Base de autovetores

Definição e exemplos

Álgebra Linear

Mariana Silveira - Cristian Coletti

Universidade Federal do ABC

Aula passada

Sejam V espaço vetorial, $T : V \to V$, $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear.

- Autovetor de T: $v \neq 0$,

$$T(v) = \lambda\, v, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

  λ autovalor de T.

- Autoespaço associado a λ:

$$V_\lambda = \{v \in V/\ T(v) = \lambda v\} = N(T - \lambda I)$$

- Fixando B base de V

  $P_T(\lambda) = det([T]_{B,B} - \lambda I)$ é o polinômio caracteristico de T. (Não depende de B).

Aula passada

Sejam V espaço vetorial, $T : V \to V$, $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear.

- Autovetor de T: $v \neq 0$,

$$T(v) = \lambda\, v, \ \ \lambda \in \mathbb{R}$$

  λ autovalor de T.

- Autoespaço associado a λ:

$$V_\lambda = \{v \in V / \ T(v) = \lambda v\} = N(T - \lambda I)$$

- Fixando B base de V

  $P_T(\lambda) = det([T]_{B,B} - \lambda I)$ é o polinômio caracteristico de T. (Não depende de B).

Aula passada

Sejam V espaço vetorial, $T : V \to V$, $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear.

- Autovetor de T: $v \neq 0$,

$$T(v) = \lambda\, v, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

  λ autovalor de T.

- Autoespaço associado a λ:

$$V_\lambda = \{v \in V /\ T(v) = \lambda v\} = N(T - \lambda I)$$

- Fixando B base de V

  $P_T(\lambda) = det([T]_{B,B} - \lambda I)$ é o polinômio caracteristico de T. (Não depende de B).

Aula passada

Sejam V espaço vetorial, $T : V \to V$, $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear.

- Autovetor de T: $v \neq 0$,

  $$T(v) = \lambda\, v, \;\; \lambda \in \mathbb{R}$$

  λ autovalor de T.

- Autoespaço associado a λ:

  $$V_\lambda = \{v \in V/\; T(v) = \lambda v\} = N(T - \lambda I)$$

- Fixando B base de V

  $P_T(\lambda) = det([T]_{B,B} - \lambda I)$ é o polinômio caracteristico de T. (Não depende de B).

- λ é autovalor de $T \iff \lambda$ é raiz de $P_T(\lambda)$
- Autovetor de T associados a λ $v \neq 0$, tal que $([T]_{B,B} - \lambda I)[v]_B = 0$

$$([T]_{B,B} - \lambda I)[v]_B = \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

- λ é autovalor de $T \iff \lambda$ é raiz de $P_T(\lambda)$
- Autovetor de T associados a λ $v \neq 0$, tal que $([T]_{B,B} - \lambda I)[v]_B = 0$

$$([T]_{B,B} - \lambda I)[v]_B = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

- λ é autovalor de $T \iff \lambda$ é raiz de $P_T(\lambda)$
- Autovetor de T associados a λ $v \neq 0$, tal que $([T]_{B,B} - \lambda I)[v]_B = 0$

$$([T]_{B,B} - \lambda I)[v]_B = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Definição

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$, $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear em V. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de T:

a) *A multiplicidade algebrica de λ, que denotamos por ma(λ) é a multiplicidade da raiz λ no polinômio caracteristico $P_T(\lambda)$.*

b) *A multiplicidade geométrica de λ, que denotamos por mg(λ) é a dimensão do autoespaço associado a λ no polinômio caracteristico $P_T(\lambda)$ dim $V_\lambda =$ dim $N(T - \lambda I)$.*

Definição

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$, $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear em V. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de T:

a) *A multiplicidade algebrica de λ, que denotamos por ma(λ) é a multiplicidade da raiz λ no polinômio caracteristico $P_T(\lambda)$.*

b) *A multiplicidade geométrica de λ, que denotamos por mg(λ) é a dimensão do autoespaço associado a λ no polinômio caracteristico $P_T(\lambda)$*
$\dim V_\lambda = \dim N(T - \lambda I)$.

