\Leftrightarrow}$ $w = \alpha.u + \beta.v \Leftrightarrow w \in [u, v]$
  $\Leftrightarrow$ u, v, w estão no mesmo plano passando pela origem.

Exemplos

1. $V = \mathbb{V}^3$.

- $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ $\overrightarrow{u} = \alpha.\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{v} = \beta.\overrightarrow{u}$
  $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{u} // \overrightarrow{v}$.
- $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ pelo menos um deles é combinação linear dos demais
  $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ são paralelos ao mesmo plano.

2. $V = \mathbb{R}^3$.

- $\{u, v\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ $u = \alpha.v$ ou $v = \beta.u$.
  $\Leftrightarrow$ u, v estão na mesma reta passando pela origem.
- $\{u, v, w\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ pelo menos um deles é combinação linear dos demais.
  $\overset{\text{SPG}}{\Leftrightarrow}$ $w = \alpha.u + \beta.v \Leftrightarrow w \in [u, v]$
  $\Leftrightarrow$ u, v, w estão no mesmo plano passando pela origem.

Exemplos

1. $V = \mathbb{V}^3$.

- $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ $\vec{u} = \alpha.\vec{v}$ ou $\vec{v} = \beta.\vec{u}$
  $\Leftrightarrow$ $\vec{u} // \vec{v}$.

- $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ pelo menos um deles é combinação linear dos demais
  $\Leftrightarrow$ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são paralelos ao mesmo plano.

2. $V = \mathbb{R}^3$.

- $\{u, v\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ $u = \alpha.v$ ou $v = \beta.u$.
  $\Leftrightarrow$ u, v estão na mesma reta passando pela origem.

- $\{u, v, w\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ pelo menos um deles é combinação linear dos demais.
  $\overset{\text{SPG}}{\Leftrightarrow}$ $w = \alpha.u + \beta.v \Leftrightarrow w \in [u, v]$
  $\Leftrightarrow$ u, v, w estão no mesmo plano passando pela origem.

Exemplos

1. $V = \mathbb{V}^3$.

- $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ $\vec{u} = \alpha.\vec{v}$ ou $\vec{v} = \beta.\vec{u}$
  $\Leftrightarrow$ $\vec{u} // \vec{v}$.

- $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ pelo menos um deles é combinação linear dos demais
  $\Leftrightarrow$ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são paralelos ao mesmo plano.

2. $V = \mathbb{R}^3$.

- $\{u, v\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ $u = \alpha.v$ ou $v = \beta.u$.
  $\Leftrightarrow$ u, v estão na mesma reta passando pela origem.

- $\{u, v, w\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ pelo menos um deles é combinação linear dos demais.
  $\overset{\text{SPG}}{\Leftrightarrow}$ $w = \alpha.u + \beta.v \Leftrightarrow w \in [u, v]$
  $\Leftrightarrow$ u, v, w estão no mesmo plano passando pela origem.

Exemplos

1. $V = \mathbb{V}^3$.

- $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ $\vec{u} = \alpha.\vec{v}$ ou $\vec{v} = \beta.\vec{u}$
  $\Leftrightarrow$ $\vec{u} // \vec{v}$.

- $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ pelo menos um deles é combinação linear dos demais
  $\Leftrightarrow$ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são paralelos ao mesmo plano.

2. $V = \mathbb{R}^3$.

- $\{u, v\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ $u = \alpha.v$ ou $v = \beta.u$.
  $\Leftrightarrow$ u, v estão na mesma reta passando pela origem.

- $\{u, v, w\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ pelo menos um deles é combinação linear dos demais.
  $\overset{\text{SPG}}{\Leftrightarrow}$ $w = \alpha.u + \beta.v \Leftrightarrow w \in [u, v]$
  $\Leftrightarrow$ u, v, w estão no mesmo plano passando pela origem.

Exemplos

1. $V = \mathbb{V}^3$.

- $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ $\vec{u} = \alpha.\vec{v}$ ou $\vec{v} = \beta.\vec{u}$
  $\Leftrightarrow$ $\vec{u} // \vec{v}$.

- $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ pelo menos um deles é combinação linear dos demais
  $\Leftrightarrow$ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são paralelos ao mesmo plano.

2. $V = \mathbb{R}^3$.

- $\{u, v\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ $u = \alpha.v$ ou $v = \beta.u$.
  $\Leftrightarrow$ u, v estão na mesma reta passando pela origem.

- $\{u, v, w\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ pelo menos um deles é combinação linear dos demais.
  $\overset{\text{SPG}}{\Leftrightarrow}$ $w = \alpha.u + \beta.v \Leftrightarrow w \in [u, v]$
  $\Leftrightarrow$ u, v, w estão no mesmo plano passando pela origem.

Exemplos

1. $V = \mathbb{V}^3$.

- $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ $\vec{u} = \alpha.\vec{v}$ ou $\vec{v} = \beta.\vec{u}$
  $\Leftrightarrow$ $\vec{u} // \vec{v}$.

- $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ pelo menos um deles é combinação linear dos demais
  $\Leftrightarrow$ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são paralelos ao mesmo plano.

2. $V = \mathbb{R}^3$.

- $\{u, v\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ $u = \alpha.v$ ou $v = \beta.u$.
  $\Leftrightarrow$ u, v estão na mesma reta passando pela origem.

- $\{u, v, w\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ pelo menos um deles é combinação linear dos demais.
  $\overset{\text{SPG}}{\Leftrightarrow}$ $w = \alpha.u + \beta.v \Leftrightarrow w \in [u, v]$
  $\Leftrightarrow$ u, v, w estão no mesmo plano passando pela origem.

Exemplos

1. $V = \mathbb{V}^3$.

- $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ $\vec{u} = \alpha.\vec{v}$ ou $\vec{v} = \beta.\vec{u}$
  $\Leftrightarrow$ $\vec{u} // \vec{v}$.

- $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ pelo menos um deles é combinação linear dos demais
  $\Leftrightarrow$ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são paralelos ao mesmo plano.

2. $V = \mathbb{R}^3$.

- $\{u, v\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ $u = \alpha.v$ ou $v = \beta.u$.
  $\Leftrightarrow$ u, v estão na mesma reta passando pela origem.

- $\{u, v, w\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ pelo menos um deles é combinação linear dos demais.
  $\overset{\text{SPG}}{\Leftrightarrow}$ $w = \alpha.u + \beta.v \Leftrightarrow w \in [u, v]$
  $\Leftrightarrow$ u, v, w estão no mesmo plano passando pela origem.

Exemplos

1. $V = \mathbb{V}^3$.

- $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ $\overrightarrow{u} = \alpha.\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{v} = \beta.\overrightarrow{u}$
  $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{u} // \overrightarrow{v}$.

- $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ pelo menos um deles é combinação linear dos demais
  $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ são paralelos ao mesmo plano.

2. $V = \mathbb{R}^3$.

