Álgebra Linear - 2022.3

Lista 7 - Matriz mudança de base - Transfromações Lineares e Matrizes

1) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por $T(x, y, z) = (x + z, y + z, x + y + 2z)$.

   Encontre as matrizes de T com relação à base canônica, C, e em relação à base B formada pelos vetores: $u = (1, 1, 2), v = (-1, 1, 0)$ e $w = (-1, -1, 1)$.

2) Seja $T \in L(P_2(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ dada por $T(p) = \int_0^1 p(x)dx$. Encontre as matrizes de T em relação às bases canônicas de $P_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}$

3) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador lienar tal que

   $T(e_1) = (2, 3, 1), T(e_1 + e_2) = (5, 2, 7)$ e $T(e_1 + e_2 + e_3) = (-2, 0, 7)$.

   (a) Encontre $T(x, y, z)$ para $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

   (b) T é sobrejetora? Justifique sua resposta.

   (c) T é injetora? Justifique sua resposta.

   (d) T é bijetora? Justifique sua resposta.

4) Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ um operador linear tal que

   $(T(p_0))(t) = 1 + t, (T(p_1(t))(t) = t + t^2$ e $(T(p_2))(t) = 1 + t - t^2$,

   onde $p_i(t) = t^i$, $i = 0, 1, 2$.

   (a) Encontre $T(p)$ para $p \in P_2(\mathbb{R})$.

   (b) T é sobrejetora? Justifique a resposta.

   (c) T é injetora? Justifique sua resposta.

   (d) T é bijetora? Justifique sua resposta.

5) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear cuja matriz na base $B = \{(1, 0), (1, 4)\}$ é

   $[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. Determinar a matriz de T em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$.

6) Seja $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ uma base do espaço vetorial V. Se $T, S : V \to V$ são operadores lineares em V tais que

   $T(e_1) = 2e_1 - 3e_2 + e_3,\ T(e_2) = e_1 + e_2,\ T(e_3) = e_2 + e_3$

   e

   $S(e_1) = 3e_1 + 2e_2,\ S(e_2) = e_1 - e_2 - e_3,\ S(e_3) = e_1 + e_2 - 2e_3$.

   Determinar as seguintes matrizes: $[T]_B$, $[S]_B$, $[S \circ T]_B$,

   $\left[S^2 + I\right]_B$ e $\left[T^3 - S^2\right]_B$.

7) Considere a transformação linear $D : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$, onde $D(p) = p'$.
   (a) Escreva D na forma matricial em relação à base canônica $\left\{t^3, t^2, t, 1\right\}$.
   (b) Determine $Ker(D)$ e $Im(D)$ e encontre uma base para cada um destes subespaços. Verifique o teorma do núcleo e da imagem.
   (c) Mostre que $D \circ D \circ D \circ D = \mathbf{0}$. Primeiro usando a definição de derivada. Depois usando a representação matricial.