

Álgebra Linear - 2022.

Lista 6- Transformações Lineares

1) Quais das transformações abaixo são lineares?

(a) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (z, 2^y, 2^z)$.

Solução

T não é transformação linear, pois $T(0, 0, 0) = (0, 2^0, 2^0) = (0, 1, 1) \neq (0, 0, 0)$.

(b) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (3x, 2, 5z)$.

Solução

T não é transformação linear, pois $T(0, 0, 0) = (0, 2, 0) \neq (0, 0, 0)$.

(c) $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, T(x, y, z, w) = (x - w, y - w, x + z)$.

Solução

Sejam $u = (x_1, y_1, z_1, w_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2, w_2)$ em \mathbb{R}^4 e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} \text{i. } T(u + v) &= T((x_1, y_1, z_1, w_1) + (x_2, y_2, z_2, w_2)) \\ &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, w_1 + w_2) \\ &= (x_1 + x_2 - (w_1 + w_2), y_1 + y_2 - (w_1 + w_2), x_1 + x_2 + z_1 + z_2) \\ &= (x_1 - w_1, y_1 - w_1, x_1 + z_1) + (x_2 - w_2, y_2 - w_2, x_2 + z_2) \\ &= T(u) + T(v). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } T(\alpha u) &= T(\alpha(x_1, y_1, z_1, w_1)) \\ &= T(\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1, \alpha w_1) \\ &= (\alpha x_1 + \alpha w_1, \alpha y_1 - \alpha w_1, \alpha x_1 + \alpha z_1) \\ &= (\alpha(x_1 + w_1), \alpha(y_1 - w_1), \alpha(x_1 + z_1)) \\ &= \alpha(x_1 + w_1, y_1 - w_1, x_1 + z_1) \\ &= \alpha T(u). \end{aligned}$$

Portanto, T é uma transformação linear.

(d) $T : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n, T(A) = (A_{11}, A_{22}, \dots, A_{nn})$.

Solução

Sejam $A = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} B_{11} & \dots & B_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ B_{n1} & \dots & B_{nn} \end{bmatrix}$ em $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} \text{i. } T(A + B) &= T\left(\begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & \dots & A_{1n} + B_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ A_{n1} + B_{n1} & \dots & A_{nn} + B_{nn} \end{bmatrix}\right) \\ &= (A_{11} + B_{11}, \dots, A_{nn} + B_{nn}) \\ &= (A_{11}, \dots, A_{nn}) + (B_{11}, \dots, B_{nn}) \\ &= T(A) + T(B). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } T(\alpha A) &= T\left(\begin{bmatrix} \alpha A_{11} & \dots & \alpha A_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha A_{n1} & \dots & \alpha A_{nn} \end{bmatrix}\right) \\ &= (\alpha A_{11}, \dots, \alpha A_{nn}) \\ &= \alpha (A_{11}, \dots, A_{nn}) \\ &= \alpha T(A). \end{aligned}$$

Portanto, T é uma transformação linear.

(e) $T : C^2(\mathbb{R}) \longrightarrow C(\mathbb{R}), T(f) = 3f'' - 2f' + 1.$

Solução

T não é transformação linear, pois para $f \equiv 0$ em $C^2(\mathbb{R})$, $T(0) = 1 \neq 0 \equiv f$ em $C(\mathbb{R})$.

(f) $T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, T(A) = A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}.$

Solução

T não é transformação linear. De fato, seja $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} T(\alpha A) &= T\left(\begin{bmatrix} \alpha A_{11} & \alpha A_{12} \\ \alpha A_{21} & \alpha A_{22} \end{bmatrix}\right) \\ &= \alpha^2 A_{11}A_{22} - \alpha^2 A_{21}A_{12} \\ &= \alpha^2 (A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}) \\ &= \alpha^2 T(A) \\ &\neq \alpha T(A), \forall \alpha \neq \pm 1 \text{ e } A \neq 0_{2 \times 2}. \end{aligned}$$

(g) $T : C([a, b], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, T(f) = \int_a^b f(x) dx.$

Solução

Sejam $f, g \in C([a, b], \mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

i. $T(f + g) = \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx = T(f) + T(g).$

ii. $T(\alpha f) = \int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx = \alpha T(f).$

Portanto, T é uma transformação linear.

(h) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (|x|, 2x + 2y).$

Solução

T não é transformação linear. De fato, sejam $u = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$T(\alpha u) = T((-1)(1, 0)) = T(-1, 0) = (|-1|, -2) = (1, -2).$

Por outro lado,

$\alpha T(u) = (-1)T(1, 0) = (-1)(|1|, 2) = (-1)(1, 2) = (-1, -2).$

Portanto, $T(\alpha u) \neq \alpha T(u)$ e, assim, T não é transformação linear.

(i) $T : P_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2, T(a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3) = (a_3 + a_2 - a_1, a_0).$

Solução

Sejam $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$ e $q(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + b_3t^3$ em $P_3(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então:

$$\begin{aligned} \text{i. } T(p + q) &= T((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2 + (a_3 + b_3)t^3) \\ &= ((a_3 + b_3) + (a_2 + b_2) - (a_1 + b_1), a_0 + b_0) \\ &= ((a_3 + a_2 - a_1) + (b_3 + b_2 - b_1), a_0 + b_0) \\ &= (a_3 + a_2 - a_1, a_0) + (b_3 + b_2 - b_1, b_0) \\ &= T(p) + T(q). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } T(\alpha p) &= T(\alpha a_0 + \alpha a_1t + \alpha a_2t^2 + \alpha a_3t^3) \\ &= (\alpha a_3 + \alpha a_2 - \alpha a_1, \alpha a_0) \\ &= \alpha(a_3 + a_2 - a_1, a_0) \\ &= \alpha T(p). \end{aligned}$$

Portanto, T é uma transformação linear.