- $\{u, v\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ $u = \alpha.v$ ou $v = \beta.u$.
  $\Leftrightarrow$ u, v estão na mesma reta passando pela origem.

- $\{u, v, w\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ pelo menos um deles é combinação linear dos demais.
  $\overset{\text{SPG}}{\Leftrightarrow}$ $w = \alpha.u + \beta.v \Leftrightarrow w \in [u, v]$
  $\Leftrightarrow$ u, v, w estão no mesmo plano passando pela origem.

Exemplos

1. $V = \mathbb{V}^3$.

- $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ $\vec{u} = \alpha.\vec{v}$ ou $\vec{v} = \beta.\vec{u}$
  $\Leftrightarrow$ $\vec{u} // \vec{v}$.

- $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ pelo menos um deles é combinação linear dos demais
  $\Leftrightarrow$ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são paralelos ao mesmo plano.

2. $V = \mathbb{R}^3$.

- $\{u, v\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ $u = \alpha.v$ ou $v = \beta.u$.
  $\Leftrightarrow$ u, v estão na mesma reta passando pela origem.

- $\{u, v, w\}$ é L.D. $\overset{\text{Teo}}{\Leftrightarrow}$ pelo menos um deles é combinação linear dos demais.
  $\overset{\text{SPG}}{\Leftrightarrow}$ $w = \alpha.u + \beta.v \Leftrightarrow w \in [u, v]$
  $\Leftrightarrow$ u, v, w estão no mesmo plano passando pela origem.

Exemplo

3. $V = \mathbb{R}^3$. Determine se u, v, w é L.I. ou L.D., dados $u = (1, 0, 3)$, $v = (0, 1, -1)$, $w = (1, 1, 2)$.

$\{u, v, w\}$ é L.D. $\Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta, \gamma$ não todos nulos tais que

$\alpha.u + \beta.v + \gamma.w = 0$

$\alpha.(1, 0, 3) + \beta.(0, 1, -1) + \gamma.(1, 1, 2) = (0, 0, 0)$

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha - \beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

O sistema em α, β e γ tiver uma solução não trivial.

$\alpha = -\gamma$

$\beta = -\gamma \qquad \Leftarrow$

$-3\gamma + \gamma + 2\gamma = 0$

O sistema tem solução não trivial. Por exemplo, $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -1$

Portanto $\{u, v, w\}$ é L.D..

Exemplo

3. $V = \mathbb{R}^3$. Determine se u, v, w é L.I. ou L.D., dados $u = (1, 0, 3)$, $v = (0, 1, -1)$, $w = (1, 1, 2)$.

   $\{u, v, w\}$ é L.D. $\Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta, \gamma$ não todos nulos tais que

   $\alpha.u + \beta.v + \gamma.w = 0$

   $\alpha.(1, 0, 3) + \beta.(0, 1, -1) + \gamma.(1, 1, 2) = (0, 0, 0)$

   $$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha - \beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

   O sistema em α, β e γ tiver uma solução não trivial.

   $\alpha = -\gamma$

   $\beta = -\gamma$ $\Leftarrow$

   $-3\gamma + \gamma + 2\gamma = 0$

   O sistema tem solução não trivial. Por exemplo, $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -1$

   Portanto $\{u, v, w\}$ é L.D..

Exemplo

3. $V = \mathbb{R}^3$. Determine se u, v, w é L.I. ou L.D., dados $u = (1,0,3)$, $v = (0,1,-1)$, $w = (1,1,2)$.

   $\{u, v, w\}$ é L.D. $\Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta, \gamma$ não todos nulos tais que

   $\alpha.u + \beta.v + \gamma.w = 0$

   $\alpha.(1,0,3) + \beta.(0,1,-1) + \gamma.(1,1,2) = (0,0,0)$

   $$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha - \beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

   O sistema em α, β e γ tiver uma solução não trivial.

   $\alpha = -\gamma$

   $\beta = -\gamma$

   $-3\gamma + \gamma + 2\gamma = 0$

   $\leftarrow$ O sistema tem solução não trivial. Por exemplo, $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -1$

   Portanto $\{u, v, w\}$ é L.D..

Exemplo

3. $V = \mathbb{R}^3$. Determine se u, v, w é L.I. ou L.D., dados $u = (1,0,3)$, $v = (0,1,-1)$, $w = (1,1,2)$.

   $\{u, v, w\}$ é L.D. $\Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta, \gamma$ não todos nulos tais que

   $\alpha.u + \beta.v + \gamma.w = 0$

   $\alpha.(1,0,3) + \beta.(0,1,-1) + \gamma.(1,1,2) = (0,0,0)$

   $$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha - \beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

   O sistema em α, β e γ tiver uma solução não trivial.

   $\alpha = -\gamma$

   $\beta = -\gamma$

   $-3\gamma + \gamma + 2\gamma = 0$

   $\leftarrow$ O sistema tem solução não trivial. Por exemplo, $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -1$

   Portanto $\{u, v, w\}$ é L.D..

Exemplo

3. $V = \mathbb{R}^3$. Determine se u, v, w é L.I. ou L.D., dados $u = (1, 0, 3)$, $v = (0, 1, -1)$, $w = (1, 1, 2)$.

   $\{u, v, w\}$ é L.D. $\Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta, \gamma$ não todos nulos tais que

   $\alpha.u + \beta.v + \gamma.w = 0$

   $\alpha.(1, 0, 3) + \beta.(0, 1, -1) + \gamma.(1, 1, 2) = (0, 0, 0)$

   $$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha - \beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

   O sistema em α, β e γ tiver uma solução não trivial.

   $\alpha = -\gamma$

   $\beta = -\gamma$

   $-3\gamma + \gamma + 2\gamma = 0$

   $\leftarrow$ O sistema tem solução não trivial. Por exemplo, $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -1$

   Portanto $\{u, v, w\}$ é L.D..

Exemplo

3. $V = \mathbb{R}^3$. Determine se u, v, w é L.I. ou L.D., dados $u = (1, 0, 3)$, $v = (0, 1, -1)$, $w = (1, 1, 2)$.

$\{u, v, w\}$ é L.D. $\Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta, \gamma$ não todos nulos tais que

$\alpha.u + \beta.v + \gamma.w = 0$

$\alpha.(1, 0, 3) + \beta.(0, 1, -1) + \gamma.(1, 1, 2) = (0, 0, 0)$

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha - \beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

O sistema em α, β e γ tiver uma solução não trivial.

$\alpha = -\gamma$

$\beta = -\gamma$

$-3\gamma + \gamma + 2\gamma = 0$

$\leftarrow$ O sistema tem solução não trivial. Por exemplo, $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -1$

Portanto $\{u, v, w\}$ é L.D..

Exemplo

3. $V = \mathbb{R}^3$. Determine se u, v, w é L.I. ou L.D., dados $u = (1, 0, 3)$, $v = (0, 1, -1)$, $w = (1, 1, 2)$.

