# Álgebra Linear - 2022.3

## Lista 5- Matriz mudança de base

1) Sejam $B_1 = \{(1,0),(0,1)\}$, $B_2 = \{(1,1),(2,3)\}$ e $B_3 = \{(-1,2),(-2,1)\}$. Exiba as matrizes mudança de base:

(a) da base $B_2$ para a base $B_1$.

**Solução**

Queremos determinar a matriz $P$ de mudança da base $B_2$ para a base $B_1$. Para tal, vamos escrever os elementos da base $B_2$ como combinação linear dos elementos da base $B_1$, isto é:

$$(1,1) = a_1(1,0) + a_2(0,1) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \end{cases}$$

e

$$(2,3) = b_1(1,0) + b_2(0,1) \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 2 \\ b_2 = 3 \end{cases} .$$

Portanto,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(b) da base $B_1$ para a base $B_3$.

**Solução**

Queremos determinar a matriz $Q$ de mudança da base $B_1$ para a base $B_3$. Para tal, vamos escrever os elementos da base $B_1$ como combinação linear dos elementos da base $B_3$, isto é:

$$(1,0) = a_1(-1,2) + a_2(-2,1) \Leftrightarrow \begin{cases} -a_1 - 2a_2 = 1 \\ 2a_1 + a_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{1}{3} \\ a_2 = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

e

$$(0,1) = b_1(-1,2) + b_2(-2,1) \Leftrightarrow \begin{cases} -b_1 - 2b_2 = 0 \\ 2b_1 + b_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{2}{3} \\ b_2 = -\frac{1}{3} \end{cases} .$$

Portanto,

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

(c) da base $B_2$ para a base $B_3$.

**Solução**

Queremos determinar a matriz $R$ de mudança da base $B_2$ para a base $B_3$. Para tal, vamos escrever os elementos da base $B_2$ como combinação linear dos elementos da base $B_3$, isto é:

$$(1,1) = a_1(-1,2) + a_2(-2,1) \Leftrightarrow \begin{cases} -a_1 - 2a_2 = 1 \\ 2a_1 + a_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = -1 \end{cases}$$

e

$$(2,3) = b_1(-1,2) + b_2(-2,1) \Leftrightarrow \begin{cases} -b_1 - 2b_2 = 2 \\ 2b_1 + b_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{8}{3} \\ b_2 = -\frac{7}{3} \end{cases} .$$

Portanto,

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \frac{8}{3} \\ -1 & -\frac{7}{3} \end{bmatrix}.$$

2) Quais são as coordenadas do vetor $v = (2, -3)$ em relação às bases $B_1, B_2$ e $B_3$?

**Solução**

Para determinarmos $[v]_{B_1}$ vamos escrever $v$ como combinação linear dos vetores da base $B_1$, isto é:

$$(2, -3) = 2(1, 0) - 3(0, 1) \Rightarrow [v]_{B_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Para determinarmos $[v]_{B_2}$ vamos escrever $v$ como combinação linear dos vetores da base $B_2$, isto é:

$$(2, -3) = a_1(1, 1) + a_2(2, 3) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 2a_2 = 2 \\ a_1 + 3a_2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 12 \\ a_2 = -5 \end{cases} \Rightarrow [v]_{B_2} = \begin{bmatrix} 12 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Para determinarmos $[v]_{B_3}$ vamos escrever $v$ como combinação linear dos vetores da base $B_3$, isto é:

$$(2, -3) = b_1(-1, 2) + b_2(-2, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} -b_1 - 2b_2 = 2 \\ 2b_1 + b_2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = -\dfrac{4}{3} \\ b_2 = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow [v]_{B_3} = \begin{bmatrix} -\dfrac{4}{3} \\ -\dfrac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

3) As coordenadas de uma vetor $w$ em relação à base $B_2$ são dadas por:

$$[w]_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Quais são as coordenadas de $w$ em relação às bases $B_1$ e $B_3$.

**Solução**

Temos que a matriz mudança da base $B_2$ para a base $B_1$ é:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$[w]_{B_1} = P\,[w]_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Também, temos que a matriz mudança da base $B_2$ para a base $B_3$ é:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{8}{3} \\ -1 & -\dfrac{7}{3} \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$[w]_{B_3} = R\,[w]_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{8}{3} \\ -1 & -\dfrac{7}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

4) Considere V o espaço vetorial de matrizes $2 \times 2$ e duas bases das matrizes triangulares superiores

$$\beta_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e

$$\beta_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Encontre a matriz de mudança da base $\beta_2$ para a base $\beta_1$.

**Solução**

Queremos determinar a matriz $A$ de mudança da base $\beta_2$ para a base $\beta_1$. Para tal, vamos escrever os elementos da base $\beta_2$ como combinação linear dos elementos da base $\beta_1$, isto é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 1 \\ b_2 = 1 \\ b_3 = 0 \end{cases},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \\ c_3 = 1 \end{cases}.$$

Portanto,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$