Voltando ao Exemplo 1. da aula passada

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\to (y, x) \end{aligned}$$

$$P_T(\lambda) = det([T] - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 1$$

$P_T(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$

$V_1 = [(1, 1)]$

$V_{-1} = [(-1, 1)]$

- $\lambda = 1$

  $ma(1) = 1$

  $mg(1) = 1$

- $\lambda = -1$

  $ma(-1) = 1$

  $mg(-1) = 1$

Voltando ao Exemplo 1. da aula passada

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\to (y,x) \end{aligned}$$

$$P_T(\lambda) = det([T] - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 1$$

$P_T(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$

$V_1 = [(1,1)]$

$V_{-1} = [(-1,1)]$

- $\lambda = 1$

  $ma(1) = 1$

  $mg(1) = 1$

- $\lambda = -1$

  $ma(-1) = 1$

  $mg(-1) = 1$

Voltando ao Exemplo 1. da aula passada

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\to (y, x) \end{aligned}$$

$$P_T(\lambda) = det([T] - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 1$$

$P_T(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$

$V_1 = [(1, 1)]$

$V_{-1} = [(-1, 1)]$

- $\lambda = 1$

  $ma(1) = 1$

  $mg(1) = 1$

- $\lambda = -1$

  $ma(-1) = 1$

  $mg(-1) = 1$

Voltando ao Exemplo 1. da aula passada

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\to (y, x) \end{aligned}$$

$$P_T(\lambda) = det([T] - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 1$$

$P_T(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$

$V_1 = [(1, 1)]$

$V_{-1} = [(-1, 1)]$

- $\lambda = 1$

  $ma(1) = 1$

  $mg(1) = 1$

- $\lambda = -1$

  $ma(-1) = 1$

  $mg(-1) = 1$

Voltando ao Exemplo 1. da aula passada

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\to (y, x) \end{aligned}$$

$$P_T(\lambda) = det([T] - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 1$$

$P_T(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$

$V_1 = [(1, 1)]$

$V_{-1} = [(-1, 1)]$

- $\lambda = 1$

  $ma(1) = 1$

  $mg(1) = 1$

- $\lambda = -1$

  $ma(-1) = 1$

  $mg(-1) = 1$

Voltando ao Exemplo 1. da aula passada

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \rightarrow (y, x) \end{aligned}$$

$$P_T(\lambda) = det([T] - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 1$$

$P_T(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$

$V_1 = [(1, 1)]$

$V_{-1} = [(-1, 1)]$

- $\lambda = 1$

  $ma(1) = 1$

  $mg(1) = 1$

- $\lambda = -1$

  $ma(-1) = 1$

  $mg(-1) = 1$

Voltando ao Exemplo 2. da aula passada

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\to (8x, 8y) \end{aligned}$$

$[T] = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

$$P_T(\lambda) = det([T] - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 8-\lambda & 0 \\ 0 & 8-\lambda \end{bmatrix} = (8-\lambda)^2$$

Autovalores: λ é autovalor de $T \iff \lambda$ é raiz de $P_T(\lambda)$

$$(8-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 8$$

$V_8 = \mathbb{R}^2$

- $\lambda = 8$

  $ma(8) = 2$

  $mg(8) = 2$

Voltando ao Exemplo 2. da aula passada

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\to (8x, 8y) \end{aligned}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$P_T(\lambda) = det([T] - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 8-\lambda & 0 \\ 0 & 8-\lambda \end{bmatrix} = (8-\lambda)^2$$

Autovalores: λ é autovalor de $T \iff \lambda$ é raiz de $P_T(\lambda)$

$$(8-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 8$$

$V_8 = \mathbb{R}^2$

- $\lambda = 8$

  $ma(8) = 2$

  $mg(8) = 2$

Voltando ao Exemplo 2. da aula passada

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\to (8x, 8y) \end{aligned}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$P_T(\lambda) = det([T] - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 8-\lambda & 0 \\ 0 & 8-\lambda \end{bmatrix} = (8-\lambda)^2$$

Autovalores: λ é autovalor de $T \iff \lambda$ é raiz de $P_T(\lambda)$

$$(8-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 8$$

$V_8 = \mathbb{R}^2$

- $\lambda = 8$

  $ma(8) = 2$

  $mg(8) = 2$

Voltando ao Exemplo 2. da aula passada

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\to (8x, 8y) \end{aligned}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$P_T(\lambda) = det([T] - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 8-\lambda & 0 \\ 0 & 8-\lambda \end{bmatrix} = (8-\lambda)^2$$

Autovalores: λ é autovalor de $T \iff \lambda$ é raiz de $P_T(\lambda)$

$$(8-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 8$$

$V_8 = \mathbb{R}^2$

- $\lambda = 8$

  $ma(8) = 2$

  $mg(8) = 2$

Exemplo

$$T: \quad \mathbb{R}^3 \quad \to \mathbb{R}^3$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_T(\lambda) = det([T] - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2(-\lambda)$$