$\{u, v, w\}$ é L.D. $\Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta, \gamma$ não todos nulos tais que

$\alpha.u + \beta.v + \gamma.w = 0$

$\alpha.(1, 0, 3) + \beta.(0, 1, -1) + \gamma.(1, 1, 2) = (0, 0, 0)$

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha - \beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

O sistema em α, β e γ tiver uma solução não trivial.

$\alpha = -\gamma$

$\beta = -\gamma$

$-3\gamma + \gamma + 2\gamma = 0$

$\leftarrow$ O sistema tem solução não trivial. Por exemplo, $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -1$

Portanto $\{u, v, w\}$ é L.D..

Exemplos

4. Sejam $V = M_2(\mathbb{R})$, $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.
   Verifique se S é L.D. ou L.I..

S é L.D. $\Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta, \gamma, \theta \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \theta \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma - \theta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \gamma = 0 \\ \gamma + \theta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

O sistema em α, β, γ e θ tiver uma solução não trivial. $\Leftarrow$

$\alpha = \beta = \gamma = \theta = 0$

O sistema não tem solução não trivial

Portanto S é L.I..

Exemplos

4. Sejam $V = M_2(\mathbb{R})$, $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.
   Verifique se S é L.D. ou L.I..

   S é L.D. $\Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta, \gamma, \theta \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \theta \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma - \theta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \gamma = 0 \\ \gamma + \theta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

O sistema em α, β, γ e θ tiver uma solução não trivial. $\leftarrow$

$\alpha = \beta = \gamma = \theta = 0$

O sistema não tem solução não trivial

Portanto S é L.I..

Exemplos

4. Sejam $V = M_2(\mathbb{R})$, $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.
   Verifique se S é L.D. ou L.I..

   S é L.D. $\Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta, \gamma, \theta \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \theta \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma - \theta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \gamma = 0 \\ \gamma + \theta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

O sistema em α, β, γ e θ tiver uma solução não trivial. $\leftarrow$

$\alpha = \beta = \gamma = \theta = 0$

O sistema não tem solução não trivial

Portanto S é L.I..

Exemplos

4. Sejam $V = M_2(\mathbb{R})$, $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.
   Verifique se S é L.D. ou L.I..

   S é L.D. $\Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta, \gamma, \theta \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \theta \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma - \theta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \gamma = 0 \\ \gamma + \theta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

O sistema em α, β, γ e θ tiver uma solução não trivial. $\leftarrow$

$\alpha = \beta = \gamma = \theta = 0$

O sistema não tem solução não trivial

Portanto S é L.I..

Exemplos

4. Sejam $V = M_2(\mathbb{R})$, $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.
   Verifique se S é L.D. ou L.I..

   S é L.D. $\Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta, \gamma, \theta \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \theta \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma - \theta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \gamma = 0 \\ \gamma + \theta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

O sistema em α, β, γ e θ tiver uma solução não trivial. $\leftarrow$

$\alpha = \beta = \gamma = \theta = 0$

O sistema não tem solução não trivial

Portanto S é L.I..

Exemplos

4. Sejam $V = M_2(\mathbb{R})$, $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.
   Verifique se S é L.D. ou L.I..

   S é L.D. $\Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta, \gamma, \theta \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que

   $$\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \theta \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   $$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma - \theta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \gamma = 0 \\ \gamma + \theta = 0 \end{cases}$$

   $\Leftrightarrow$ O sistema em α, β, γ e θ tiver uma solução não trivial. $\leftarrow$

   $\alpha = \beta = \gamma = \theta = 0$
   O sistema não tem solução não trivial

   Portanto S é L.I..

Exemplos

5. $V = P_n(\mathbb{R})$. Mostre que $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ é L.I.

$\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ é L. D.

$\Leftrightarrow\ \exists\, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n = 0 \ \leftarrow \ \text{polinômio nulo}$$

$\Leftrightarrow p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n$ é um polinômio não nulo com infinitas raizes.

Como um polinômio não nulo de grau n tem no máximo n raizes distintas, então devemos ter $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Exemplos

5. $V = P_n(\mathbb{R})$. Mostre que $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ é L.I.

$\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ é L. D.

$\Leftrightarrow \exists\, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n = 0 \leftarrow \text{ polinômio nulo}$$

$\Leftrightarrow p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n$ é um polinômio não nulo com infinitas raizes.

Como um polinômio não nulo de grau n tem no máximo n raizes distintas, então devemos ter $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Exemplos

5. $V = P_n(\mathbb{R})$. Mostre que $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ é L.I.

$\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ é L. D.

$\Leftrightarrow\ \exists\, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n = 0 \leftarrow \text{polinômio nulo}$$

$\Leftrightarrow p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n$ é um polinômio não nulo com infinitas raizes.

Como um polinômio não nulo de grau n tem no máximo n raizes distintas, então devemos ter $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Exemplos

5. $V = P_n(\mathbb{R})$. Mostre que $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ é L.I.

$\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ é L. D.

$\Leftrightarrow \exists\, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n = 0 \leftarrow \text{ polinômio nulo}$$

$\Leftrightarrow p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n$ é um polinômio não nulo com infinitas raizes.

Como um polinômio não nulo de grau n tem no máximo n raizes distintas, então devemos ter $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Exemplos

5. $V = P_n(\mathbb{R})$. Mostre que $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ é L.I.

$\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ é L. D.

$\Leftrightarrow\ \exists\, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n = 0 \leftarrow \text{polinômio nulo}$$

$\Leftrightarrow p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n$ é um polinômio não nulo com infinitas raizes.

Como um polinômio não nulo de grau n tem no máximo n raizes distintas, então devemos ter $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Exemplos

6. Sejam $V = P_2(\mathbb{R})$, $S = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$. Verifique se S é L.D. ou L.I..

S é L.D. $\Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que

$$\alpha.1 + \beta.(1+x) + \gamma.(1+x+x^2) = 0$$

$$(\alpha+\beta+\gamma).1 + (\beta+\gamma).x + \gamma.x^2 = 0 \leftarrow \text{ polinômio nulo}$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ \beta+\gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Portanto S é L.I.

7. Sejam $V = F(\mathbb{R})$, $S = \{f_1, f_2, f_3\}$, onde $f_1(x) = \operatorname{sen}^2(x)$, $f_2(x) = \cos^2(x)$, $f_3(x) = 5$. Verifique se S é L.D. ou L.I..

$(5.f_1 + 5.f_2 - 1.f_3)(x) = 5f_1(x) + 5f_2(x) - f_3(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

Portanto S é L.D.

Exemplos

6. Sejam $V = P_2(\mathbb{R})$, $S = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$. Verifique se S é L.D. ou L.I..

   S é L.D. $\Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que

   $$\alpha.1 + \beta.(1+x) + \gamma.(1+x+x^2) = 0$$

   $$(\alpha+\beta+\gamma).1 + (\beta+\gamma).x + \gamma.x^2 = 0 \leftarrow \text{ polinômio nulo}$$

   $$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ \beta+\gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma = 0$$

   Portanto S é L.I.

