

## Álgebra Linear - 2022.3

### Lista 2 - Dependência e Independência Linear, Bases e Soma Direta

- 1) Exiba três vetores  $u, v, w \in \mathbb{R}^3$  com as seguintes propriedades: nenhum deles é múltiplo do outro, nenhuma das coordenadas é igual a zero e  $\mathbb{R}^3$  não é gerado por eles.

#### Solução

Tome  $u = (1, 1, 1)$ ,  $v = (1, 1, 2)$  e  $w = u + v = (1, 1, 1) + (1, 1, 2) = (2, 2, 3)$ . Temos que nenhuma coordenada é nula e nenhum vetor é múltiplo do outro. No entanto, não geram  $\mathbb{R}^3$ , pois  $w$  é combinação linear de  $u$  e  $v$ .

- 2) Mostre que a matriz  $\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -6 & 16 \end{bmatrix}$  pode ser escrita como combinação linear das matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

#### Solução

Queremos encontrar constantes  $a, b$  e  $c$ , tais que

$$a \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -6 & 16 \end{bmatrix}.$$

Da igualdade de matrizes acima obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a - b + c = 4 \\ 2a + 2b - 2c = -4 \\ 3a + 3b - 3c = -6 \\ 4a - 4b + 4c = 16 \end{cases},$$

cujas matriz ampliada do sistema é dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 4 \\ 2 & 2 & -2 & \vdots & -4 \\ 3 & 3 & -3 & \vdots & -6 \\ 4 & -4 & 4 & \vdots & 16 \end{bmatrix}.$$

Sua forma escada reduzida por linhas é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Da primeira linha obtemos que  $a = 1$  e da segunda linha obtemos que  $b = -3 + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

Logo, temos que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + (-3 + c) \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -6 & 16 \end{bmatrix},$$

para cada  $c \in \mathbb{R}$ . Por exemplo, para  $c = 3$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -6 & 16 \end{bmatrix}.$$

- 3) Assinale V(verdadeiro) ou F(falso) e justifique sua resposta.

- (a) O vetor  $w = (1, -1, 2)$  pertence ao subespaço gerado por  $u = (1, 2, 3)$  e  $v = (3, 2, 1)$ .

**Solução**

Para o vetor  $w$  pertencer ao espaço gerado pelos vetores  $u$  e  $v$  é necessário que existam constantes  $a$  e  $b$  tais que

$$a(1, 2, 3) + b(3, 2, 1) = (1, -1, 2).$$

Da igualdade de vetores acima obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a + 3b = 1 \\ 2a + 2b = -1 \\ 3a + b = 2 \end{cases},$$

cujas matriz ampliada do sistema é dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & \vdots & 1 \\ 2 & 2 & \vdots & -1 \\ 3 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix}.$$

Sua forma escada reduzida por linhas é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & \vdots & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \vdots & 5 \end{bmatrix}.$$

Pela última linha vemos que o sistema é impossível e, assim,  $w$  não pertence ao espaço gerado pelos vetores  $u$  e  $v$ . Portanto, a afirmação é falsa.

- (b) Se  $X \subset Y$  então  $[X] \subset [Y]$ .

**Prova**

Seja  $x \in [X] \Rightarrow x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ ,  $x_i \in X$ . No entanto, como  $X \subset Y \Rightarrow x_i \in Y \Rightarrow x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \in [Y]$ .

Portanto,  $[X] \subset [Y]$ .

- (c) Se  $[X] \subset [Y]$  então  $X \subset Y$ .

**Solução**

A afirmação é falsa. De fato, tome  $X = \mathbb{R}^2$ ,  $Y = \{(1, 0), (0, 1)\}$  e, assim,  $\mathbb{R}^2 = [X] \subset [Y] = \mathbb{R}^2$ , mas  $\mathbb{R}^2 = X \not\subset Y = \{(1, 0), (0, 1)\}$ .

- 4) Para cada uma das seguintes coleções de vetores, determine quando o primeiro vetor é combinação linear dos vetores restantes:

- (a)  $(1, 2, 3), (1, 0, 1), (2, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$ .

**Solução**

Queremos encontrar constantes  $a$  e  $b$  tais que

$$a(1, 0, 1) + b(2, 1, 0) = (1, 2, 3).$$

Da igualdade de vetores acima obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a + 2b = 1(*) \\ b = 2 \\ a = 3 \end{cases},$$

cujas matriz ampliada do sistema é dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & \vdots & 2 \\ 1 & 0 & \vdots & 3 \end{bmatrix}.$$

Sua forma escada reduzida por linhas é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & \vdots & 6 \end{bmatrix}.$$

Pela última linha vemos que o sistema é impossível e, assim,  $(1, 2, 3)$  não é combinação linear dos vetores  $(1, 0, 1)$  e  $(2, 1, 0)$ .

