Álgebra Linear - 2022.3

Lista 8 - Autovalores e Autovetores

1) Sendo $T : V \longrightarrow V$ um operador linear, mostre que o conjunto $V_\lambda = \{v \in V : Tv = \lambda v\}$, formado pelos autovetores associados a um autovalor λ, inclusive $v = 0$, é um subespaço vetorial de V.

2) Encontre os autovalores e autovetores associados dos operadores lineares $T : V \longrightarrow V$ e matrizes em $M(n, n)$ seguintes:

(a) $V = \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x + y, 2x + y)$

(b) $V = \mathbb{R}^2, T(x, y) = (-y, x)$

(c) $V = P_2, T(ax^2 + bx + c) = ax^2 + cx + b$

(d) $V = P_2, T(ax^2 + bx + c) = 2ax + b$, (derivada)

(e) $V = M(2, 2), T(A) = A^T, A \in M(2, 2)$

(f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, (g) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(h) $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$, (i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,

(j) $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 14 \\ 2 & -7 & 14 \\ 2 & -4 & 11 \end{pmatrix}$,

(k) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 12 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3) (a) Calcule os autovalores reais e seus autovetores do operadore linear em $\mathbb{R}^3$ dado pela rotação de θ em torno de z:

$$\begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) rotação de $\frac{\pi}{2}$ em torno de $(1, 1, 1)$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 - \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} \\ 1 + \sqrt{3} & 1 & 1 - \sqrt{3} \\ 1 - \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

[Dica: qual é o autovetor (direção invariante) óbvio?]

4) Seja $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Encontre os autovalores de A e A^{-1}

(b) Encontre os autovetores.

5) Dado um operador linear $T : V \longrightarrow V$, mostre que $ker(T) = V_\lambda$, com $\lambda = 0$. Mostre que quando $\lambda = 0$ é autovalor, T não é injetora. Mostre a recíproca: quando T não é injetora, $\lambda = 0$ é autovalor de T.

6) Verifique quais dos operadores e matrizes da questão 2 são diagonalizáveis. (Um operador é diagonalizável quando sua matriz de transformação em alguma base é diagonalizável. Uma matriz é diagonalizável quando é possível encontrar uma base de autovetores para V.)

7) Diagonalize a matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$, i.e., encontre uma matriz M tal que $M^{-1}AM$ é uma matriz diagonal. Verifique que $M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, onde λ_1, λ_2 são os autovalores de A.

8) Diagonalize a matriz A em $(2.i)$.

9) Resolva o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias para as variáveis $x(t), y(t)$:

$$x^{'} = 5x + 3y,$$
$$y^{'} = 3x - 3y.$$

(utilize o exercício 7.)

10) Sendo A a matriz do exercício 7, calcule A^2, A^4 e A^{10}. Utilize $A^2 = (M^{-1}DM)(M^{-1}DM) = M^{-1}D^2M$, onde D é a matriz diagonal após diagonalização. Calcule A^2 explicitamente e compare.

11) Diz-se que um operador linear $T : V \longrightarrow V$ é nilpotente se existir um número inteiro positivo n, tal que $T^n = 0 (i.e., T \circ T \circ ... \circ T(v) = 0 \ \forall v \in V)$. Sendo T nilpotente,
(a) Encontre seus autovalores;
(b) Mostre que um operador linear nilpotente, não nulo, não é diagonalizável;
(c) Mostre que T dado em $(2.d)$ é nilpotente

12) Diz-se que um operador linear $T : V \longrightarrow V$ é idempotente se $T^2 = T (i.e., T \circ T(v) = T(v) \ \forall v \in V)$. Sendo T idempotente,

(a) Encontre seus autovalores;
(b) Dê um exemplo de matriz idempotente para $V = \mathbb{R}^2$;