(j) $T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2, T(A) = (A_{11} - A_{12}, A_{11} + A_{12}).$

Solução

Sejam $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$ em $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} \text{i. } T(A+B) &= T\left(\begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} \end{bmatrix}\right) \\ &= (A_{11}+B_{11} - (A_{12}+B_{12}), A_{11}+B_{11} + A_{12}+B_{12}) \\ &= (A_{11} - A_{12}, A_{11} + A_{12}) + (B_{11} - B_{12}, B_{11} + B_{12}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i. } T(\alpha A) &= T\left(\begin{bmatrix} \alpha A_{11} & \alpha A_{12} \\ \alpha A_{21} & \alpha A_{22} \end{bmatrix}\right) \\ &= (\alpha A_{11} - \alpha A_{12}, \alpha A_{11} + \alpha A_{12}) \\ &= \alpha(A_{11} - A_{12}, A_{11} + A_{12}) \\ &= \alpha T(A). \end{aligned}$$

Portanto, T é uma transformação linear.

$$(k) T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3, T(A) = (A_{11} - A_{12}, A_{21} + A_{22}, 2A_{11} - A_{21}).$$

Solução

Sejam $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$ em $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} \text{i. } T(A+B) &= T\left(\begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} \end{bmatrix}\right) \\ &= (A_{11}+B_{11} - (A_{12}+B_{12}), A_{21}+B_{21} + A_{22}+B_{22}, 2(A_{11}+B_{11}) - (A_{21}+B_{21})) \\ &= (A_{11} - A_{12}, A_{21} + A_{22}, 2A_{11} - A_{21}) + (B_{11} - B_{12}, B_{21} + B_{22}, 2B_{11} - B_{21}) \\ &= T(A) + T(B). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i. } T(\alpha A) &= T\left(\begin{bmatrix} \alpha A_{11} & \alpha A_{12} \\ \alpha A_{21} & \alpha A_{22} \end{bmatrix}\right) \\ &= (\alpha A_{11} - \alpha A_{12}, \alpha A_{21} + \alpha A_{22}, 2\alpha A_{11} - \alpha A_{21}) \\ &= \alpha(A_{11} - A_{12}, A_{21} + A_{22}, 2A_{11} - A_{21}) \\ &= \alpha T(A). \end{aligned}$$

Portanto, T é uma transformação linear.

$$(l) T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x + y, x - y).$$

Solução

Sejam $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ em \mathbb{R}^2 e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} \text{i. } T(u+v) &= T(x_1+x_2, y_1+y_2) \\ &= (x_1+x_2+y_1+y_2, x_1+x_2-y_1-y_2) \\ &= (x_1+y_1, x_1-y_1) + (x_2+y_2, x_2-y_2) \\ &= T(u) + T(v). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } T(\alpha u) &= T(\alpha x_1, \alpha y_1) \\ &= (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_1 - \alpha y_1) \\ &= \alpha(x_1 + y_1, x_1 - y_1) \\ &= \alpha T(u). \end{aligned}$$

Portanto, T é uma transformação linear.

$$(m) T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, T(A) = \det(A).$$

Solução

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ em $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, então

$$T(A+B) = T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1.$$

Por outro lado,

$$T(A) + T(B) = \det(A) + \det(B) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) + \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0 + 0 = 0.$$

Logo, $T(A+B) \neq T(A) + T(B)$.

Portanto, T não é uma transformação linear.

$$(n) T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R}), T(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solução

Sejam $A, B \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} \text{i. } T(A+B) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (A+B) \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= T(A) + T(B). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } T(\alpha A) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \alpha A \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \alpha \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \alpha T(A). \end{aligned}$$

Portanto, T é uma transformação linear.

$$(o) T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, T(x, y) = xy.$$

Solução

Sejam $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, com $x \neq 0, y \neq 0$ e $\pm 1 \neq \alpha \in \mathbb{R}$, então

$$T(\alpha u) = T(\alpha x, \alpha y) = \alpha x \alpha y = \alpha^2 xy \neq \alpha xy = \alpha T(u).$$

Portanto, T não é uma transformação linear.

$$(p) T : P_2 \longrightarrow P_3, T(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + c.$$

Solução

Sejam $p(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ e $q(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$ em P_2 e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} \text{i. } T(p(x) + q(x)) &= T((a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)) \\ &= (a_1 + a_2)x^3 + (b_1 + b_2)x^2 + (c_1 + c_2) \\ &= (a_1x^3 + b_1x^2 + c_1) + (a_2x^3 + b_2x^2 + c_2) \\ &= T(p(x)) + T(q(x)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } T(\alpha p(x)) &= T(\alpha a_1x^2 + \alpha b_1x + \alpha c_1) \\ &= \alpha a_1x^3 + \alpha b_1x^2 + \alpha c_1 \\ &= \alpha(a_1x^3 + b_1x^2 + c_1) \\ &= \alpha T(p(x)). \end{aligned}$$

Portanto, T é uma transformação linear.

$$(q) T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow M_{2 \times 2}, T(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \\ y & -x \end{bmatrix}.$$

Solução

Sejam $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ em \mathbb{R}^2 e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} \text{i. } T(u+v) &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ y_1 + y_2 & -x_1 - x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ y_1 & -x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ y_2 & -x_2 \end{bmatrix} \\ &= T(u) + T(v). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } T(\alpha u) &= T(\alpha x_1, \alpha y_1) \\ &= \begin{bmatrix} \alpha x_1 & \alpha y_1 \\ \alpha y_1 & -\alpha x_1 \end{bmatrix} \\ &= \alpha \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ y_1 & -x_1 \end{bmatrix} \\ &= \alpha T(u). \end{aligned}$$

Portanto, T é uma transformação linear.

