Álgebra Linear - 2022.3

Lista 4 - Determinantes

1) Encontre o determinante de cada uma das seguintes matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 8 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$C = \begin{pmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{pmatrix}.$$

2) Encontre o determinante da matriz

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & 3 \\ 7 & 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

3) Mostre que

$$det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 7 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 1 & 9 \\ 4 & 6 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix} = 2$$

4) Mostre que

$$det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & \pi & 7 \end{pmatrix} = 2$$

5) Use eliminação Gaussiana (escalonamento) para calcular os determinantes das seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & -7 & 2 \\ 3 & 1 & -5 & 3 \\ 2 & 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

6) Se A e B são matrizes quadradas das mesmas dimensões e $det(A) = 2$ e $det(B) = 3$, encontre $det(A^2B^{-1})$.

7) Para cada uma das matrizes abaixo calcule sua adjunta e utilize estes cálculos para calcular a matriz inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8) Calcule os seguintes determinantes

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{\pi} & 10 & 100 \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & \sqrt{\pi} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \sqrt{\pi} & 0 & 0 \\ 10 & 1 & 0 \\ 100 & e & \sqrt{\pi} \end{pmatrix}$$

9) Determine a matriz de cofatores e a a matriz adjunta das seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

10) Calcule as inversas das matrizes do exercício anterior usando adjunta e escalonamento.

11) (a) Use eliminação Gaussiana (escalonamento) para determinar se existem as inversas das seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Calcular a inversa quando existe.

12) Resolva os seguintes sistemas, com a, b, c constantes, por dois métodos: (i) escalonamento e (ii) escrevendo o sistema na forma matricial $Ax = b$ e encontrando a inversa da matriz A.

(a)

$$\begin{aligned} 2x + y &= a \\ 3x + 6y &= b \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x + y + z &= a \\ 2x + 2z &= b \\ 3y + 3z &= c \end{aligned}$$

13) Mostrar para a seguiente matriz de $M_{n\times n}$ a igualdade:

$$\left| \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 2 \end{pmatrix} \right| = n + 1$$