Autovalores: λ é autovalor de $T \iff \lambda$ é raiz de $P_T(\lambda)$

$$(1-\lambda)^2(-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ ou } (1-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

Exemplo

$$T: \quad \mathbb{R}^3 \quad \to \mathbb{R}^3$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_T(\lambda) = det([T] - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2(-\lambda)$$

Autovalores: λ é autovalor de $T \iff \lambda$ é raiz de $P_T(\lambda)$

$$(1-\lambda)^2(-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ ou } (1-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

Exemplo

$$T: \quad \mathbb{R}^3 \quad \to \mathbb{R}^3$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_T(\lambda) = det([T] - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2(-\lambda)$$

Autovalores: λ é autovalor de $T \iff \lambda$ é raiz de $P_T(\lambda)$

$$(1-\lambda)^2(-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ ou } (1-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

Exemplo

$$T: \quad \mathbb{R}^3 \quad \to \mathbb{R}^3$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_T(\lambda) = det([T] - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2(-\lambda)$$

Autovalores: λ é autovalor de $T \iff \lambda$ é raiz de $P_T(\lambda)$

$$(1-\lambda)^2(-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ ou } (1-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

$\lambda = 1$ $ma(\lambda) = 2$

Autovetor asssociado a $\lambda = 1$: $v = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ talque $([T] - I)[v] = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$y = 0$ e $z = 0$ Autovetor $\{(x, 0, 0), x \neq 0\}$

$$V_1 = \{(x, 0, 0),\ x \in \mathbb{R}\} = [(1, 0, 0)]$$

$mg(1) = 1$ então $mg(1) \neq ma(1)$

$\lambda = 1$ $ma(\lambda) = 2$

Autovetor asssociado a $\lambda = 1$: $v = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ talque $([T] - I)[v] = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$y = 0$ e $z = 0$ Autovetor $\{(x, 0, 0), x \neq 0\}$

$$V_1 = \{(x, 0, 0),\ x \in \mathbb{R}\} = [(1, 0, 0)]$$

$mg(1) = 1$ então $mg(1) \neq ma(1)$

$\lambda = 1$ $ma(\lambda) = 2$

Autovetor asssociado a $\lambda = 1$: $v = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ talque $([T] - I)[v] = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$y = 0$ e $z = 0$ Autovetor $\{(x, 0, 0), x \neq 0\}$

$$V_1 = \{(x, 0, 0),\ x \in \mathbb{R}\} = [(1, 0, 0)]$$

$mg(1) = 1$ então $mg(1) \neq ma(1)$

$\lambda = 0$ $ma(\lambda) = 1$

Autovetor asssociado a $\lambda = 0$: $v = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ talque $([T] - 0I)[v] = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Autovetor $\{(0, 0, z), z \neq 0\}$

$$V_0 = \{(0, 0, z),\ z \in \mathbb{R}\} = [(0, 0, 1)]$$

$mg(0) = 1$

$\lambda = 0$ $ma(\lambda) = 1$

Autovetor asssociado a $\lambda = 0$: $v = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ talque $([T] - 0I)[v] = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Autovetor $\{(0, 0, z), z \neq 0\}$

$$V_0 = \{(0, 0, z),\ z \in \mathbb{R}\} = [(0, 0, 1)]$$

$mg(0) = 1$

$\lambda = 0$ $ma(\lambda) = 1$

Autovetor asssociado a $\lambda = 0$: $v = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ talque $([T] - 0I)[v] = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Autovetor $\{(0, 0, z), z \neq 0\}$

$$V_0 = \{(0, 0, z),\ z \in \mathbb{R}\} = [(0, 0, 1)]$$

$mg(0) = 1$

$\lambda = 1$ $ma(\lambda) = 2$

Autovetor asssociado a $\lambda = 1$: $v = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ talque $([T] - I)[v] = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$y = 0$ e $z = 0$

Autovetor $\{(x, 0, 0), x \neq 0\}$

$$V_1 = \{(x, 0, 0),\ x \in \mathbb{R}\} = [(1, 0, 0)]$$

$mg(1) = 1$ então $mg(1) \neq ma(1)$

$\lambda = 1$ $ma(\lambda) = 2$

Autovetor asssociado a $\lambda = 1$: $v = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ talque $([T] - I)[v] = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$y = 0$ e $z = 0$