- 2) Dados os vetores $u_1 = (2, -1)$, $u_2 = (1, 1)$, $u_3 = (-1, -4)$, $v_1 = (1, 3)$, $v_2 = (2, 3)$, $v_3 = (-5, -6)$ decida se existe ou não uma transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(u_i) = v_i$, $i = 1, 2, 3$.

Solução

Sim, existe uma transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(u_i) = v_i$, $i = 1, 2, 3$. Para determiná-la, escrevemos um vetor genérico de \mathbb{R}^2 como combinação linear dos vetores u_i

$$a(2, -1) + b(1, 1) + c(-1, -4) = (x, y).$$

De onde temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2a + b - c = x \\ -a + b - 4c = y. \end{cases}$$

Cuja solução é $a = \frac{x-y}{3} - c$, $b = \frac{x+2y}{3} + 3c$, $c \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\left(\frac{x-y}{3} - c\right)(2, -1) + \left(\frac{x+2y}{3} + 3c\right)(1, 1) + c(-1, -4) = (x, y).$$

Logo, escolhendo $c = 0$ (mostrar que existe para qualquer c), temos que

$$\frac{x-y}{3}(2, -1) + \frac{x+2y}{3}(1, 1) = (x, y).$$

Aplicando a transformação linear T em ambos os lados da igualdade acima e considerando $T(u_1) = T(2, -1) = (1, 3) = v_1$ e $T(u_2) = T(1, 1) = (2, 3) = v_2$, obtemos

$$\begin{aligned} T(x, y) &= \frac{x-y}{3}T(2, -1) + \frac{x+2y}{3}T(1, 1) \\ &= \frac{x-y}{3}(1, 3) + \frac{x+2y}{3}(2, 3) \\ &= (x+y, 2x+y). \end{aligned}$$

Portanto, $T(x, y) = (x+y, 2x+y)$ é a transformação linear que satisfaz $T(u_i) = v_i$, $i = 1, 2, 3$.

- 3) Determine $T: V \rightarrow W$ conhecendo os valores de T na base de V .

- (a) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, tal que $T(1, 3, -1) = (1, 1, -1, 0)$, $T(2, 0, 1) = (0, 0, 1, -1)$ e $T(0, -1, 1) = (1, 0, -1, 0)$

Solução

Para determinar T , escrevemos

$$a(1, 3, -1) + b(2, 0, 1) + c(0, -1, 1) = (x, y, z)$$

De onde temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a + 2b = x \\ 3a - c = y \\ -a + b + c = z. \end{cases}$$

Cuja solução é $a = \frac{-x+2y+2z}{3}$, $b = \frac{2x-y-z}{3}$ e $c = -x+y+2z$. Assim,

$$\frac{-x+2y+2z}{3}(1, 3, -1) + \frac{2x-y-z}{3}(2, 0, 1) + (-x+y+2z)(0, -1, 1) = (x, y, z).$$

Logo, aplicando a transformação linear T em ambos os lados da igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= \frac{-x+2y+2z}{3}T(1, 3, -1) + \frac{2x-y-z}{3}T(2, 0, 1) + (-x+y+2z)T(0, -1, 1) \\ &= \frac{-x+2y+2z}{3}(1, 1, -1, 0) + \frac{2x-y-z}{3}(0, 0, 1, -1) + (-x+y+2z)(1, 0, -1, 0) \\ &= \left(\frac{-4x+5y+8z}{3}, \frac{-x+2y+2z}{3}, 2x-2y-3z, \frac{-2x+y+z}{3}\right). \end{aligned}$$

Portanto, T acima é a transformação linear procurada.

(b) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $T(2, 1) = (1, 0)$ e $T(0, 1) = (1, -1)$.

Solução

Para determinar T , escrevemos

$$a(2, 1) + b(0, 1) = (x, y).$$

De onde temos que $a = \frac{x}{2}$ e $b = y - \frac{x}{2}$. Assim,

$$\frac{x}{2}(2, 1) + \left(y - \frac{x}{2}\right)(0, 1) = (x, y).$$

Logo, aplicando a transformação linear T em ambos os lados da igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} T(x, y) &= \frac{x}{2}T(2, 1) + \left(y - \frac{x}{2}\right)T(0, 1) \\ &= \frac{x}{2}(1, 0) + \left(y - \frac{x}{2}\right)(1, -1) \\ &= \left(y, \frac{x}{2} - y\right). \end{aligned}$$

Portanto, T acima é a transformação linear procurada.

(c) $T : P_1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $T(2t) = (1, 1)$ e $T(-1) = (0, 3)$.