7. Sejam $V = F(\mathbb{R})$, $S = \{f_1, f_2, f_3\}$, onde $f_1(x) = \text{sen}^2(x)$, $f_2(x) = \cos^2(x)$, $f_3(x) = 5$. Verifique se S é L.D. ou L.I..

   $(5.f_1 + 5.f_2 - 1.f_3)(x) = 5f_1(x) + 5f_2(x) - f_3(x) = 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$

   Portanto S é L.D.

Exemplos

6. Sejam $V = P_2(\mathbb{R})$, $S = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$. Verifique se S é L.D. ou L.I..

S é L.D. $\Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que

$$\alpha.1 + \beta.(1+x) + \gamma.(1+x+x^2) = 0$$

$$(\alpha+\beta+\gamma).1 + (\beta+\gamma).x + \gamma.x^2 = 0 \leftarrow \text{ polinômio nulo}$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ \beta+\gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Portanto S é L.I.

7. Sejam $V = F(\mathbb{R})$, $S = \{f_1, f_2, f_3\}$, onde $f_1(x) = \operatorname{sen}^2(x)$, $f_2(x) = \cos^2(x)$, $f_3(x) = 5$. Verifique se S é L.D. ou L.I..

$(5.f_1 + 5.f_2 - 1.f_3)(x) = 5f_1(x) + 5f_2(x) - f_3(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

Portanto S é L.D.

Exemplos

6. Sejam $V = P_2(\mathbb{R})$, $S = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$. Verifique se S é L.D. ou L.I..

   S é L.D. $\Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que

   $$\alpha.1 + \beta.(1+x) + \gamma.(1+x+x^2) = 0$$

   $$(\alpha+\beta+\gamma).1 + (\beta+\gamma).x + \gamma.x^2 = 0 \leftarrow \text{ polinômio nulo}$$

   $$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ \beta+\gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma = 0$$

   Portanto S é L.I.

7. Sejam $V = F(\mathbb{R})$, $S = \{f_1, f_2, f_3\}$, onde $f_1(x) = \text{sen}^2(x)$, $f_2(x) = \cos^2(x)$, $f_3(x) = 5$. Verifique se S é L.D. ou L.I..

   $(5.f_1 + 5.f_2 - 1.f_3)(x) = 5f_1(x) + 5f_2(x) - f_3(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

   Portanto S é L.D.

Exemplos

6. Sejam $V = P_2(\mathbb{R})$, $S = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$. Verifique se S é L.D. ou L.I..

   S é L.D. $\Leftrightarrow$ $\exists\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que

$$\alpha.1 + \beta.(1+x) + \gamma.(1+x+x^2) = 0$$

$$(\alpha+\beta+\gamma).1 + (\beta+\gamma).x + \gamma.x^2 = 0 \quad \leftarrow \text{ polinômio nulo}$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ \beta+\gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma = 0$$

   Portanto S é L.I.

7. Sejam $V = F(\mathbb{R})$, $S = \{f_1, f_2, f_3\}$, onde $f_1(x) = \text{sen}^2(x)$, $f_2(x) = \cos^2(x)$, $f_3(x) = 5$. Verifique se S é L.D. ou L.I..

   $(5.f_1 + 5.f_2 - 1.f_3)(x) = 5f_1(x) + 5f_2(x) - f_3(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

   Portanto S é L.D.

Exemplos

6. Sejam $V = P_2(\mathbb{R})$, $S = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$. Verifique se S é L.D. ou L.I..

   S é L.D. $\Leftrightarrow$ $\exists\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que

$$\alpha.1 + \beta.(1+x) + \gamma.(1+x+x^2) = 0$$

$$(\alpha+\beta+\gamma).1 + (\beta+\gamma).x + \gamma.x^2 = 0 \leftarrow \text{ polinômio nulo}$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ \beta+\gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma = 0$$

   Portanto S é L.I.

7. Sejam $V = F(\mathbb{R})$, $S = \{f_1, f_2, f_3\}$, onde $f_1(x) = \text{sen}^2(x)$, $f_2(x) = \cos^2(x)$, $f_3(x) = 5$. Verifique se S é L.D. ou L.I..

   $(5.f_1 + 5.f_2 - 1.f_3)(x) = 5f_1(x) + 5f_2(x) - f_3(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

   Portanto S é L.D.

Exemplos

6. Sejam $V = P_2(\mathbb{R})$, $S = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2\}$. Verifique se S é L.D. ou L.I..

   S é L.D. $\Leftrightarrow$ $\exists\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que

   $$\alpha.1 + \beta.(1 + x) + \gamma.(1 + x + x^2) = 0$$

   $$(\alpha + \beta + \gamma).1 + (\beta + \gamma).x + \gamma.x^2 = 0 \leftarrow \text{ polinômio nulo}$$

   $$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma = 0$$

   Portanto S é L.I.

7. Sejam $V = F(\mathbb{R})$, $S = \{f_1, f_2, f_3\}$, onde $f_1(x) = \text{sen}^2(x)$, $f_2(x) = \cos^2(x)$, $f_3(x) = 5$. Verifique se S é L.D. ou L.I..

   $(5.f_1 + 5.f_2 - 1.f_3)(x) = 5f_1(x) + 5f_2(x) - f_3(x) = 0 \;\forall x \in \mathbb{R}$

   Portanto S é L.D.

Exemplos

6. Sejam $V = P_2(\mathbb{R})$, $S = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$. Verifique se S é L.D. ou L.I..

   S é L.D. $\Leftrightarrow$ $\exists\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que

$$\alpha.1 + \beta.(1+x) + \gamma.(1+x+x^2) = 0$$

$$(\alpha+\beta+\gamma).1 + (\beta+\gamma).x + \gamma.x^2 = 0 \quad \leftarrow \text{ polinômio nulo}$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ \beta+\gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma = 0$$

   Portanto S é L.I.

7. Sejam $V = F(\mathbb{R})$, $S = \{f_1, f_2, f_3\}$, onde $f_1(x) = \text{sen}^2(x)$, $f_2(x) = \cos^2(x)$, $f_3(x) = 5$. Verifique se S é L.D. ou L.I..

   $(5.f_1 + 5.f_2 - 1.f_3)(x) = 5f_1(x) + 5f_2(x) - f_3(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

   Portanto S é L.D.

Propriedades

Seja $(V, +, .)$ um espaço vetorial real.

1. Se o vetor nulo de V pertence a um conjunto S de vetores de V, então S é L.D.. Equivalentemente, se S é L.I., então o vetor nulo não pertence a S.
2. Seja $S = \{v\}$ um subconjunto de V. S é L.D. se, e somente se, $v = 0$. Equivalentemente, S é L.I. se, e somente se, $v \neq 0$.
3. Sejam S, L subconjuntos de V tais que $S \subset L$. Se S é L.D., então L é L.D.. Equivalentemente, se L é L.I., então S é L.I..