Autovetor $\{(x, 0, 0), x \neq 0\}$

$$V_1 = \{(x, 0, 0),\ x \in \mathbb{R}\} = [(1, 0, 0)]$$

$mg(1) = 1$ então $mg(1) \neq ma(1)$

$\lambda = 1$ $ma(\lambda) = 2$

Autovetor asssociado a $\lambda = 1$: $v = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ talque $([T] - I)[v] = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$y = 0$ e $z = 0$

Autovetor $\{(x, 0, 0), x \neq 0\}$

$$V_1 = \{(x, 0, 0),\ x \in \mathbb{R}\} = [(1, 0, 0)]$$

$mg(1) = 1$ então $mg(1) \neq ma(1)$

Exemplo

$$T : P_1(\mathbb{R}) \to P_1(\mathbb{R})$$

$T(1+x) = 5+2x$

$T(4+x) = -2(4+x)$

$B = \{1+x, 4+x\}$ é base para $P_1(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} T(1+x) &= a_{11}(1+x) + a_{21}(4+x) \\ 5+2x &= (a_{11}+4a_{21}).1 + (a_{11}+a_{21})x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a_{11}+4a_{21}) &= 5 \\ (a_{11}+a_{21}) &= 2 \end{aligned}$$

$$a_{11} = 1 \ e \ a_{21} = 1$$

Exemplo

$$T : P_1(\mathbb{R}) \to P_1(\mathbb{R})$$

$T(1+x) = 5+2x$

$T(4+x) = -2(4+x)$

$B = \{1+x, 4+x\}$ é base para $P_1(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} T(1+x) &= a_{11}(1+x) + a_{21}(4+x) \\ 5+2x &= (a_{11}+4a_{21}).1 + (a_{11}+a_{21})x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a_{11}+4a_{21}) &= 5 \\ (a_{11}+a_{21}) &= 2 \end{aligned}$$

$$a_{11} = 1 \; e \; a_{21} = 1$$

$$\begin{aligned} T(4+x) &= a_{12}(1+x) + a_{22}(4+x) \\ -2(4+x) &= (a_{12}+4a_{22}).1 + (a_{12}+a_{22})x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a_{12}+4a_{22}) &= -8 \\ (a_{12}+a_{22}) &= -2 \end{aligned}$$

$$a_{12} = 0 \ e \ a_{22} = -2$$

$$\begin{aligned} T(1+x) &= 1(1+x) + 1(4+x) \\ T(4+x) &= 0(1+x) - 2(4+x) \end{aligned}$$

$$[T]_{B,B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} T(4+x) &= a_{12}(1+x) + a_{22}(4+x) \\ -2(4+x) &= (a_{12}+4a_{22}).1 + (a_{12}+a_{22})x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a_{12}+4a_{22}) &= -8 \\ (a_{12}+a_{22}) &= -2 \end{aligned}$$

$$a_{12} = 0 \; e \; a_{22} = -2$$

$$\begin{aligned} T(1+x) &= 1(1+x) + 1(4+x) \\ T(4+x) &= 0(1+x) - 2(4+x) \end{aligned}$$

$$[T]_{B,B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} T(4+x) &= a_{12}(1+x)+a_{22}(4+x) \\ -2(4+x) &= (a_{12}+4a_{22}).1+(a_{12}+a_{22})x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a_{12}+4a_{22}) &= -8 \\ (a_{12}+a_{22}) &= -2 \end{aligned}$$

$$a_{12}=0 \text{ } e \text{ } a_{22}=-2$$

$$\begin{aligned} T(1+x) &= 1(1+x)+1(4+x) \\ T(4+x) &= 0(1+x)-2(4+x) \end{aligned}$$

$$[T]_{B,B}=\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{array}\right]$$

Polinômio caracteristico

$$P_T(\lambda) = det([T]_{B,B} - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & -2-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda)$$

Autovalores $\lambda = 1$ e $\lambda = -2$

Se $\lambda = 1$ então $ma(1) = 1$

Autovetores: $p \in P(\mathbb{R}) : p \neq 0$ e $([T]_{B,B} - \lambda I)[p]_B = 0$. Verifique que se $p(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$, então

$$[p]_B = \begin{bmatrix} -1/3\,\alpha_1 + 4/3\,\alpha_2 \\ (\alpha_1 - \alpha_2)/3 \end{bmatrix}.$$

Por simplicidade defina $a = -1/3\,\alpha_1 + 4/3\,\alpha_2$ e $b = (\alpha_1 - \alpha_2)/3$.

