

Álgebra Linear - 2022.3

Lista 8 - Autovalores e Autovetores

- 1) Sendo $T : V \rightarrow V$ um operador linear, mostre que o conjunto $V_\lambda = \{v \in V : Tv = \lambda v\}$, formado pelos autovetores associados a um autovalor λ , inclusive $v = 0$, é um subespaço vetorial de V .

Solução

Sejam $u, v \in V_\lambda$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então,

- i. $0 \in V_\lambda$, pois $T(0) = 0 = \lambda 0$.
- ii. $T(u + v) = T(u) + T(v) = \lambda u + \lambda v = \lambda(u + v)$.
Logo, $u + v \in V_\lambda$.
- iii. $T(\alpha u) = \alpha(T(u)) = \alpha(\lambda u) = \lambda(\alpha u)$.
Assim, $\alpha u \in V_\lambda$.

Portanto, V_λ é um subespaço vetorial de V .

- 2) Encontre os autovalores e autovetores associados dos operadores lineares $T : V \rightarrow V$ e matrizes em $M(n, n)$ seguintes:

- (a) $V = \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x + y, 2x + y)$

Solução

Seja $C = \{(1, 0), (0, 1)\}$ a base canônica de \mathbb{R}^2 sobre \mathbb{R} . Então,

$$\begin{aligned} T(1, 0) &= (1, 2) = 1(1, 0) + 2(0, 1), \\ T(0, 1) &= (1, 1) = 1(1, 0) + 1(0, 1). \end{aligned}$$

Portanto,

$$[T]_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, o polinômio característico é:

$$p(\lambda) = \det([T]_C - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 2 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 1.$$

Logo,

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 - \sqrt{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 1 + \sqrt{2}.$$

Vamos determinar os autoespaços associados aos respectivos autovalores:

- Para $\lambda_1 = 1 - \sqrt{2}$, temos

$$\begin{aligned} ([T]_C - \lambda_1 I) v_1 = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 - \lambda_1 & 1 \\ 2 & 1 - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} y_1 \\ y_1 = y_1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Assim,

$$V_{1-\sqrt{2}} = \left\{ (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} y_1 \right\}.$$

Portanto, uma base para o autoespaço $V_{1-\sqrt{2}}$ é $\beta_1 = \left\{ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right) \right\}$. Em outras palavras, $v_1 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 1 - \sqrt{2}$.

- Para $\lambda_2 = 1 + \sqrt{2}$, temos

$$\begin{aligned}
 ([T]_C - \lambda_2 I) v_2 = 0 &\iff \begin{pmatrix} 1 - \lambda_2 & 1 \\ 2 & 1 - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 \\ 2 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} y_2 \\ y_2 = y_2 \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$V_{1+\sqrt{2}} = \left\{ (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} y_2 \right\}.$$

Portanto, uma base para o autoespaço $V_{1+\sqrt{2}}$ é $\beta_2 = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right) \right\}$. Em outras palavras, $v_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 1 + \sqrt{2}$.

(b) $V = \mathbb{R}^2, T(x, y) = (-y, x)$

Solução

Seja $C = \{(1, 0), (0, 1)\}$ a base canônica de \mathbb{R}^2 sobre \mathbb{R} . Então,

$$\begin{aligned}
 T(1, 0) &= (0, 1) = 0(1, 0) + 1(0, 1), \\
 T(0, 1) &= (-1, 0) = -1(1, 0) + 0(0, 1).
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$[T]_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, o polinômio característico é:

$$p(\lambda) = \det([T]_C - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Logo,

$$p(\lambda) = 0 \iff \lambda^2 + 1 = 0,$$

que não tem solução em \mathbb{R} .

Portanto, concluímos que $[T]_C$ não tem autovalores em \mathbb{R} nem autovetores em \mathbb{R}^2 .