Solução

Para determinar T , escrevemos

$$a2t + b(-1) = a_0 + a_1t.$$

De onde temos que $a = \frac{a_1}{2}$ e $b = -a_0$. Assim,

$$\frac{a_1}{2}2t + -a_0(-1) = a_0 + a_1t.$$

Logo, aplicando a transformação T de ambos os lados da igualdade acima, obtemos

$$T(a_0 + a_1t) = \frac{a_1}{2}T(2t) - a_0T(-1) = \frac{a_1}{2}(1, 1) - a_0(0, 3) = \left(\frac{a_1}{2}, \frac{a_1}{2} - 3a_0\right).$$

Portanto, T acima é a transformação linear procurada.

(d) $T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = (1, 0), \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right) = (2, 1),$$

$$T\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = (0, 1), \quad T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = (-1, 1).$$

Solução

Para determinar T , escrevemos

$$a\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

De onde temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a + 2c + d = a_{11} \\ -a + b = a_{12} \\ b = a_{21} \\ 2b + c + d = a_{22}. \end{cases}$$

Cuja solução é $a = -a_{12} + a_{21}$, $b = a_{21}$, $c = a_{11} + a_{12} + a_{21} - a_{22}$ e $d = -a_{11} - a_{12} - 3a_{21} + 2a_{22}$. Assim,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &= (-a_{12} + a_{21}) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &+ (a_{11} + a_{12} + a_{21} - a_{22}) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &+ (-a_{11} - a_{12} - 3a_{21} + 2a_{22}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Logo, aplicando a transformação T de ambos os lados da igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &= (-a_{12} + a_{21})T \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21}T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &+ (a_{11} + a_{12} + a_{21} - a_{22})T \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &+ (-a_{11} - a_{12} - 3a_{21} + 2a_{22})T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (-a_{12} + a_{21})(1, 0) + a_{21}(2, 1) + (a_{11} + a_{12} + a_{21} - a_{22})(0, 1) \\ &+ (-a_{11} - a_{12} - 3a_{21} + 2a_{22})(-1, 1) \\ &= (a_{11} + 6a_{21} - 2a_{22}, -a_{21} + a_{22}). \end{aligned}$$

Portanto, T acima é a transformação linear procurada.

- 4) (a) Encontre $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $Im(T) = [(1, 0, -1), (1, 2, 2)]$.

Solução

Para determinar T , escrevemos

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1).$$

Agora, tome $T(1, 0, 0) = (1, 0, -1)$, $T(0, 1, 0) = (1, 2, 2)$ e $T(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$, então

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= xT(1, 0, 0) + yT(0, 1, 0) + zT(0, 0, 1) \\ &= x(1, 0, -1) + y(1, 2, 2) + z(0, 0, 0) \\ &= (x + y, 2y, -x + 2y). \end{aligned}$$

Portanto, T acima é a transformação linear procurada.

- (b) Encontre $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $N(T) = [(1, 0, -1)]$.

Solução

Seja $\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 0, -1)\}$ uma base de \mathbb{R}^3 que contém o vetor $(1, 0, -1)$. Então, escrevemos

$$(x, y, z) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(1, 0, -1).$$

Da igualdade acima obtemos que $a = x + y$, $b = y$ e $c = -z$. Logo,

$$(x, y, z) = (x + z)(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) - z(1, 0, -1).$$

Agora, aplicando a transformação T de ambos os lados da igualdade acima e considerando $T(1, 0, 0) = (1, 0)$, $T(0, 1, 0) = (0, 1)$ e $T(1, 0, -1) = (0, 0)$, temos que

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= (x + z)T(1, 0, 0) + yT(0, 1, 0) - zT(1, 0, -1) \\ &= (x + z)(1, 0) + y(0, 1) - z(0, 0) \\ &= (x + z, y). \end{aligned}$$

Portanto, T acima é a transformação linear procurada.

- 5) Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear

- (a) Mostre que se $T(v_1), \dots, T(v_n) \in W$ são L.I. então v_1, \dots, v_n são L.I.

Prova

Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0.$$

Aplicando a transformação linear T a ambos os lados da igualdade acima, temos

$$T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = T(0) \Leftrightarrow \alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_n T(v_n) = 0.$$

Como por hipótese o conjunto $\beta = \{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ é L.I, segue que $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

Portanto, o conjunto $\chi = \{v_1, \dots, v_n\}$ é L.I.

- (b) Mostre que se $V = W$ e os vetores $T(v_1), \dots, T(v_n)$ geram V então os vetores $v_1, \dots, v_n \in V$ geram V .

Prova

Se os vetores $T(v_1), \dots, T(v_n)$ geram V , então podemos tomar um subconjunto deste que é base de V , digamos $T(v_1), \dots, T(v_m)$, com $m \leq n$. Então a $\dim V = m$, ou seja, achamos uma base de V com m vetores. Por outro lado, pelo item (a), v_1, \dots, v_m são L.I e, assim, formam uma base de V .

Portanto, v_1, \dots, v_m geram V e, com mais razão, v_1, \dots, v_n também vai gerar V .

- 6) Seja $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear. Mostre que se $u \in \text{Ker}(T)$ e $v \in \text{Im}(T)$ então $T(u) \in \text{Ker}(T)$ e $T(v) \in \text{Im}(T)$.

Prova

Seja $u \in \text{Ker}(T)$. Então $T(T(u)) = T(0) = 0$, isto é, $T(u) \in \text{Ker}(T)$. Por outro lado, temos que $T(v) \in \text{Im}(T)$ para qualquer $v \in V$; em particular, $v \in \text{Im}(T) \Rightarrow T(v) \in \text{Im}(T)$.