Prova: 1. Seja $S = \{0, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Então

$$51.0 + 0.v_1 + 0.v_2 + \cdots + 0.v_n = 0$$

é uma combinação linear com coeficientes não todos nulos de elementos de S dando o vetor nulo. Portanto S é L.D..

Propriedades

Seja $(V, +, .)$ um espaço vetorial real.

1. Se o vetor nulo de V pertence a um conjunto S de vetores de V, então S é L.D.. Equivalentemente, se S é L.I., então o vetor nulo não pertence a S.
2. Seja $S = \{v\}$ um subconjunto de V. S é L.D. se, e somente se, $v = 0$. Equivalentemente, S é L.I. se, e somente se, $v \neq 0$.
3. Sejam S, L subconjuntos de V tais que $S \subset L$. Se S é L.D., então L é L.D.. Equivalentemente, se L é L.I., então S é L.I..

Prova: 1. Seja $S = \{0, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Então

$$51.0 + 0.v_1 + 0.v_2 + \cdots + 0.v_n = 0$$

é uma combinação linear com coeficientes não todos nulos de elementos de S dando o vetor nulo. Portanto S é L.D..

Propriedades

Seja $(V, +, .)$ um espaço vetorial real.

1. Se o vetor nulo de V pertence a um conjunto S de vetores de V, então S é L.D.. Equivalentemente, se S é L.I., então o vetor nulo não pertence a S.
2. Seja $S = \{v\}$ um subconjunto de V. S é L.D. se, e somente se, $v = 0$. Equivalentemente, S é L.I. se, e somente se, $v \neq 0$.
3. Sejam S, L subconjuntos de V tais que $S \subset L$. Se S é L.D., então L é L.D.. Equivalentemente, se L é L.I., então S é L.I..

Prova: 1. Seja $S = \{0, v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Então

$$51.0 + 0.v_1 + 0.v_2 + \cdots + 0.v_n = 0$$

é uma combinação linear com coeficientes não todos nulos de elementos de S dando o vetor nulo. Portanto S é L.D..

Propriedades

Seja $(V, +, .)$ um espaço vetorial real.

1. Se o vetor nulo de V pertence a um conjunto S de vetores de V, então S é L.D.. Equivalentemente, se S é L.I., então o vetor nulo não pertence a S.
2. Seja $S = \{v\}$ um subconjunto de V. S é L.D. se, e somente se, $v = 0$. Equivalentemente, S é L.I. se, e somente se, $v \neq 0$.
3. Sejam S, L subconjuntos de V tais que $S \subset L$. Se S é L.D., então L é L.D.. Equivalentemente, se L é L.I., então S é L.I..

Prova: 1. Seja $S = \{0, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Então

$$51.0 + 0.v_1 + 0.v_2 + \cdots + 0.v_n = 0$$

é uma combinação linear com coeficientes não todos nulos de elementos de S dando o vetor nulo. Portanto S é L.D..

Propriedades

2. Seja $S = \{v\}$. S é L.D. se, e somente se, existe $\alpha \neq 0$ tal que $\alpha.v = 0$. Como $\alpha \neq 0$, isto equivale a dizer que

$$\frac{1}{\alpha}.(\alpha.v) = \frac{1}{\alpha}.0 = 0$$

ou seja, $v = 0$. $\leftarrow M_1, M_4$

3. Sejam $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ e $L = \{v_1, v_2, \ldots, v_r, \ldots, v_n\}$. Se S é L.D., existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que

$$\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_r.v_r = 0$$

Logo $$\underbrace{\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_r.v_r}_{=0} + \underbrace{0.v_{r+1} + \cdots + 0.v_n}_{=0} = 0$$

é uma combinação linear dos vetores de L com coeficientes não todos nulos dando o vetor nulo. Portanto L é L.D.. $\square$

Propriedades

2. Seja $S = \{v\}$. S é L.D. se, e somente se, existe $\alpha \neq 0$ tal que $\alpha.v = 0$. Como $\alpha \neq 0$, isto equivale a dizer que

$$\frac{1}{\alpha}.(\alpha.v) = \frac{1}{\alpha}.0 = 0$$

ou seja, $v = 0$. $\leftarrow M_1, M_4$

3. Sejam $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ e $L = \{v_1, v_2, \dots, v_r, \dots, v_n\}$. Se S é L.D., existem $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que

$$\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_r.v_r = 0$$

Logo $$\underbrace{\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_r.v_r}_{=0} + \underbrace{0.v_{r+1} + \cdots + 0.v_v}_{=0} = 0$$

é uma combinação linear dos vetores de L com coeficientes não todos nulos dando o vetor nulo. Portanto L é L.D.. $\square$

Propriedades

2. Seja $S = \{v\}$. S é L.D. se, e somente se, existe $\alpha \neq 0$ tal que $\alpha.v = 0$. Como $\alpha \neq 0$, isto equivale a dizer que

$$\frac{1}{\alpha}.(\alpha.v) = \frac{1}{\alpha}.0 = 0$$

ou seja, $v = 0$. $\leftarrow M_1, M_4$

3. Sejam $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ e $L = \{v_1, v_2, \ldots, v_r, \ldots, v_n\}$. Se S é L.D., existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que

$$\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_r.v_r = 0$$

Logo $$\underbrace{\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_r.v_r}_{=0} + \underbrace{0.v_{r+1} + \cdots + 0.v_v}_{=0} = 0$$

é uma combinação linear dos vetores de L com coeficientes não todos nulos dando o vetor nulo. Portanto L é L.D.. $\square$

Propriedades

2. Seja $S = \{v\}$. S é L.D. se, e somente se, existe $\alpha \neq 0$ tal que $\alpha.v = 0$. Como $\alpha \neq 0$, isto equivale a dizer que
$$\frac{1}{\alpha}.(\alpha.v) = \frac{1}{\alpha}.0 = 0$$
ou seja, $v = 0$. $\leftarrow M_1, M_4$

3. Sejam $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ e $L = \{v_1, v_2, \ldots, v_r, \ldots, v_n\}$. Se S é L.D., existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que
$$\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_r.v_r = 0$$
Logo $$\underbrace{\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_r.v_r}_{=0} + \underbrace{0.v_{r+1} + \cdots + 0.v_v}_{=0} = 0$$
é uma combinação linear dos vetores de L com coeficientes não todos nulos dando o vetor nulo. Portanto L é L.D. $\square$

Propriedades

2. Seja $S = \{v\}$. S é L.D. se, e somente se, existe $\alpha \neq 0$ tal que $\alpha.v = 0$. Como $\alpha \neq 0$, isto equivale a dizer que
$$\frac{1}{\alpha}.(\alpha.v) = \frac{1}{\alpha}.0 = 0$$
ou seja, $v = 0$. $\leftarrow M_1, M_4$