Polinômio caracteristico

$$P_T(\lambda) = det([T]_{B,B} - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & -2-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda)$$

Autovalores $\lambda = 1$ e $\lambda = -2$

Se $\lambda = 1$ então $ma(1) = 1$

Autovetores: $p \in P(\mathbb{R}) : p \neq 0$ e $([T]_{B,B} - \lambda I)[p]_B = 0$. Verifique que se $p(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$, então

$$[p]_B = \begin{bmatrix} -1/3\ \alpha_1 + 4/3\ \alpha_2 \\ (\alpha_1 - \alpha_2)/3 \end{bmatrix}.$$

Por simplicidade defina $a = -1/3\ \alpha_1 + 4/3\ \alpha_2$ e $b = (\alpha_1 - \alpha_2)/3$.

Assim sendo, p é autovetor se e somente se

$p \in P(\mathbb{R}) : p \neq 0$ e $([T]_{B,B} - \lambda I)[p]_B = 0$. Isto é. se

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Logo $a - 3b = 0$ e $a = 3b$

Autovetores: $[p]_B = \left\{ \begin{bmatrix} 3b \\ b \end{bmatrix},\ b \neq 0 \right\}$

$p(x) = 3b(1 + x) + b(4 + x) = 7b + 4bx = b(7 + 4x)$.

Autovetores $\{b(7+4x),\ b \neq 0\}$

$V_1 = \{b(7+4x), b \in \mathbb{R}\} = [7+4x]\ mg(1) = 1$

Se $\lambda = -2\ ma(-2) = 1$

Autovetor: $p \neq 0 : ([T]_{B,B} + 2\lambda I)[p]_B = 0$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como antes a e b denenotam as coordenadas de p com relação à base B. O sistema de equações acima nos diz que $a = 0$.

Autovetores $[p]_B = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix},\ b \neq 0 \right\}$

$p(x) = 0.(1+x) + b(4+x) = b(4+x)$

Autovetores $\{b(4+x),\ b \neq 0\}\ mg(-2) = 1$

$V_{-2} = [4+x]$.

Autovetores $\{b(7+4x),\ b \neq 0\}$

$V_1 = \{b(7+4x), b \in \mathbb{R}\} = [7+4x]$ $mg(1) = 1$

Se $\lambda = -2$ $ma(-2) = 1$

Autovetor: $p \neq 0 : ([T]_{B,B} + 2\lambda I)[p]_B = 0$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como antes a e b denenotam as coordenadas de p com relação à base B. O sistema de equações acima nos diz que $a = 0$.

Autovetores $[p]_B = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix},\ b \neq 0 \right\}$

$p(x) = 0.(1+x) + b(4+x) = b(4+x)$

Autovetores $\{b(4+x),\ b \neq 0\}$ $mg(-2) = 1$

$V_{-2} = [4+x]$.

Diagonalização de Operadores

Sejam V espaço vetorial e T um operador linear em V.

Objetivo:
Encontrar uma base B de V tal que $[T]_{B,B}$ seja o mais simples possível (matriz diagonal).

Perguntas:
Quando existe B tal que $[T]_{B,B}$ seja matriz diagonal?
Como encontrar B no caso em que B exista?

Diagonalização de Operadores

Sejam V espaço vetorial e T um operador linear em V.

Objetivo:
Encontrar uma base B de V tal que $[T]_{B,B}$ seja o mais simples possível (matriz diagonal).

Perguntas:

Quando existe B tal que $[T]_{B,B}$ seja matriz diagonal?

Como encontrar B no caso em que B exista?

Definição

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$, $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear em V. Dizemos que T é **diagonalizável** *se existe uma base B de V tal que $[T]_{B,B}$ seja matriz diagonal*

Exemplo

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\to (3x + 3y, x + 5y) \end{aligned}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Polinômio caracteristico

$$P_T(\lambda) = det([T] - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 1 & 5-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(5-\lambda) - 3$$

Exemplo

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\to (3x + 3y, x + 5y) \end{aligned}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Polinômio caracteristico

$$P_T(\lambda) = det([T] - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 3 - \lambda & 3 \\ 1 & 5 - \lambda \end{bmatrix} = (3 - \lambda)(5 - \lambda) - 3$$

Exemplo

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\to (3x + 3y, x + 5y) \end{aligned}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Polinômio caracteristico

$$P_T(\lambda) = det([T] - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 3 - \lambda & 3 \\ 1 & 5 - \lambda \end{bmatrix} = (3 - \lambda)(5 - \lambda) - 3$$