(c) $V = P_2, T(ax^2 + bx + c) = ax^2 + cx + b$

Solução

Seja $C = \{x^2, x, 1\}$ a base canônica de $P_2(\mathbb{R})$. Então,

$$\begin{aligned}
 T(x^2) &= x^2 = 1(x^2) + 0(x) + 0(1), \\
 T(x) &= 1 = 0(x^2) + 0(x) + 1(1), \\
 T(1) &= x = 0(x^2) + 1(x) + 0(1).
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$[T]_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, o polinômio característico é:

$$p(\lambda) = \det([T]_C - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 1) = (1 - \lambda)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = (-1)(\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda + 1).$$

Logo,

$$p(\lambda) = 0 \iff (-1)(\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1 \quad \text{e} \quad \lambda_3 = -1.$$

Vamos determinar os autoespaços associados aos seus respectivos autovalores:

- Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, temos

$$T(ax^2 + bx + c) = ax^2 + cx + b = \lambda_1(ax^2 + bx + c) \Leftrightarrow ax^2 + cx + b = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow b = c, a, c \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$V_1 = \{p(x) = ax^2 + bx + c \in P_2(\mathbb{R}) : p(x) = ax^2 + bx + b, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Portanto, uma base para V_1 é $\beta_1 = \{x^2, x + 1\}$. Em outras palavras, $p_1(x) = x^2$ e $p_2(x) = x + 1$ são autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

- Para $\lambda_3 = -1$, temos

$$T(ax^2 + bx + c) = ax^2 + cx + b = \lambda_3(ax^2 + bx + c) \Leftrightarrow ax^2 + cx + b = -ax^2 - bx - c \Leftrightarrow a = 0, b = -c, c \in \mathbb{R}.$$

Assim,

$$V_{-1} = \{p(x) = ax^2 + bx + c \in P_2(\mathbb{R}) : p(x) = -cx + c, c \in \mathbb{R}\}.$$

Portanto, $\beta_2 = \{-x + 1\}$ é uma base para V_{-1} . Em outras palavras, $p_3(x) = -x + 1$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_3 = -1$.

- (d) $V = P_2, T(ax^2 + bx + c) = 2ax + b$, (derivada)

Solução

Seja $C = \{x^2, x, 1\}$ a base canônica de $P_2(\mathbb{R})$. Então,

$$\begin{aligned} T(x^2) &= 2x = 0(x^2) + 2(x) + 0(1), \\ T(x) &= 1 = 0(x^2) + 0(x) + 1(1), \\ T(1) &= 0 = 0(x^2) + 0(x) + 0(1). \end{aligned}$$

Portanto,

$$[T]_C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, o polinômio característico é:

$$p(\lambda) = \det([T]_C - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3.$$

Logo,

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Vamos determinar o autoespaço associado aos autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$:

$$T(ax^2 + bx + c) = 2ax + b = \lambda_1(ax^2 + bx + c) \Leftrightarrow 2ax + b = 0 \Leftrightarrow a = b = 0, c \in \mathbb{R}.$$

Assim,

$$V_0 = \{p(x) = ax^2 + bx + c \in P_2(\mathbb{R}) : p(x) = c, c \in \mathbb{R}\}.$$

Por conseguinte, $\beta = \{1\}$ é uma base para V_0 .

- (e) $V = M(2, 2), T(A) = A^T, A \in M(2, 2)$

Solução

Seja $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ a base canônica de $M(2, 2)$. Então,

$$T \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$[T]_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, o polinômio característico é:

$$p(\lambda) = \det([T]_C - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda+1).$$

Logo,

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda+1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \quad e \quad \lambda_4 = -1.$$

Vamos determinar os autoespaços associados aos respectivos autovalores:

- Para $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, temos

$$T \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right) = \lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} = a_{11} \\ a_{12} = a_{21} \\ a_{22} = a_{22} \end{cases}.$$

Assim,

$$V_1 = \{A \in V : T(A) = \lambda_1 A\} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in V : a_{12} = a_{21} \right\}$$

Portanto, $\beta_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ é uma base para V_1 .

- Para $\lambda_4 = -1$, temos

$$T \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right) = \lambda_4 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} = 0 \\ a_{12} = -a_{21} \\ a_{22} = 0. \end{cases}$$

Assim,

$$V_{-1} = \{A \in V : T(A) = \lambda_4 A\} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in V : a_{11} = a_{22} = 0 \quad e \quad a_{12} = -a_{21} \right\}$$

Portanto, $\beta_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ é uma base para V_{-1} .

(f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Solução

O polinômio característico é:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1).$$

Logo,

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda+1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \quad e \quad \lambda_2 = -1.$$

Vamos calcular os autoespaços associados aos respectivos autovalores:

- Para $\lambda_1 = 1$, temos

$$(A - \lambda_1 I) v_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 2 \\ 0 & -1-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_1 \\ y_1 = 0. \end{cases}$$

Logo,

$$V_1 = \{(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 | y_1 = 0\}.$$

Portanto, $\beta_1 = \{(1, 0)\}$ é uma base para V_1 .