3. Sejam $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ e $L = \{v_1, v_2, \ldots, v_r, \ldots, v_n\}$. Se S é L.D., existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que
$$\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_r.v_r = 0$$
Logo $$\underbrace{\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_r.v_r}_{=0} + \underbrace{0.v_{r+1} + \cdots + 0.v_v}_{=0} = 0$$
é uma combinação linear dos vetores de L com coeficientes não todos nulos dando o vetor nulo. Portanto L é L.D.. $\square$

Propriedades

2. Seja $S = \{v\}$. S é L.D. se, e somente se, existe $\alpha \neq 0$ tal que $\alpha.v = 0$. Como $\alpha \neq 0$, isto equivale a dizer que
$$\frac{1}{\alpha}.(\alpha.v) = \frac{1}{\alpha}.0 = 0$$
ou seja, $v = 0$. $\leftarrow M_1, M_4$

3. Sejam $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ e $L = \{v_1, v_2, \ldots, v_r, \ldots, v_n\}$. Se S é L.D., existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que
$$\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_r.v_r = 0$$
Logo $$\underbrace{\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_r.v_r}_{=0} + \underbrace{0.v_{r+1} + \cdots + 0.v_v}_{=0} = 0$$
é uma combinação linear dos vetores de L com coeficientes não todos nulos dando o vetor nulo. Portanto L é L.D.. $\square$

Propriedades

2. Seja $S = \{v\}$. S é L.D. se, e somente se, existe $\alpha \neq 0$ tal que $\alpha.v = 0$. Como $\alpha \neq 0$, isto equivale a dizer que
$$\frac{1}{\alpha}.(\alpha.v) = \frac{1}{\alpha}.0 = 0$$
ou seja, $v = 0$. $\leftarrow M_1, M_4$

3. Sejam $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ e $L = \{v_1, v_2, \ldots, v_r, \ldots, v_n\}$. Se S é L.D., existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que
$$\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_r.v_r = 0$$
Logo $$\underbrace{\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_r.v_r}_{=0} + \underbrace{0.v_{r+1} + \cdots + 0.v_v}_{=0} = 0$$
é uma combinação linear dos vetores de L com coeficientes não todos nulos dando o vetor nulo. Portanto L é L.D.. □

Propriedades

2. Seja $S = \{v\}$. S é L.D. se, e somente se, existe $\alpha \neq 0$ tal que $\alpha.v = 0$. Como $\alpha \neq 0$, isto equivale a dizer que

$$\frac{1}{\alpha}.(\alpha.v) = \frac{1}{\alpha}.0 = 0$$

ou seja, $v = 0$. $\leftarrow M_1, M_4$

3. Sejam $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ e $L = \{v_1, v_2, \ldots, v_r, \ldots, v_n\}$. Se S é L.D., existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que

$$\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_r.v_r = 0$$

Logo $$\underbrace{\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_r.v_r}_{=0} + \underbrace{0.v_{r+1} + \cdots + 0.v_v}_{=0} = 0$$

é uma combinação linear dos vetores de L com coeficientes não todos nulos dando o vetor nulo. Portanto L é L.D.. $\square$

Propriedades

4. Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real e $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$. Se S é L.I. e para $u \in V$ temos $S \cup \{u\}$ L.D., então $u \in [S]$, ou seja, u é combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Equivalentemente, se S é L.I. e $u \notin [S]$, então $S \cup \{u\}$ é L.I..

Prova: Como $S \cup \{u\} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n, u\}$ é L.D., existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que

$$\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n + \beta.u = 0$$

Se $\beta = 0$, então

$$\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n = 0$$

é uma combinação linear dos vetores de S com coeficientes não todos nulos dando o vetor nulo. Isso contradiz a hipótese de S ser L.I.. Portanto $\beta \neq 0$. Segue daí que

$$u = -\frac{\alpha_1}{\beta}.v_1 - \frac{\alpha_2}{\beta}.v_2 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\beta}.v_n.$$

$\square$

Propriedades

4. Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real e $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$. Se S é L.I. e para $u \in V$ temos $S \cup \{u\}$ L.D., então $u \in [S]$, ou seja, u é combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Equivalentemente, se S é L.I. e $u \notin [S]$, então $S \cup \{u\}$ é L.I..

Prova: Como $S \cup \{u\} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n, u\}$ é L.D., existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que

$$\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n + \beta.u = 0$$

Se $\beta = 0$, então

$$\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n = 0$$

é uma combinação linear dos vetores de S com coeficientes não todos nulos dando o vetor nulo. Isso contradiz a hipótese de S ser L.I.. Portanto $\beta \neq 0$. Segue daí que

$$u = -\frac{\alpha_1}{\beta}.v_1 - \frac{\alpha_2}{\beta}.v_2 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\beta}.v_n.$$

$\square$

Propriedades

4. Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real e $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$. Se S é L.I. e para $u \in V$ temos $S \cup \{u\}$ L.D., então $u \in [S]$, ou seja, u é combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Equivalentemente, se S é L.I. e $u \notin [S]$, então $S \cup \{u\}$ é L.I..

Prova: Como $S \cup \{u\} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n, u\}$ é L.D., existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que

$$\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n + \beta.u = 0$$

Se $\beta = 0$, então

$$\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n = 0$$

é uma combinação linear dos vetores de S com coeficientes não todos nulos dando o vetor nulo. Isso contradiz a hipótese de S ser L.I.. Portanto $\beta \neq 0$. Segue daí que

$$u = -\frac{\alpha_1}{\beta}.v_1 - \frac{\alpha_2}{\beta}.v_2 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\beta}.v_n.$$

Propriedades

4. Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real e $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$. Se S é L.I. e para $u \in V$ temos $S \cup \{u\}$ L.D., então $u \in [S]$, ou seja, u é combinação linear de $v_1, v_2, \dots, v_n$. Equivalentemente, se S é L.I. e $u \notin [S]$, então $S \cup \{u\}$ é L.I..

Prova: Como $S \cup \{u\} = \{v_1, v_2, \dots, v_n, u\}$ é L.D., existem $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que

$$\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n + \beta.u = 0$$

Se $\beta = 0$, então

$$\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n = 0$$

é uma combinação linear dos vetores de S com coeficientes não todos nulos dando o vetor nulo. Isso contradiz a hipótese de S ser L.I.. Portanto $\beta \neq 0$. Segue daí que

$$u = -\frac{\alpha_1}{\beta}.v_1 - \frac{\alpha_2}{\beta}.v_2 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\beta}.v_n.$$

Propriedades

4. Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real e $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$. Se S é L.I. e para $u \in V$ temos $S \cup \{u\}$ L.D., então $u \in [S]$, ou seja, u é combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Equivalentemente, se S é L.I. e $u \notin [S]$, então $S \cup \{u\}$ é L.I..