- 7) Defina uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cujo núcleo seja a reta $y = x$ e cuja imagem seja a reta $y = 2x$.

Solução

Queremos encontrar uma transformação linear T tal que $\text{Ker}(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$ e $\text{Im}(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}$.

Os vetores pertencentes ao $\text{Ker}(T)$ são da forma $(x, x) = x(1, 1)$. Logo, $\beta_1 = \{(1, 1)\}$ é uma base para o $\text{Ker}(T)$.

Os vetores pertencentes a $\text{Im}(T)$ são da forma $(x, 2x) = x(1, 2)$. Logo, $\beta_2 = \{(1, 2)\}$ é uma base para a $\text{Im}(T)$.

Seja $\beta = \{(1, 1), (1, 0)\}$ uma base de \mathbb{R}^2 obtida da extensão da base β_1 do $\text{Ker}(T)$. Então, escrevemos

$$(x, y) = a(1, 1) + b(1, 0).$$

Da igualdade de vetores acima temos que $a = y$ e $b = x - y$ e, assim,

$$(x, y) = y(1, 1) + (x - y)(1, 0).$$

Agora aplicando na igualdade acima a transformação linear T , considerando $T(1, 1) = (0, 0)$ e $T(1, 0) = (1, 2)$, obtemos

$$\begin{aligned} T(x, y) &= yT(1, 1) + (x - y)T(1, 0) \\ &= y(0, 0) + (x - y)(1, 2) \\ &= (x - y, 2(x - y)). \end{aligned}$$

Portanto, $T(x, y) = (x - y, 2(x - y))$ é a transformação linear procurada.

- 8) Assinale Verdadeiro ou Falso:

- (a) Uma transformação linear $T : V \rightarrow W$ é sobrejetora se e somente se $\dim N(T) = \dim(V) - \dim(W)$.

Solução

Verdadeiro, supondo que as dimensões de V e W são finitas, pois do contrário, nem faz sentido escrever $\dim(V) - \dim(W)$. Assim, basta usar o Teorema do Núcleo e da Imagem e ver que, neste caso,

$$\dim \text{Im}(T) = \dim(V) - \dim N(T) = \dim V - (\dim(V) - \dim(W)) = \dim(W) \text{ e, portanto, } \text{Im}(T) = W.$$

- (b) Dada a transformação linear $T : V \rightarrow W$, para todo $w \in W$ fixado, o conjunto $G = \{v \in V : T(v) = w\}$ é um subespaço de V .

Solução

Falso, pois G só será um subespaço vetorial de V quando $w = 0$.

(c) Toda transformação linear $T : C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ injetora é também sobrejetora.

Solução

Falso, como exemplo tome $T(f) = \int_0^x f(t)dt = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Agora, note que pelo Teorema fundamental do Cálculo $g' = f$, isto é, a derivada de $T(f)$ é a própria f . Logo, o núcleo é facilmente encontrado:

$$T(f) = \int_0^x f(t)dt = 0 \Rightarrow f = \frac{d0}{dx} = 0,$$

isto é, $\text{Ker}(T) = \{0\}$ e, portanto, T é injetora.

Por outro lado, seja X o conjunto de todas as funções que têm derivadas contínuas e se anulam na origem, isto é, $X = \{\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \varphi(0) = 0\}$.

Note que todas as funções do tipo $g = T(f)$ têm ambas as propriedades acima:

$$g(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0 \text{ e } g' = f \in C^0(\mathbb{R}) \text{ que existe e é contínua.}$$

Assim, $\text{Im}(T) \subseteq X \neq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Portanto, T é injetora, mas não é sobrejetora.

(d) O núcleo de toda transformação linear $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tem dimensão maior ou igual a 3.

Solução

Falso, tome como contra-exemplo $T(x, y, z, t, w) = (x, y, z)$ que tem $\dim(\text{ker}(T)) = 2$. Note também que seria verdadeiro se $\dim(\text{ker}(T)) \geq 2$.

9) Seja $T : P_n(\mathbb{R}) \rightarrow P_n(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por $T(p) = 5p - 4p' + p''$. Mostre que se núcleo é $\{0\}$ e conclua que para todo polinômio $b(x)$ existe um polinômio $p(x)$ tal que $b(x) = 5p(x) - 4p'(x) + p''(x)$.

Solução

Seja

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n \in P_n(\mathbb{R}),$$

então

$$p'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1},$$

$$p''(x) = 2a_2 + 6a_3x + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} T(p) &= 5p(x) - 4p'(x) + p''(x) \\ &= 5(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n) - 4(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1}) \\ &\quad + 2a_2 + 6a_3x + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2} \\ &= 5a_0 + a_1(5x - 4) + a_2(5x^2 - 8x + 2) + a_3(5x^3 - 12x^2 + 6x) \\ &\quad + \dots + a_n(5x^n - 4nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2}). \end{aligned}$$

Daí, temos que

$$\beta = \{5, 5x - 4, 5x^2 - 8x + 2, 5x^3 - 12x^2 + 6x, \dots, 5x^n - 4nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2}\}$$

é uma base para a $\text{Im}(T)$, pois β gera a $\text{Im}(T)$ e é L.I, dado que os elementos em β têm graus distintos.