Exemplo

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\rightarrow (3x + 3y, x + 5y) \end{aligned}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Polinômio caracteristico

$$P_T(\lambda) = det([T] - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 3 - \lambda & 3 \\ 1 & 5 - \lambda \end{bmatrix} = (3 - \lambda)(5 - \lambda) - 3$$

Autovalor de T é raiz de $P_T(\lambda)$

$P_T(\lambda) = (3-\lambda)(5-\lambda) - 3$ isto é $P_T(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0.$

logo $\lambda = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{2}$ então $\lambda = 6$ ou $\lambda = 2$

Se $\lambda = 2$ $ma(2) = 1$

Autovetor asssociado a $\lambda = 2$: $v = (x, y) \neq (0, 0)$ talque $([T] - 2I)[v] = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x + 3y = 0$ então $x = -3y$ Autovetor $\{(x, y) \neq (0, 0)/x = -3y\}$

$$V_2 = \{(-3y, y),\ y \in \mathbb{R}\} = [(-3, 1)]$$

$mg(2) = 1$

Autovalor de T é raiz de $P_T(\lambda)$

$P_T(\lambda) = (3-\lambda)(5-\lambda) - 3$ isto é $P_T(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0$.

logo $\lambda = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{2}$ então $\lambda = 6$ ou $\lambda = 2$

Se $\lambda = 2$ $ma(2) = 1$

Autovetor asssociado a $\lambda = 2$: $v = (x, y) \neq (0, 0)$ talque $([T] - 2I)[v] = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x + 3y = 0$ então $x = -3y$ Autovetor $\{(x, y) \neq (0, 0)/x = -3y\}$

$$V_2 = \{(-3y, y),\ y \in \mathbb{R}\} = [(-3, 1)]$$

$mg(2) = 1$

Autovalor de T é raiz de $P_T(\lambda)$

$P_T(\lambda) = (3-\lambda)(5-\lambda) - 3$ isto é $P_T(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0.$

logo $\lambda = \frac{8\pm\sqrt{64-48}}{2}$ então $\lambda = 6$ ou $\lambda = 2$

Se $\lambda = 2$ $ma(2) = 1$

Autovetor asssociado a $\lambda = 2$: $v = (x, y) \neq (0,0)$ talque $([T] - 2I)[v] = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x + 3y = 0$ então $x = -3y$ Autovetor $\{(x, y) \neq (0,0)/x = -3y\}$

$$V_2 = \{(-3y, y),\ y \in \mathbb{R}\} = [(-3,1)]$$

$mg(2) = 1$

Autovalor de T é raiz de $P_T(\lambda)$

$P_T(\lambda) = (3-\lambda)(5-\lambda) - 3$ isto é $P_T(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0$.

logo $\lambda = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{2}$ então $\lambda = 6$ ou $\lambda = 2$

Se $\lambda = 2$ $ma(2) = 1$

Autovetor asssociado a $\lambda = 2$: $v = (x, y) \neq (0, 0)$ talque $([T] - 2I)[v] = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x + 3y = 0$ então $x = -3y$ Autovetor $\{(x, y) \neq (0, 0)/x = -3y\}$

$$V_2 = \{(-3y, y),\ y \in \mathbb{R}\} = [(-3, 1)]$$

$mg(2) = 1$

Autovalor de T é raiz de $P_T(\lambda)$

$P_T(\lambda) = (3-\lambda)(5-\lambda) - 3$ isto é $P_T(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0.$

logo $\lambda = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{2}$ então $\lambda = 6$ ou $\lambda = 2$

Se $\lambda = 2$ $ma(2) = 1$

Autovetor asssociado a $\lambda = 2$: $v = (x, y) \neq (0, 0)$ talque $([T] - 2I)[v] = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x + 3y = 0$ então $x = -3y$ Autovetor $\{(x, y) \neq (0, 0)/x = -3y\}$

$$V_2 = \{(-3y, y),\ y \in \mathbb{R}\} = [(-3, 1)]$$

$mg(2) = 1$

Autovalor de T é raiz de $P_T(\lambda)$

$P_T(\lambda) = (3-\lambda)(5-\lambda) - 3$ isto é $P_T(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0$.