Prova: Como $S \cup \{u\} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n, u\}$ é L.D., existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que

$$\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n + \beta.u = 0$$

Se $\beta = 0$, então

$$\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n = 0$$

é uma combinação linear dos vetores de S com coeficientes não todos nulos dando o vetor nulo. Isso contradiz a hipótese de S ser L.I.. Portanto $\beta \neq 0$. Segue daí que

$$u = -\frac{\alpha_1}{\beta}.v_1 - \frac{\alpha_2}{\beta}.v_2 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\beta}.v_n.$$

$\square$

Propriedades

4. Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real e $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$. Se S é L.I. e para $u \in V$ temos $S \cup \{u\}$ L.D., então $u \in [S]$, ou seja, u é combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Equivalentemente, se S é L.I. e $u \notin [S]$, então $S \cup \{u\}$ é L.I..

Prova: Como $S \cup \{u\} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n, u\}$ é L.D., existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que

$$\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n + \beta.u = 0$$

Se $\beta = 0$, então

$$\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n = 0$$

é uma combinação linear dos vetores de S com coeficientes não todos nulos dando o vetor nulo. Isso contradiz a hipótese de S ser L.I.. Portanto $\beta \neq 0$. Segue daí que

$$u = -\frac{\alpha_1}{\beta}.v_1 - \frac{\alpha_2}{\beta}.v_2 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\beta}.v_n. \qquad \square$$

Propriedades

4. Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real e $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$. Se S é L.I. e para $u \in V$ temos $S \cup \{u\}$ L.D., então $u \in [S]$, ou seja, u é combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Equivalentemente, se S é L.I. e $u \notin [S]$, então $S \cup \{u\}$ é L.I..

Prova: Como $S \cup \{u\} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n, u\}$ é L.D., existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que

$$\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n + \beta.u = 0$$

Se $\beta = 0$, então

$$\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n = 0$$

é uma combinação linear dos vetores de S com coeficientes não todos nulos dando o vetor nulo. Isso contradiz a hipótese de S ser L.I.. Portanto $\beta \neq 0$. Segue daí que

$$u = -\frac{\alpha_1}{\beta}.v_1 - \frac{\alpha_2}{\beta}.v_2 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\beta}.v_n.$$

$\square$

Propriedades

5. Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real e $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$. Se $v_j \in [S - \{v_j\}]$, então $[S] = [S - \{v_j\}]$.

Prova: Como $S - \{v_j\} \subset S$, então $[S - \{v_j\}] \subset [S]$. $\leftarrow$ $S_1 \subset S_2 \overset{g_2}{\Rightarrow} [S_1] \subset [S_2]$

Queremos mostrar que $[S] \subset [S - \{v_j\}]$. Seja $u \in [S]$. Então

$$u = \alpha_1.v_1 + \cdots + \alpha_j.v_j + \cdots + \alpha_n.v_n.$$

Como $v_j \in [S - \{v_j\}]$, $v_j = \beta_1.v_1 + \cdots + \beta_{j-1}.v_{j-1} + \beta_{j+1}.v_{j+1} + \cdots + \beta_n.v_n$.

Logo,

$$u = \alpha_1.v_1 + \cdots + \alpha_j(\beta_1.v_1 + \cdots + \beta_{j-1}.v_{j-1} + \beta_{j+1}.v_{j+1} + \cdots + \beta_n.v_n) + \cdots + \alpha_n.v_n$$

é uma combinação linear dos vetores de $S - \{v_j\}$. Portanto $[S] = [S - \{v_j\}]$. $\square$

Propriedades

5. Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real e $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$. Se $v_j \in [S - \{v_j\}]$, então $[S] = [S - \{v_j\}]$.

Prova: Como $S - \{v_j\} \subset S$, então $[S - \{v_j\}] \subset [S]$. $\leftarrow$ $S_1 \subset S_2 \overset{g_2}{\Rightarrow} [S_1] \subset [S_2]$

Queremos mostrar que $[S] \subset [S - \{v_j\}]$. Seja $u \in [S]$. Então

$$u = \alpha_1.v_1 + \cdots + \alpha_j.v_j + \cdots + \alpha_n.v_n.$$

Como $v_j \in [S - \{v_j\}]$, $v_j = \beta_1.v_1 + \cdots + \beta_{j-1}.v_{j-1} + \beta_{j+1}.v_{j+1} + \cdots + \beta_n.v_n$.

Logo,

$$u = \alpha_1.v_1 + \cdots + \alpha_j(\beta_1.v_1 + \cdots + \beta_{j-1}.v_{j-1} + \beta_{j+1}.v_{j+1} + \cdots + \beta_n.v_n) + \cdots + \alpha_n.v_n$$

é uma combinação linear dos vetores de $S - \{v_j\}$. Portanto $[S] = [S - \{v_j\}]$. $\square$

Propriedades

5. Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real e $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$. Se $v_j \in [S - \{v_j\}]$, então $[S] = [S - \{v_j\}]$.

Prova: Como $S - \{v_j\} \subset S$, então $[S - \{v_j\}] \subset [S]$. $\leftarrow$ $S_1 \subset S_2 \overset{g_2}{\Rightarrow} [S_1] \subset [S_2]$

Queremos mostrar que $[S] \subset [S - \{v_j\}]$. Seja $u \in [S]$. Então

$$u = \alpha_1.v_1 + \cdots + \alpha_j.v_j + \cdots + \alpha_n.v_n.$$

Como $v_j \in [S - \{v_j\}]$, $v_j = \beta_1.v_1 + \cdots + \beta_{j-1}.v_{j-1} + \beta_{j+1}.v_{j+1} + \cdots + \beta_n.v_n$.

Logo,

$$u = \alpha_1.v_1 + \cdots + \alpha_j(\beta_1.v_1 + \cdots + \beta_{j-1}.v_{j-1} + \beta_{j+1}.v_{j+1} + \cdots + \beta_n.v_n) + \cdots + \alpha_n.v_n$$

é uma combinação linear dos vetores de $S - \{v_j\}$. Portanto $[S] = [S - \{v_j\}]$. $\square$

Propriedades

5. Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real e $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$. Se $v_j \in [S - \{v_j\}]$, então $[S] = [S - \{v_j\}]$.

Prova: Como $S - \{v_j\} \subset S$, então $[S - \{v_j\}] \subset [S]$. $\leftarrow$ $S_1 \subset S_2 \overset{g_2}{\Rightarrow} [S_1] \subset [S_2]$

Queremos mostrar que $[S] \subset [S - \{v_j\}]$. Seja $u \in [S]$. Então

$$u = \alpha_1.v_1 + \cdots + \alpha_j.v_j + \cdots + \alpha_n.v_n.$$

Como $v_j \in [S - \{v_j\}]$, $v_j = \beta_1.v_1 + \cdots + \beta_{j-1}.v_{j-1} + \beta_{j+1}.v_{j+1} + \cdots + \beta_n.v_n$.