- Para $\lambda_2 = -1$, temos

$$(A - \lambda_1 I) v_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 - \lambda_2 & 2 \\ 0 & -1 - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -y_2 \\ y_2 = y_2. \end{cases}$$

Assim,

$$V_{-1} = \{(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 | x_2 = -y_2\}.$$

Portanto, $\beta_2 = \{(-1, 0)\}$ é uma base para V_{-1} .

(g) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Solução

O polinômio característico é:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2).$$

Logo,

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 2.$$

Vamos calcular os autoespaços associados aos respectivos autovalores:

- Para $\lambda_1 = 0$, temos

$$(A - \lambda_1 I) v_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 - \lambda_1 & 1 \\ 1 & 1 - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -y_1 \\ y_1 = y_1. \end{cases}$$

Assim,

$$V_0 = \{(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 | x_1 = -y_1\}.$$

Portanto, uma base para V_0 é $\beta_1 = \{(-1, 1)\}$.

- Para $\lambda_2 = 2$, temos

$$(A - \lambda_1 I) v_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 - \lambda_2 & 1 \\ 1 & 1 - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = y_2 \\ y_2 = y_2. \end{cases}$$

Logo,

$$V_2 = \{(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 | x_2 = y_2\}.$$

Portanto, $\beta_2 = \{(1, 1)\}$ é uma base para V_2 .

(h) $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

Solução

O polinômio característico é:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 5 - \lambda & 3 \\ 3 & -3 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 24 = (\lambda + 4)(\lambda - 6).$$

Logo,

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 4)(\lambda - 6) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -4 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 6.$$

Vamos calcular os autoespaços associados aos respectivos autovalores:

- Para $\lambda_1 = -4$, temos

$$(A - \lambda_1 I) v_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 - \lambda_1 & 3 \\ 3 & -3 - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3}y_1 \\ y_1 = y_1 \end{cases}$$

Logo,

$$V_{-4} = \left\{ (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = -\frac{1}{3}y_1 \right\}.$$

Portanto, $\beta_1 = \left\{ \left(-\frac{1}{3}, 1 \right) \right\}$ é uma base para V_{-4} .

- Para $\lambda_2 = 6$, temos

$$(A - \lambda_2 I) v_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 - \lambda_2 & 3 \\ 3 & -3 - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 3y_2 \\ y_2 = y_2 \end{cases}$$

Assim,

$$V_6 = \{ (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 3y_2 \}.$$

Portanto, uma base para V_6 é $\beta_2 = \{(3, 1)\}$.

$$(i) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Solução

O polinômio característico é:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 3 & -3 \\ 0 & 4 - \lambda & 0 \\ -3 & 3 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda - 32 = (-1)(\lambda + 2)(\lambda - 4)(\lambda - 4).$$

Logo,

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (-1)(\lambda + 2)(\lambda - 4)(\lambda - 4) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2 \quad e \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 4.$$

Vamos determinar os autoespaços associados aos respectivos autovalores:

- Para $\lambda_1 = -2$, temos que

$$(A - \lambda_1 I) v_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 - \lambda_1 & 3 & -3 \\ 0 & 4 - \lambda_1 & 0 \\ -3 & 3 & 1 - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & 0 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y_1 = 0 \quad e \quad x_1 = z_1.$$

Logo,

$$V_{-2} = \{ (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3 \mid y_1 = 0 \quad e \quad x_1 = z_1 \}.$$

Portanto, uma base para V_{-2} é $\beta_1 = \{(1, 0, 1)\}$.