Note que poderíamos ter resolvido este exercício mostrando que os valores encontrados para  $a$  e  $b$  não satisfazem (\*). Também, poderíamos ter mostrando que os três vetores são L.I e, assim, o primeiro vetor não é combinação linear dos outros dois.

(b)  $x^3 + 2x^2 + 3x + 1; x^3; x^2 + 3x; x^2 + 1 \in \mathcal{P}_4$ .

**Solução**

Queremos encontrar constantes  $a, b$  e  $c$  tais que

$$ax^3 + b(x^2 + 3x) + c(x^2 + 1) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1.$$

$$ax^3 + (b + c)x^2 + 3bx + c = x^3 + 2x^2 + 3x + 1.$$

Da igualdade de polinômios acima, temos

$$a = 1, b + c = 2, 3b = 3 \Rightarrow b = 1 \text{ e } c = 1.$$

Logo,  $a = 1, b = 1$  e  $c = 1$

Portanto, o primeiro vetor é combinação linear dos outros três.

(c)  $(1, 3, 5, 7), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$

**Solução**

Queremos encontrar constantes  $a, b$  e  $c$  tais que

$$a(1, 0, 1, 0) + b(0, 1, 0, 1) + c(0, 0, 1, 1) = (1, 3, 5, 7).$$

Da igualdade de vetores acima, temos

$$a = 1, b = 3, a + c = 5 \Rightarrow c = 4 \text{ e } b + c = 7.$$

Logo,  $a = 1, b = 3$  e  $c = 4$ .

Portanto, o primeiro vetor é combinação linear dos outros três.

5) Para cada uma das seguintes coleções de vetores, determine quando os vetores são linearmente independentes:

(a)  $(1, 2, 3), (1, 0, 1), (2, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$ .

**Solução**

Queremos encontrar constantes  $a, b$  e  $c$  tais que

$$a(1, 2, 3) + b(1, 0, 1) + c(2, 1, 0) = (0, 0, 0).$$

Da igualdade de vetores acima, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ 2a + c = 0 \\ 3a + b = 0 \end{cases},$$

cujas matriz ampliada do sistema é dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 0 \\ 2 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 3 & 1 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Sua forma escada reduzida por linhas é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, temos como solução  $a = b = c = 0$  e, assim, os vetores são linearmente independentes.

(b)  $(1, 2), (3, 5), (-1, 3) \in \mathbb{R}^2$ .

**Solução**

Queremos encontrar constantes  $a$ ,  $b$  e  $c$  tais que

$$a(1, 2) + b(3, 5) + c(-1, 3) = (0, 0).$$

Da igualdade de vetores acima, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a + 3b - c = 0 \\ 2a + 5b + 3c = 0 \end{cases},$$

cujas matriz ampliada do sistema é dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & \vdots & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Sua forma escada reduzida por linhas é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 14 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -5 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, temos como solução  $a = -14c$ ,  $b = 5c$ ,  $c = c \in \mathbb{R}$ . Logo, vale

$$-14c(1, 2) + 5c(3, 5) + c(-1, 3) = (0, 0).$$

para cada  $c \in \mathbb{R}$ .

Portanto, uma vez que a solução é diferente da trivial, se  $c \neq 0$ , os vetores são linearmente dependentes. Por exemplo para  $c = 1$  temos:

$$-14(1, 2) + 5(3, 5) + (-1, 3) = (0, 0).$$

(c)  $(2, 5, -3, 6), (1, 0, 0, 1), (4, 0, 9, 6) \in \mathbb{R}^4$ .

**Solução**

Queremos encontrar constantes  $a$ ,  $b$  e  $c$  tais que

$$a(2, 5, -3, 6) + b(1, 0, 0, 1) + c(4, 0, 9, 6) = (0, 0, 0, 0).$$

Da igualdade de vetores acima, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a + b + 4c = 0 \\ 5a = 0 \\ -3a + 9c = 0 \\ 6a + b + 6c = 0 \end{cases},$$

cujas solução é  $a = b = c = 0$ .

Portanto, o conjunto de vetores é linearmente independente.

(d)  $x^2 + 1, x + 1, x^2 + x \in \mathcal{P}_3$ .