Por definição, $\text{Ker}(T) = \{p \in P_n(\mathbb{R}) : T(p) = 0\}$. Assim,

$$\begin{aligned} T(p) = 0 &\Leftrightarrow 5a_0 + a_1(5x - 4) + a_2(5x^2 - 8x + 2) + a_3(5x^3 - 12x^2 + 6x) + \\ &\quad \dots + a_n(5x^n - 4nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2}) = 0. \end{aligned}$$

Como β é L.I, segue que $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$ e, assim, $\text{Ker}(T) = \{0\}$. Portanto, T é injetiva e, como o domínio e contra-domínio têm a mesma dimensão, conclui-se que T é sobrejetora.

Portanto, para qualquer $b(x) \in P_n(\mathbb{R})$, há um polinômio $p(x) \in P_n(\mathbb{R})$ tal que $T(p) = b$.

10) Seja $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear. Mostre que $T^2 = 0$ se e somente se $T(V) \subset \text{Ker}(T)$.

Prova

Suponha que $T^2 = 0$. Assim, se $w \in T(V)$, então existe $v \in V$ tal que $T(v) = w$.

Logo,

$$T(w) = T(T(v)) = T^2(v) = 0,$$

isto é, $w \in \text{Ker}(T)$ e, portanto, $T(V) \subseteq \text{Ker}(T)$.

Reciprocamente, suponha que $T(V) \subseteq \text{Ker}(T)$. Assim, dado $v \in V$ e como $T(v) \in T(V) \subseteq \text{Ker}(T)$, temos que

$$T^2(v) = T(T(v)) = 0.$$

Como isto vale para qualquer vetor $v \in V$, tem-se $T^2 = 0$.

- 11) Seja $\theta \in \mathbb{R}$. Encontre o núcleo da transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x \cos(\theta) - y \sin(\theta), x \sin(\theta) + y \cos(\theta))$.

Solução

Por definição, $\text{Ker}(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : T(x, y) = (0, 0)\}$. Assim,

$$(x \cos(\theta) - y \sin(\theta), x \sin(\theta) + y \cos(\theta)) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x \cos(\theta) - y \sin(\theta) = 0, \\ x \sin(\theta) + y \cos(\theta) = 0. \end{cases} \quad (*)$$

Sabemos que $\cos(\theta)$ e $\sin(\theta)$ não se anulam simultaneamente para nenhum valor de θ . Em vista disso, se $\cos(\theta) = 0$ ou $\sin(\theta) = 0$ é imediato que a solução de (*) é $x = y = 0$.

Suponhamos que sejam $\sin(\theta) \neq 0$ e $\cos(\theta) \neq 0$. Assim, multiplicando a primeira linha de (*) por $-\sin(\theta)$ e a segunda linha por $\cos(\theta)$, obtemos

$$\begin{cases} -x \sin(\theta) \cos(\theta) + y \sin^2(\theta) = 0, \\ x \sin(\theta) \cos(\theta) + y \cos^2(\theta) = 0. \end{cases}$$

Daí segue que $y \sin^2(\theta) + y \cos^2(\theta) = 0 \Leftrightarrow y(\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)) = 0 \Rightarrow y = 0$. Substituindo $y = 0$ em (*), temos

$$\begin{cases} x \cos(\theta) = 0, \\ x \sin(\theta) = 0. \end{cases} \quad (**)$$

Como $\sin(\theta) \neq 0$ e $\cos(\theta) \neq 0$, segue que a única solução possível para (**) é $x = 0$.

Portanto, o $\text{Ker}(T) = \{(0, 0)\}$.

- 12) Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear bijetora. Mostre que T leva retas em retas.

Solução

Dada uma reta r no plano \mathbb{R}^2 , usaremos sua equação vetorial para representar seus pontos, isto é, um ponto $P \in r$ se, e somente se,

$$P = P_0 + \lambda v,$$

em que P_0 é um ponto sobre r , $v \neq 0$ é o vetor diretor da reta r e $\lambda \in \mathbb{R}$.

A imagem da reta r pela transformação linear bijetora T é dada por:

$$T(r) = \{T(P); P \in r\}.$$

Assim, um ponto $S \in T(r)$ se, e somente se, $S = T(P)$ para algum ponto $P \in r$, ou seja,

$$S = T(P) = T(P_0 + \lambda v) = T(P_0) + \lambda T(v), \quad (*)$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

Como a transformação linear T é injetora e $v \neq 0$ temos que $T(v) \neq 0$, ou seja, (*) nos fornece a equação vetorial de uma reta no plano \mathbb{R}^2 que passa pelo ponto $T(P_0)$ e tem a direção do vetor, não-nulo, $T(v)$.

Portanto, $T(r)$ é uma reta em \mathbb{R}^2 .

- 13) Existe uma transformação linear injetora $T: M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$?

Solução

Suponhamos que exista uma transformação linear injetiva $T: M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$. Uma vez que T é injetiva a $\dim(\text{Ker}(T)) = 0$ e, então, utilizando o Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que

$$\dim(M_{2 \times 2}(\mathbb{R})) = \dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) \Rightarrow 4 = 0 + \dim(\text{Im}(T)) \Rightarrow \dim(\text{Im}(T)) = 4,$$

que é um absurdo, pois a $\dim(\text{Im}(T)) \leq 3 = \dim(P_2(\mathbb{R}))$.

Portanto, não existe uma transformação linear injetora $T: M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$.

14) Determine o núcleo das transformações lineares abaixo e descreva-os geometricamente.