- Para $\lambda_2 = \lambda_3 = 4$, temos

$$(A - \lambda_2 I) v_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 - \lambda_2 & 3 & -3 \\ 0 & 4 - \lambda_2 & 0 \\ -3 & 3 & 1 - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = y_2 - z_2 \\ y_2 = y_2 \\ z_2 = z_2. \end{cases}$$

Assim,

$$V_4 = \{(x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = y_2 - z_2\}.$$

Portanto, uma base para V_4 é $\beta_2 = \{(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$.

$$(j) A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 14 \\ 2 & -7 & 14 \\ 2 & -4 & 11 \end{pmatrix}$$

Solução

O polinômio característico é:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -1 - \lambda & -4 & 14 \\ 2 & -7 - \lambda & 14 \\ 2 & -4 & 11 - \lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 45\lambda + 81 = (-1)(\lambda + 3)(\lambda + 3)(\lambda - 9).$$

Logo,

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (-1)(\lambda + 3)(\lambda + 3)(\lambda - 9) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -3 \quad \text{e} \quad \lambda_3 = 9.$$

Vamos determinar os autoespaços associados aos respectivos autovalores:

- Para $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$, temos

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I) v_1 = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 - \lambda_1 & -4 & 14 \\ 2 & -7 - \lambda_1 & 14 \\ 2 & -4 & 11 - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 & 14 \\ 2 & -4 & 14 \\ 2 & -4 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2y_1 - 7z_1 \\ y_1 = y_1 \\ z_1 = z_1. \end{cases} \end{aligned}$$

Logo,

$$V_{-3} = \{(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 2y_1 - 7z_1\}.$$

Portanto, uma base para V_{-3} é $\beta_1 = \{(2, 1, 0), (-7, 0, 1)\}$.

- Para $\lambda_3 = 9$, temos que

$$\begin{aligned} (A - \lambda_3 I) v_3 = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 - \lambda_3 & -4 & 14 \\ 2 & -7 - \lambda_3 & 14 \\ 2 & -4 & 11 - \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -10 & -4 & 14 \\ 2 & -16 & 14 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = y_2 = z_2 \\ y_2 = y_2 \\ z_2 = z_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Logo,

$$V_9 = \{(x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = y_2 = z_2\}.$$

Portanto, uma base para V_9 é $\beta_2 = \{(1, 1, 1)\}$.

- 3) (a) Calcule os autovalores reais e seus autovetores do operador linear em \mathbb{R}^3 dado pela rotação de θ em torno de z :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solução

O polinômio característico é:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 2\cos\theta\lambda + 1).$$

Logo,

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)(\lambda^2 - 2\cos\theta\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \quad \text{ou} \quad \lambda^2 - 2\cos\theta\lambda + 1 = 0.$$

Daí,

$$\lambda = \frac{2\cos\theta \pm \sqrt{4\cos^2\theta - 4}}{2} = \frac{2\cos\theta \pm \sqrt{4(\cos^2\theta - 1)}}{2} = \frac{2\cos\theta \pm \sqrt{-4\sin^2\theta}}{2}.$$

Em vista disso, se $\theta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, só temos um único autovalor real, a saber, $\lambda = 1$.

Se $\theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, temos o autovalor $\lambda = 1$ de multiplicidade algébrica 3.

Se $\theta = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}$, temos o autovalor $\lambda = -1$ de multiplicidade algébrica 2 e o autovalor $\lambda = 1$ de multiplicidade algébrica 1.

Vamos calcular os autovetores para cada um dos casos:

- Para $\lambda = 1$ e $\theta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, temos

$$\begin{pmatrix} \cos\theta - 1 & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 = y_1 = 0 \quad e \quad z_1 \in \mathbb{R}.$$

Portanto, o autovetor associado ao autovalor 1 é:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Os outros dois casos fica como exercício.

(b) rotação de $\frac{\pi}{2}$ em torno de $(1, 1, 1)$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 - \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} \\ 1 + \sqrt{3} & 1 & 1 - \sqrt{3} \\ 1 - \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

[Dica: qual é o autovetor (direção invariante) óbvio?]

Solução

O polinômio característico é:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} - \lambda & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} - \lambda & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} - \lambda \end{vmatrix} = (-\lambda^2 - 1)(\lambda - 1).$$

Logo, o único autovalor é $\lambda = 1$. Calculemos o autovetor a ele associado.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} - \lambda & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} - \lambda & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x = y = z.$$

Portanto, um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 1$ é:

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4) Seja $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Encontre os autovalores de A e A^{-1}

Solução

Primeiramente encontremos os autovalores da matriz A .

O polinômio característico é:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2).$$

Portanto,

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 2.$$

Temos que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$p(\lambda) = \det(A^{-1} - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} - \lambda & 1 \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} = (\lambda + 1)\left(\lambda - \frac{1}{2}\right).$$

Portanto,

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}.$$

(b) Encontre os autovetores.