logo $\lambda = \frac{8\pm\sqrt{64-48}}{2}$ então $\lambda = 6$ ou $\lambda = 2$

Se $\lambda = 2$ $ma(2) = 1$

Autovetor asssociado a $\lambda = 2$: $v = (x, y) \neq (0, 0)$ talque $([T] - 2I)[v] = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x + 3y = 0$ então $x = -3y$ Autovetor $\{(x, y) \neq (0, 0)/x = -3y\}$

$$V_2 = \{(-3y, y),\ y \in \mathbb{R}\} = [(-3, 1)]$$

$mg(2) = 1$

Se $\lambda = 6$ $ma(6) = 1$

Autovetor asssociado a $\lambda = 6$: $v = (x, y) \neq (0, 0)$ talque $([T] - 6I)[v] = 0$

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x = y$ Autovetor $\{(x, x) \neq (0, 0)/x \neq 0\}$

$$V_6 = \{(x, x),\ x \in \mathbb{R}\} = [(1, 1)]$$

$mg(6) = 1$

Se $\lambda = 6$ $ma(6) = 1$

Autovetor asssociado a $\lambda = 6$: $v = (x, y) \neq (0, 0)$ talque $([T] - 6I)[v] = 0$

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x = y$ Autovetor $\{(x, x) \neq (0, 0)/x \neq 0\}$

$$V_6 = \{(x, x),\ x \in \mathbb{R}\} = [(1, 1)]$$

$mg(6) = 1$

Se $\lambda = 6$ $ma(6) = 1$

Autovetor asssociado a $\lambda = 6$: $v = (x, y) \neq (0, 0)$ talque $([T] - 6I)[v] = 0$

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x = y$ Autovetor $\{(x, x) \neq (0, 0)/x \neq 0\}$

$$V_6 = \{(x, x),\ x \in \mathbb{R}\} = [(1, 1)]$$

$mg(6) = 1$

Tome $v_1 = (-3, 1)$ autovetor associado a $\lambda_1 = 2$

e $v_2 = (1, 1)$ autovetor associado a $\lambda_2 = 6$

$B = \{(-3, 1), (1, 1)\}$ é base para $V = \mathbb{R}^2$

$T(-3, 1) = 2(-3, 1) + 0(1, 1)$

$T(1, 1) = 0(-3, 1) + 6(1, 1)$

$$[T]_{B,B} = \left[\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{array} \right]$$

é uma matriz diagonal

B é base de autovetores!

O exemplo acima nos sugere que T é diagonal $\Longleftrightarrow$ V admite uma base formada por autovetores de T.

Tome $v_1 = (-3, 1)$ autovetor associado a $\lambda_1 = 2$

e $v_2 = (1, 1)$ autovetor associado a $\lambda_2 = 6$

$B = \{(-3, 1), (1, 1)\}$ é base para $V = \mathbb{R}^2$

$T(-3, 1) = 2(-3, 1) + 0(1, 1)$

$T(1, 1) = 0(-3, 1) + 6(1, 1)$

$$[T]_{B,B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

é uma matriz diagonal

B é base de autovetores!

O exemplo acima nos sugere que T é diagonal $\iff$ V admite uma base formada por autovetores de T.

Tome $v_1 = (-3, 1)$ autovetor associado a $\lambda_1 = 2$

e $v_2 = (1, 1)$ autovetor associado a $\lambda_2 = 6$

$B = \{(-3, 1), (1, 1)\}$ é base para $V = \mathbb{R}^2$

$T(-3, 1) = 2(-3, 1) + 0(1, 1)$

$T(1, 1) = 0(-3, 1) + 6(1, 1)$

$$[T]_{B,B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

é uma matriz diagonal

B é base de autovetores!

O exemplo acima nos sugere que T é diagonal $\iff$ V admite uma base formada por autovetores de T.

Tome $v_1 = (-3, 1)$ autovetor associado a $\lambda_1 = 2$

e $v_2 = (1, 1)$ autovetor associado a $\lambda_2 = 6$

$B = \{(-3, 1), (1, 1)\}$ é base para $V = \mathbb{R}^2$

$T(-3, 1) = 2(-3, 1) + 0(1, 1)$

$T(1, 1) = 0(-3, 1) + 6(1, 1)$

$$[T]_{B,B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

é uma matriz diagonal

B é base de autovetores!

O exemplo acima nos sugere que T é diagonal $\Longleftrightarrow$ V admite uma base formada por autovetores de T.

Tome $v_1 = (-3, 1)$ autovetor associado a $\lambda_1 = 2$

e $v_2 = (1, 1)$ autovetor associado a $\lambda_2 = 6$

$B = \{(-3, 1), (1, 1)\}$ é base para $V = \mathbb{R}^2$

$T(-3, 1) = 2(-3, 1) + 0(1, 1)$

$T(1, 1) = 0(-3, 1) + 6(1, 1)$

$$[T]_{B,B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

é uma matriz diagonal

B é base de autovetores!