(a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, T(x, y) = y + 2x.$

Solução

Por definição, $\text{Ker}(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : T(x, y) = 0\}$. Assim,

$$T(x, y) = 0 \Leftrightarrow y + 2x = 0 \Leftrightarrow y = -2x.$$

Portanto, $\text{Ker}(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -2x\}$.

Na figura abaixo está representado geometricamente o $\text{Ker}(T)$.

(b) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, T(x, y) = x - 2y.$

Solução

Por definição, $\text{Ker}(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : T(x, y) = 0\}$. Assim,

$$T(x, y) = 0 \Leftrightarrow x - 2y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{x}{2}.$$

Portanto, $\text{Ker}(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{x}{2}\}$.

Na figura abaixo está representado geometricamente o $\text{Ker}(T)$.

(c) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 T(x, y) = (2x + 2y, x + y).$

Solução

Por definição, $\text{Ker}(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : T(x, y) = (0, 0)\}$. Assim,

$$T(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (2x + 2y, x + y) = (0, 0) \Leftrightarrow y = -x.$$

Portanto, $\text{Ker}(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x\}$.

Na figura abaixo está representado geometricamente o $\text{Ker}(T)$.

(d) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 T(x, y, z) = (z - x, z - 2x, z - 3x).$

Solução

Por definição, $\text{Ker}(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : T(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$. Assim,

$$T(x, y, z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (z - x, z - 2x, z - 3x) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow x = z = 0 \text{ e } y \in \mathbb{R}.$$

Portanto, $\text{Ker}(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z = 0 \text{ e } y \in \mathbb{R}\}$.

Na figura abaixo está representado geometricamente o $\text{Ker}(T)$.

15) Determine uma base e a dimensão do núcleo e da imagem das transformações lineares:

(a) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 T(x, y, z) = (x + y + z, 2x + 2y + 2z).$

(b) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 T(x, y, z) = (x + y, y + z).$

(c) $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 T(x, y, z, t) = (x - y + z + t, 2x - 2y + 3z + 4t, 3x - 3y + 4z + 5t).$

(d) $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3 T(x, y, z, s, t) = (x + 2y + 2z + s + t, x + 2y + 3z + 2s - t, 3x + 6y + 8z + 5s - t).$

Solução

(a) $\dim(\text{Nuc } T) = 2, \{(1, 0, -1), (1, -1, 0)\}; \dim(\text{Im } T) = 1, \{(1, 2)\}.$

(b) $\dim(\text{Nuc } T) = 1, \{(1, -1, 1)\}; \dim(\text{Im } T) = \mathbb{R}^2, \{(1, 0), (0, 1)\}.$

(c) $\dim(\text{Nuc } T) = 2, \{(1, 1, 0, 0), (1, 0, -2, 1)\}; \dim(\text{Im } T) = 2, \{(1, 2, 3), (1, 3, 4)\}.$

(d) $\dim(\text{Nuc } T) = 3, \{(-2, 1, 0, 0, 0), (1, 0, -1, 1, 0), (-5, 0, 2, 0, 1)\}; \dim(\text{Im } T) = 2, \{(1, 1, 3), (0, 1, 2)\}.$

16) Determinar um $T \in L(P_3(\mathbb{R}), P_2(\mathbb{R}))$ cujo núcleo seja gerado pelos polinômios $1 + x^3$ e $1 - x^2$.

Solução

Seja $\beta = \{1 + x^3, 1 - x^2, x, 1\}$ uma base de $P_3(\mathbb{R})$ obtida da extensão de $\beta_1 = \{1 + x^3, 1 - x^2\}$. Escrevemos,

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 &= a(1 + x^3) + b(1 - x^2) + cx + d \\ &= a + ax^3 + b - bx^2 + cx + d \\ &= a + b + d + cx - bx^2 + ax^3. \end{aligned}$$

Da igualdade de vetores acima obtemos que $a = a_3, b = -a_2, c = a_1$ e $d = a_0 + a_2 - a_3$. Assim,

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = a_3(1 + x^3) - a_2(1 - x^2) + a_1x + (a_0 + a_2 - a_3)(1).$$

Aplicando a transformação linear T na igualdade acima e considerando $T(1 + x^3) = 0, T(1 - x^2) = 0, T(x) = x$ e $T(1) = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) &= a_3T(1 + x^3) - a_2T(1 - x^2) + a_1T(x) + (a_0 + a_2 - a_3)T(1) \\ &= a_3 \cdot 0 - a_2 \cdot 0 + a_1x + (a_0 + a_2 - a_3) \cdot 1 \\ &= a_1x + a_0 + a_2 - a_3. \end{aligned}$$

Portanto, $T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_1x + a_0 + a_2 - a_3$ é a transformação linear procurada.

17) Encontre uma base para o núcleo e outra para a imagem de $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ dada por $T(p) = p' + p''$.

Solução

Seja $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in P_2(\mathbb{R})$. Temos que $p'(x) = a_1 + 2a_2x$ e $p''(x) = 2a_2$, então

$$T(p) = p' + p'' = a_1 + 2a_2x + 2a_2 = a_1 + 2a_2(1 + x).$$

Agora vamos determinar uma base para o $\text{Ker}(T) = \{p \in P_2(\mathbb{R}) : T(p) = 0\}$. Logo,

$$T(p) = 0 \Leftrightarrow a_1 + 2a_2(1 + x) \Leftrightarrow a_1 = a_2 = 0.$$

Portanto, os polinômios pertencentes ao $\text{Ker}(T)$ são da forma $p(x) = a_0$ e, assim, $\beta = \{1\}$ é uma base para o $\text{Ker}(T)$.