Solução

Vamos determinar os autoespaços associados aos autovalores da matriz A .

Para $\lambda_1 = -1$, temos

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I) v_1 = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 2 \\ 1 & 1 - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2y_1 \\ y_1 = y_1. \end{cases} \end{aligned}$$

Assim,

$$V_{-1} = \{(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = -2y_1\}$$

Portanto, $\beta_1 = \{(-2, 1)\}$ é uma base para V_{-1} . Em outras palavras, $v_1 = (-2, 1)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = -1$.

Para $\lambda_2 = 2$, temos

$$\begin{aligned} (A - \lambda_2 I) v_2 = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\lambda_2 & 2 \\ 1 & 1 - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_2 = y_2. \end{aligned}$$

Assim,

$$V_2 = \{(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = y_2\}$$

Portanto, $\beta_2 = \{(1, 1)\}$ é uma base para V_2 . Em outras palavras, $v_2 = (1, 1)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 2$.

Agora, vamos determinar os autoespaços associados aos autovalores da matriz A^{-1} .

Para $\lambda_1 = -1$, temos

$$\begin{aligned} (A^{-1} - \lambda_1 I) v_1 = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \lambda_1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2y_1 \\ y_1 = y_1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Assim,

$$V_{-1} = \{(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = -2y_1\}$$

Portanto, $\beta_1 = \{(-2, 1)\}$ é uma base para V_{-1} . Em outras palavras, $v_1 = (-2, 1)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = -1$.

Para $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, temos

$$\begin{aligned} (A^{-1} - \lambda_2 I) v_2 = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \lambda_2 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = y_2 \\ y_2 = y_2 \end{cases}. \end{aligned}$$

Assim,

$$V_{\frac{1}{2}} = \{(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = y_2\}$$

Portanto, $\beta_2 = \{(1, 1)\}$ é uma base para $V_{\frac{1}{2}}$. Em outras palavras, $v_2 = (1, 1)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = \frac{1}{2}$.

- 5) Dado um operador linear $T : V \rightarrow V$, mostre que $\ker(T) = V_\lambda$, com $\lambda = 0$. Mostre que quando $\lambda = 0$ é autovalor, T não é injetora. Mostre a recíproca: quando T não é injetora, $\lambda = 0$ é autovalor de T .

Prova

- i. Mostremos que o $\ker(T) = V_\lambda$, com $\lambda = 0$.

Por definição, temos que

$$V_0 = \{v \in V; T(v) = 0 = 0v = 0\} = \{v \in V; T(v) = 0\} = \ker(T).$$

Portanto, o $\ker(T) = V_\lambda$, com $\lambda = 0$.

- ii. Agora vamos mostrar que quando $\lambda = 0$ é autovalor, T não é injetora. Para tal, seja v o autovetor associado ao autovalor $\lambda = 0$. Então,

$$T(v) = \lambda v = 0v = 0.$$

Portanto, T não é injetora, pois $\ker(T) \neq \{0\}$.

- iii. Por fim, mostremos a recíproca: quando T não é injetora, $\lambda = 0$ é autovalor de T . Para tal, seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear não injetor. Como T é não injetor, existe um vetor não nulo $v \in \ker(T)$, tal que

$$T(v) = \lambda v = 0v = 0.$$

Portanto, $\lambda = 0$ é autovalor de T .

- 6) Verifique quais dos operadores e matrizes da questão 2 são diagonalizáveis. (Um operador é diagonalizável quando sua matriz de transformação em alguma base é diagonalizável. Uma matriz é diagonalizável quando é possível encontrar uma base de autovetores para V .)

Solução

Não são diagonalizáveis os operadores dos itens (b) e (d), pois não admitem uma base de autovetores para V .

- 7) Diagonalize a matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$, i.e., encontre uma matriz M tal que $M^{-1}AM$ é uma matriz diagonal. Verifique que $M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, onde λ_1, λ_2 são os autovalores de A .

Solução

Pelo exercício 2, item h, obtemos que os autovalores de A são $\lambda_1 = -4$ e $\lambda_2 = 6$. Os respectivos autovetores são $v_1 = (-\frac{1}{3}, 1)$ e $v_2 = (3, 1)$.

Logo,

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{10} & \frac{9}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} -\frac{3}{10} & \frac{9}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

- 8) Diagonalize a matriz A em (2.i).