O exemplo acima nos sugere que T é diagonal $\iff$ V admite uma base formada por autovetores de T.

Tome $v_1 = (-3, 1)$ autovetor associado a $\lambda_1 = 2$

e $v_2 = (1, 1)$ autovetor associado a $\lambda_2 = 6$

$B = \{(-3, 1), (1, 1)\}$ é base para $V = \mathbb{R}^2$

$T(-3, 1) = 2(-3, 1) + 0(1, 1)$

$T(1, 1) = 0(-3, 1) + 6(1, 1)$

$$[T]_{B,B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

é uma matriz diagonal

B é base de autovetores!

O exemplo acima nos sugere que T é diagonal $\iff$ V admite uma base formada por autovetores de T.

Proposição

Sejam V espaço vetorial e $T : V \to V$ um operador linear em V. T é diagonalizável se, e somente se, existe uma base de V formada por autovetores

Demonstração:

$\Rightarrow$ Suponha que T seja diagonalizável e seja $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ base de V tal que

$$[T]_{B,B} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

matriz diagonal.

Então

$$\begin{aligned} T(v_1) &= \lambda_1 v_1 + 0v_2 + ... + 0v_n \\ T(v_2) &= 0v_1 + \lambda_2 v_2 + 0v_3 + ... + 0v_n \\ &\vdots \\ T(v_n) &= 0v_1 + 0v_2 + ... + \lambda_n v_n \end{aligned}$$

$v_1, v_2, ..., v_n$ são autovetores associados a $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ respectivamente.

$\Leftarrow$ Suponha que V possui uma base $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de autovetores de T. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$, não necessariamente distintos, tais que v_i é autovetor associado a λ_i, $i = 1, ..., n$.

Então

$$\begin{array}{rcl} T(v_1) & = & \lambda_1 v_1 + 0v_2 + ... + 0v_n \\ T(v_2) & = & 0v_1 + \lambda_2 v_2 + 0v_3 + ... + 0v_n \\ & \vdots & \\ T(v_n) & = & 0v_1 + 0v_2 + ... + \lambda_n v_n \end{array}$$

$v_1, v_2, ..., v_n$ são autovetores associados a $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ respectivamente.
$\Leftarrow$ Suponha que V possui uma base $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de autovetores de T.
Sejam $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$, não necessariamente distintos, tais que v_i é autovetor associado a λ_i, $i = 1, ..., n$.

Então

$$\begin{aligned} T(v_1) &= \lambda_1 v_1 = \lambda_1 v_1 + 0v_2 + ... + 0v_n \\ T(v_2) &= \lambda_2 v_2 = 0v_1 + \lambda_2 v_2 + 0v_3 + ... + 0v_n \\ &\vdots \\ T(v_n) &= \lambda_n v_n = 0v_1 + 0v_2 + ... + \lambda_n v_n \end{aligned}$$

Portanto

$$[T]_{B,B} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

matriz diagonal.

Assim, T é diagonalizável.

Observação:

Quando T é diagonalizável, a base B de V tal que $[T]_{B,B}$ é diagonal é a base de autovetores. Os autovalores são os números na diagonal de $[T]_{B,B}$

$$[T]_{B,B} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

v_1 autovetor associado ao autovalor λ_1

$\vdots$

v_n autovetor associado ao autovalor λ_n

$B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ base formada por autovetores de T.

Exemplo (Voltando ao exemplo anterior)

$$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Autovalores: $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_2 = 1$

Como $V_0 = [(0,0,1)]$ e $V_1 = [(1,0,0)]$

e não temos 3 vetores LI

então T não é diagonalizável.

Exemplo (Voltando ao exemplo anterior)

$$T: \quad \mathbb{R}^3 \quad \to \mathbb{R}^3$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Autovalores: $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_2 = 1$

Como $V_0 = [(0, 0, 1)]$ e $V_1 = [(1, 0, 0)]$

e não temos 3 vetores LI

então T não é diagonalizável.

Exemplo (Voltando ao exemplo anterior)

$$T: \quad \mathbb{R}^3 \quad \to \mathbb{R}^3$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Autovalores: $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_2 = 1$

Como $V_0 = [(0, 0, 1)]$ e $V_1 = [(1, 0, 0)]$

e não temos 3 vetores LI

então T não é diagonalizável.