Logo,

$$u = \alpha_1.v_1 + \cdots + \alpha_j(\beta_1.v_1 + \cdots + \beta_{j-1}.v_{j-1} + \beta_{j+1}.v_{j+1} + \cdots + \beta_n.v_n) + \cdots + \alpha_n.v_n$$

é uma combinação linear dos vetores de $S - \{v_j\}$. Portanto $[S] = [S - \{v_j\}]$. $\square$

Propriedades

5. Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real e $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$. Se $v_j \in [S - \{v_j\}]$, então $[S] = [S - \{v_j\}]$.

Prova: Como $S - \{v_j\} \subset S$, então $[S - \{v_j\}] \subset [S]$. $\leftarrow$ $S_1 \subset S_2 \overset{g_2}{\Rightarrow} [S_1] \subset [S_2]$

Queremos mostrar que $[S] \subset [S - \{v_j\}]$. Seja $u \in [S]$. Então

$$u = \alpha_1.v_1 + \cdots + \alpha_j.v_j + \cdots + \alpha_n.v_n.$$

Como $v_j \in [S - \{v_j\}]$, $v_j = \beta_1.v_1 + \cdots + \beta_{j-1}.v_{j-1} + \beta_{j+1}.v_{j+1} + \cdots + \beta_n.v_n$.
Logo,

$$u = \alpha_1.v_1 + \cdots + \alpha_j(\beta_1.v_1 + \cdots + \beta_{j-1}.v_{j-1} + \beta_{j+1}.v_{j+1} + \cdots + \beta_n.v_n) + \cdots + \alpha_n.v_n$$

é uma combinação linear dos vetores de $S - \{v_j\}$. Portanto $[S] = [S - \{v_j\}]$.

Propriedades

5. Sejam $(V,+,.)$ um espaço vetorial real e $S=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}\subset V$. Se $v_j\in[S-\{v_j\}]$, então $[S]=[S-\{v_j\}]$.

Prova: Como $S-\{v_j\}\subset S$, então $[S-\{v_j\}]\subset[S]$. $\leftarrow$ $S_1\subset S_2 \overset{g_2}{\Rightarrow} [S_1]\subset[S_2]$

Queremos mostrar que $[S]\subset[S-\{v_j\}]$. Seja $u\in[S]$. Então

$$u=\alpha_1.v_1+\cdots+\alpha_j.v_j+\cdots+\alpha_n.v_n.$$

Como $v_j\in[S-\{v_j\}]$, $v_j=\beta_1.v_1+\cdots+\beta_{j-1}.v_{j-1}+\beta_{j+1}.v_{j+1}+\cdots+\beta_n.v_n$.

Logo,

$$u=\alpha_1.v_1+\cdots+\alpha_j(\beta_1.v_1+\cdots+\beta_{j-1}.v_{j-1}+\beta_{j+1}.v_{j+1}+\cdots+\beta_n.v_n)+\cdots+\alpha_n.v_n$$

é uma combinação linear dos vetores de $S-\{v_j\}$. Portanto $[S]=[S-\{v_j\}]$.

$\square$

Propriedades

5. Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real e $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$. Se $v_j \in [S - \{v_j\}]$, então $[S] = [S - \{v_j\}]$.

Prova: Como $S - \{v_j\} \subset S$, então $[S - \{v_j\}] \subset [S]$. $\leftarrow$ $S_1 \subset S_2 \overset{g_2}{\Rightarrow} [S_1] \subset [S_2]$

Queremos mostrar que $[S] \subset [S - \{v_j\}]$. Seja $u \in [S]$. Então

$$u = \alpha_1.v_1 + \cdots + \alpha_j.v_j + \cdots + \alpha_n.v_n.$$

Como $v_j \in [S - \{v_j\}]$, $v_j = \beta_1.v_1 + \cdots + \beta_{j-1}.v_{j-1} + \beta_{j+1}.v_{j+1} + \cdots + \beta_n.v_n$.

Logo,

$$u = \alpha_1.v_1 + \cdots + \alpha_j(\beta_1.v_1 + \cdots + \beta_{j-1}.v_{j-1} + \beta_{j+1}.v_{j+1} + \cdots + \beta_n.v_n) + \cdots + \alpha_n.v_n$$

é uma combinação linear dos vetores de $S - \{v_j\}$. Portanto $[S] = [S - \{v_j\}]$.

$\square$

Propriedades

5. Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real e $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$. Se $v_j \in [S - \{v_j\}]$, então $[S] = [S - \{v_j\}]$.

Prova: Como $S - \{v_j\} \subset S$, então $[S - \{v_j\}] \subset [S]$. $\leftarrow$ $S_1 \subset S_2 \overset{g_2}{\Rightarrow} [S_1] \subset [S_2]$

Queremos mostrar que $[S] \subset [S - \{v_j\}]$. Seja $u \in [S]$. Então

$$u = \alpha_1.v_1 + \cdots + \alpha_j.v_j + \cdots + \alpha_n.v_n.$$

Como $v_j \in [S - \{v_j\}]$, $v_j = \beta_1.v_1 + \cdots + \beta_{j-1}.v_{j-1} + \beta_{j+1}.v_{j+1} + \cdots + \beta_n.v_n$.

Logo,

$$u = \alpha_1.v_1 + \cdots + \alpha_j(\beta_1.v_1 + \cdots + \beta_{j-1}.v_{j-1} + \beta_{j+1}.v_{j+1} + \cdots + \beta_n.v_n) + \cdots + \alpha_n.v_n$$

é uma combinação linear dos vetores de $S - \{v_j\}$. Portanto $[S] = [S - \{v_j\}]$.

$\square$

Propriedades

5. Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real e $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$. Se $v_j \in [S - \{v_j\}]$, então $[S] = [S - \{v_j\}]$.

Prova: Como $S - \{v_j\} \subset S$, então $[S - \{v_j\}] \subset [S]$. $\leftarrow$ $S_1 \subset S_2 \overset{g_2}{\Rightarrow} [S_1] \subset [S_2]$

Queremos mostrar que $[S] \subset [S - \{v_j\}]$. Seja $u \in [S]$. Então

$$u = \alpha_1.v_1 + \cdots + \alpha_j.v_j + \cdots + \alpha_n.v_n.$$

Como $v_j \in [S - \{v_j\}]$, $v_j = \beta_1.v_1 + \cdots + \beta_{j-1}.v_{j-1} + \beta_{j+1}.v_{j+1} + \cdots + \beta_n.v_n$.

Logo,

$$u = \alpha_1.v_1 + \cdots + \alpha_j(\beta_1.v_1 + \cdots + \beta_{j-1}.v_{j-1} + \beta_{j+1}.v_{j+1} + \cdots + \beta_n.v_n) + \cdots + \alpha_n.v_n$$

é uma combinação linear dos vetores de $S - \{v_j\}$. Portanto $[S] = [S - \{v_j\}]$.

$\square$