Solução

Pelo exercício 2, item i, obtemos que os autovalores de A são $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 4$. Os respectivos autovetores são $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 1, 0)$ e $v_3 = (-1, 0, 1)$.

Logo,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

9) Resolva o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias para as variáveis $x(t), y(t)$:

$$\begin{aligned} x' &= 5x + 3y, \\ y' &= 3x - 3y. \end{aligned}$$

(utilize o exercício 7.)

Solução

Pelo exercício 2, item h , obtemos que os autovalores de A são $\lambda_1 = -4$ e $\lambda_2 = 6$. Os respectivos autovetores são $v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Logo, sabemos que a solução é:

$$\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 = c_1 e^{-4t} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{6t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

10) Sendo A a matriz do exercício 7, calcule A^2, A^4 e A^{10} . Utilize $A^2 = (MDM^{-1})(MDM^{-1}) = MD^2M^{-1}$, onde D é a matriz diagonal após diagonalização. Calcule A^2 explicitamente e compare.

Solução

No exercício 7 determinamos que

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{10} & \frac{9}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \quad e \quad D = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} A^2 &= MD^2M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-4)^2 & 0 \\ 0 & (6)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{10} & \frac{9}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}, \\ A^4 &= MD^4M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-4)^4 & 0 \\ 0 & (6)^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{10} & \frac{9}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}, \\ A^{10} &= MD^{10}M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-4)^{10} & 0 \\ 0 & (6)^{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{10} & \frac{9}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

11) Diz-se que um operador linear $T : V \rightarrow V$ é nilpotente se existir um número inteiro positivo n , tal que $T^n = 0$ (i.e., $T \circ T \circ \dots \circ T(v) = 0 \forall v \in V$). Sendo T nilpotente,

(a) Encontre seus autovalores;

Solução

Seja v um autovetor associado ao autovalor λ . Então,

$$T(v) = \lambda v, \quad T^2(v) = T(T(v)) = T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda(\lambda v) = \lambda^2 v \text{ e, prosseguindo, obtemos que } T^n(v) = \lambda^n v = 0 \Rightarrow \lambda^n = 0 \Rightarrow \lambda = 0.$$

Portanto, $\lambda = 0$ é o único autovalor com multiplicidade algébrica n do operador linear nilpotente.

(b) Mostre que um operador linear nilpotente, não nulo, não é diagonalizável;

Solução

Seja A a matriz do operador linear nilpotente, não nulo, em uma base de V .

Suponhamos que A seja diagonalizável, então existem matrizes M, M^{-1} e uma matriz diagonal D , formada pelos autovalores de A , ou seja, D é a matriz nula, tais que

$$A = MDM^{-1} = 0$$

O que é um absurdo, pois A é não nula.

Portanto, um operador linear nilpotente, não nulo, não é diagonalizável.

(c) Mostre que T dado em (2.d) é nilpotente

Solução

Temos

$$\begin{aligned} T(ax^2 + bx + c) &= 2ax + b, \\ T^2(ax^2 + bx + c) &= T(T(ax^2 + bx + c)) = T(2ax + b) = 2a, \\ T^3(ax^2 + bx + c) &= T(T^2(ax^2 + bx + c)) = T(2a) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, T é um operador linear nilpotente.

12) Diz-se que um operador linear $T : V \rightarrow V$ é idempotente se $T^2 = T$ (i.e., $T \circ T(v) = T(v) \forall v \in V$). Sendo T idempotente,

(a) Encontre seus autovalores;

Solução

Seja v um autovetor associado ao autovalor λ . Então,

$$T(v) = \lambda v \quad \text{e} \quad T^2(v) = T(T(v)) = T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda(\lambda v) = \lambda^2 v.$$

Logo,

$$T^2(v) = T(v) \Leftrightarrow \lambda^2 v = \lambda v \Leftrightarrow (\lambda^2 - \lambda)v = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = 1.$$

Portanto, os autovalores de um operador linear idempotente são $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$.

(b) Dê um exemplo de matriz idempotente para $V = \mathbb{R}^2$;

Solução

Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $T(x, y) = (x, 0)$ é um operador idempotente.

De fato, temos que:

$$T^2(x, y) = T(T(x, y)) = T(x, 0) = (x, 0).$$

Portanto, $T^2 = T$ e, assim, T é um operador idempotente.