Para determinar uma base para a $\text{Im}(T)$, escrevemos

$$a_1 + 2a_2(1 + x) = a_1(1) + a_2(2 + 2x).$$

Portanto, $\sigma = \{1, 2 + 2x\}$ é uma base para a $\text{Im}(T)$.

18) Mostre que se U e V são espaços vetoriais de dimensão finita tais que $\dim U = \dim V$ e se $T \in L(U, V)$ então as seguintes condições são equivalentes:

- T é sobrejetora.
- T é injetora.
- T é bijetora.
- T leva bases de U em bases de V .

Prova

(a) \Rightarrow (b). Se a transformação linear é sobrejetora, então $T(U) = V$. Logo, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos

$$\dim(U) = \dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = \dim(\text{Ker}(T)) + \dim(V).$$

Uma vez que a $\dim(U) = \dim(V)$, segue da igualdade acima que a $\dim(\text{Ker}(T)) = 0$, isto é, $\text{Ker}(T) = \{0\}$ e, assim, a transformação linear é injetora.

(b) \Rightarrow (c). Se a transformação linear T é injetora, então $\text{Ker}(T) = \{0\}$ e $\dim(\text{Ker}(T)) = 0$. Logo, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que

$$\dim(U) = \dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = \dim(\text{Im}(T)).$$

Como $\dim(U) = \dim(V)$ segue que $\text{Im}(T) = V$, isto é, a transformação linear T é sobrejetora e, portanto, bijetora.

(c) \Rightarrow (d). Suponhamos que a transformação linear T seja bijetora e consideremos uma base de U formada pelos vetores u_1, \dots, u_n .

Queremos mostrar que $T(u_1), \dots, T(u_n)$ formam uma base para V .

Afirmção: os vetores $T(u_1), \dots, T(u_n)$ são L.I em V .

De fato, se

$$\alpha_1 T(u_1) + \dots + \alpha_n T(u_n) = 0$$

então, por T ser uma transformação linear, a igualdade acima é equivalente a

$$T(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) = 0,$$

isto é, o vetor

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n \in \text{Ker}(T) = \{0\}.$$

Uma vez que T é injetora, temos que

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = 0.$$

Como u_1, \dots, u_n formam uma base de U eles são L.I, assim, $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

Portanto, os vetores $T(u_1), \dots, T(u_n)$ são L.I em V .

Uma vez que os vetores $T(u_1), \dots, T(u_n)$ são L.I e a $\dim(V) = n$, segue que eles formam uma base para V .

(d) \Rightarrow (a). Se u_1, \dots, u_n formam uma base de U então, por hipótese, $T(u_1), \dots, T(u_n)$ formam uma base de V .

Logo, dado $v \in V$, existem escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$v = \alpha_1 T(u_1) + \dots + \alpha_n T(u_n).$$

Deste modo,

$$v = \alpha_1 T(u_1) + \dots + \alpha_n T(u_n) = T \left(\underbrace{\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n}_{\in U} \right),$$

ou seja, existe $u \in U$ tal que $T(u) = v$, isto é, a transformação linear T é sobrejetora.

- 19) (a) É $W = \{p \in P_3(\mathbb{R}) : p(-1) = 0\}$ isomorfo a \mathbb{R}^2 ? Em caso afirmativo forneça uma prova; em caso negativo forneça um contraexemplo.

Solução

Seja $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in P_3(\mathbb{R})$. Então,

$$p(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = a_0 - a_1 + a_2.$$

Portanto, os polinômios em W são da forma

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + (a_0 - a_1 + a_2)x^3 \\ &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_0 x^3 - a_1 x^3 + a_2 x^3 \\ &= a_0(1 + x^3) + a_1(x - x^3) + a_2(x^2 + x^3). \end{aligned}$$

Portanto, $\beta = \{1 + x^3, x - x^3, x^2 + x^3\}$ é uma base de W , isto é, $\dim(W) = 3$.

Agora suponhamos que exista um isomorfismo T entre W e \mathbb{R}^2 . Assim, $\dim(\text{Ker}(T)) = 0$ e $\dim(\text{Im}(T)) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$. Logo, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que

$$\dim(W) = \dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) \Rightarrow 3 = 0 + 2 = 2,$$

que é um absurdo e, assim, W não é isomorfo a \mathbb{R}^2 .

(b) É $W = \{p \in P_3(\mathbb{R}) : p(-1) = 0\}$ isomorfo a \mathbb{R} ? Em caso afirmativo forneça uma prova; em caso negativo forneça um contra-exemplo.

Solução

De forma análoga ao item (a), concluímos que não há isomorfismo entre W e \mathbb{R} , pois $3 = \dim(W) \neq \dim(\mathbb{R}) = 1$.

20) Mostre que $W = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : A_{11} = A_{12} \text{ e } A_{22} = A_{21}\}$ é isomorfo a $P_1(\mathbb{R})$.

Solução

Os elementos de W são da forma

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{11} \\ A_{22} & A_{22} \end{pmatrix} = A_{11} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + A_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

é uma base para W .

Como espaços vetoriais de mesma dimensão são isomorfos e $\dim(W) = 2 = \dim(P_1(\mathbb{R}))$, temos que W e $P_1(\mathbb{R})$ são isomorfos.