

Álgebra Linear - 2022.3

Lista 6 - Transformações Lineares

1) Quais das transformações abaixo são lineares?

- (a) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (z, 2^y, 2^z)$.
 (b) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (3x, 2, 5z)$.
 (c) $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, T(x, y, z, w) = (x - w, y - w, x + z)$.
 (d) $T : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n, T(A) = (A_{11}, A_{22}, \dots, A_{nn})$.
 (e) $T : C^2(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R}), T(f) = 3f'' - 2f' + 1$.
 (f) $T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, T(A) = A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}$.
 (g) $T : C([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, T(f) = \int_a^b f(x)dx$
 (h) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (|x|, 2x + 2y)$.
 (i) $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2, T(a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3) = (a_3 + a_2 - a_1, a_0)$.
 (j) $T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2, T(A) = (A_{11} - A_{12}, A_{11} + A_{12})$.
 (k) $T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3, T(A) = (A_{11} - A_{12}, A_{21} + A_{22}, 2A_{11} - A_{21})$
 (l) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x + y, x - y)$
 (m) $T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, T(A) = \det(A)$,
 (n) $T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R}), T(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
 (o) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, T(x, y) = xy$.
 (p) $T : P_2 \rightarrow P_3, T(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + c$.
 (q) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow M_{2 \times 2}, T(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \\ y & -x \end{bmatrix}$.

2) Dados os vetores $u_1 = (2, -1), u_2 = (1, 1), u_3 = (-1, -4), v_1 = (1, 3), v_2 = (2, 3), v_3 = (-5, -6)$ decida se existe ou não uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(u_i) = v_i, i = 1, 2, 3$.

3) Determine $T : V \rightarrow W$ conhecendo os valores de T na base de V .

- (a) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, tal que $T(1, 3, -1) = (1, 1, -1, 0), T(2, 0, 1) = (0, 0, 1, -1)$ e $T(0, -1, 1) = (1, 0, -1, 0)$
 (b) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $T(2, 1) = (1, 0)$ e $T(0, 1) = (1, -1)$.
 (c) $T : P_1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $T(2t) = (1, 1)$ e $T(-1) = (0, 3)$.
 (d) $T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = (1, 0), T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right) = (2, 1),$$

$$T\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = (0, 1), T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = (-1, 1).$$

4) (a) Encontre $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $Im(T) = [(1, 0, -1), (1, 2, 2)]$.

(b) Encontre $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $N(T) = [(1, 0, -1)]$.

5) Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear

(a) Mostre que se $T(v_1), \dots, T(v_n) \in W$ são L.I. então v_1, \dots, v_n são L.I.

(b) Mostre que se $V = W$ e os vetores $T(v_1), \dots, T(v_n)$ geram V então os vetores $v_1, \dots, v_n \in V$ geram V .

6) Seja $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear. Mostre que se $u \in Ker(T)$ e $v \in Im(T)$ então $T(u) \in Ker(T)$ e $T(v) \in Im(T)$.

7) Defina uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cujo núcleo seja a reta $y = x$ e cuja imagem seja a reta $y = 2x$.

8) Assinale Verdadeiro ou Falso:

(a) Uma transformação linear $T : V \rightarrow W$ é sobrejetora se e somente se $dim N(T) = dim(V) - dim(W)$.

(b) Dada a transformação linear $T : V \rightarrow W$, para todo $w \in W$ fixado, o conjunto $G = \{v \in V : T(v) = w\}$ é um subespaço de V .

(c) Toda transformação linear $T : C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ injetora é também sobrejetora.

(d) O núcleo de toda transformação linear $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tem dimensão maior ou igual a 3.

9) Seja $T : P_n(\mathbb{R}) \rightarrow P_n(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por $T(p) = 5p - 4p' + p''$. Mostre que se núcleo é $\{0\}$ e conclua que para todo polinômio $b(x)$ existe um polinômio $p(x)$ tal que $b(x) = 5p(x) - 4p'(x) + p''(x)$.

10) Seja $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear. Mostre que $T^2 = 0$ se e somente se $T(V) \subset Ker(T)$.

11) Seja $\theta \in \mathbb{R}$ Encontre o núcleo da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x \cos(\theta) - y \sin(\theta), x \sin(\theta) + y \cos(\theta))$

12) Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear bijetora. Mostre que T leva retas em retas.

13) Existe uma transformação linear injetora $T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$?

- 14) Determine o núcleo das transformações lineares abaixo e descreva-os geometricamente.
- $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, T(x, y) = y + 2x.$
 - $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, T(x, y) = x - 2y.$
 - $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 T(x, y) = (2x + 2y, x + y).$
 - $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 T(x, y, z) = (z - x, z - 2x, z - 3x).$
- 15) Determine uma base e a dimensão do núcleo e da imagem das transformações lineares:
- $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 T(x, y, z) = (x + y + z, 2x + 2y + 2z).$
 - $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 T(x, y, z) = (x + y, y + z).$
 - $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 T(x, y, z, t) = (x - y + z + t, 2x - 2y + 3z + 4t, 3x - 3y + 4z + 5t).$
 - $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3 T(x, y, z, s, t) = (x + 2y + 2z + s + t, x + 2y + 3z + 2s - t, 3x + 6y + 8z + 5s - t).$
- 16) Determinar um $T \in L(P_3(\mathbb{R}), P_2(\mathbb{R}))$ cujo núcleo seja gerado pelos polinômios $1 + x^3$ e $1 - x^2$.
- 17) Encontre uma base para o núcleo e outra para a imagem de $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ dada por $T(p) = p' + p''$.
- 18) Mostre que se U e V são espaços vetoriais de dimensão finita tais que $\dim U = \dim V$ e se $T \in L(U, V)$ então as seguintes condições são equivalentes:
- T é sobrejetora.
 - T é injetora.
 - T é bijetora.
 - T leva bases de U em bases de V .
- 19) (a) É $W = \{p \in P_3(\mathbb{R} : p(-1) = 0)\}$ isomorfo a \mathbb{R}^2 ? Em caso afirmativo forneça uma prova; em caso negativo forneça um contraexemplo.
- (b) É $W = \{p \in P_3(\mathbb{R} : p(-1) = 0)\}$ isomorfo a \mathbb{R} ? Em caso afirmativo forneça uma prova; em caso negativo forneça um contra-exemplo.
- 20) Mostre que $W = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : A_{11} = A_{12} \text{ e } A_{22} = A_{21}\}$ é isomorfo a $P_1(\mathbb{R})$.