**Solução**

Queremos encontrar constantes  $a, b$  e  $c$  tais que

$$a(x^2 + 1) + b(x + 1) + c(x^2 + x) = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0.$$

$$(a + c)x^2 + (b + c)x + a + b = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0.$$

Da igualdade de polinômios acima temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ b + c = 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ -a + c = 0 \\ b = -a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}.$$

Portanto, os vetores são linearmente independentes.

(e)  $2x^2 + 3, x^2 + 1, 1 \in \mathcal{P}_3$ .

**Solução**

Queremos encontrar constantes  $a, b$  e  $c$  tais que

$$a(2x^2 + 3) + b(x^2 + 1) + c = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0.$$

$$(2a + b)x^2 + 3a + b + c = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0.$$

Da igualdade de polinômios acima temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ 3a + b + c = 0 \end{cases}.$$

Pela primeira linha  $b = -2a$ , substituindo na segunda linha temos que  $3a - 2a + c = 0 \Leftrightarrow a + c = 0 \Rightarrow c = -a$ .

Logo, temos

$$a(2x^2 + 3) - 2a(x^2 + 1) - a = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 = 0.$$

para todo  $a \in \mathbb{R}$ .

Portanto, os vetores são linearmente dependentes para  $a \neq 0$ . Por exemplo para  $a = 1$ :

$$(2x^2 + 3) - 2(x^2 + 1) - 1 = 0.$$

(f)  $2x^2 + 3, x^3 + 1, x^3 + x^2, 1 \in \mathcal{P}_3$ .

**Solução**

Queremos encontrar constantes  $a, b, c$  e  $d$  tais que

$$a(2x^2 + 3) + b(x^3 + 1) + c(x^3 + x^2) + d = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0.$$

$$(b + c)x^3 + (2a + c)x^2 + 3a + b + d = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0.$$

Da igualdade de polinômios acima temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} b + c = 0 \\ 2a + c = 0 \\ 3a + b + d = 0 \end{cases},$$

cujas matriz ampliada é dada por:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Sua forma escada reduzida por linhas é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, temos como solução  $a = -\frac{1}{5}d$ ,  $b = -\frac{2}{5}d$ ,  $c = \frac{2}{5}d$ ,  $d = d \in \mathbb{R}$ . Logo, vale

$$-\frac{1}{5}d(2x^2 + 3) - \frac{2}{5}d(x^3 + 1) + \frac{2}{5}d(x^3 + x^2) + d = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 = 0.$$

para cada  $d \in \mathbb{R}$ .

Portanto, uma vez que a solução é diferente da trivial para  $d \neq 0$ , os vetores são linearmente dependentes. Por exemplo, para  $d = 1$ , temos

$$-\frac{1}{5}(2x^2 + 3) - \frac{2}{5}(x^3 + 1) + \frac{2}{5}(x^3 + x^2) + 1 = 0.$$

6) Encontre uma base para os seguintes subespaços e estenda a uma base de  $\mathbb{R}^3$  ou  $\mathbb{R}^4$  conforme corresponda.

(a)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$ .

**Solução**

Seja  $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$ , temos que

$$(0, y, z) = (0, y, 0) + (0, 0, z) = y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1).$$

Logo,  $V = \{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  e como  $\beta_1 = \{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  é claramente linearmente independente, segue que  $\beta_1$  é uma base para  $V$ .

Para estender a uma base do  $\mathbb{R}^3$ , tome  $(1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$  e, então,  $\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  é a nossa conhecida base canônica do  $\mathbb{R}^3$ .

(b)  $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : w = x + y \text{ e } z = x - y\}$ .

**Solução**

Os elementos de  $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : w = x + y \text{ e } z = x - y\}$  são da forma:

$$(x, y, x - y, x + y) = (x, 0, x, x) + (0, y, -y, y) = x(1, 0, 1, 1) + y(0, 1, -1, 1).$$

Temos que  $V = \{(1, 0, 1, 1), (0, 1, -1, 1)\}$  e o conjunto  $\beta_1 = \{(1, 0, 1, 1), (0, 1, -1, 1)\}$  é linearmente independente, pois

$$a(1, 0, 1, 1) + b(0, 1, -1, 1) = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow a = b = 0.$$

Portanto,  $\beta_1 = \{(1, 0, 1, 1), (0, 1, -1, 1)\}$  é uma base para  $V$ .

Para estender a uma base do  $\mathbb{R}^4$ , tome  $(1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1) \in \mathbb{R}^4$ .

O conjunto  $\beta = \{(1, 0, 1, 1), (0, 1, -1, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$  é linearmente independente. De fato,

$$a(1, 0, 1, 1) + b(0, 1, -1, 1) + c(1, 0, 0, 0) + d(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0).$$

Da igualdade de vetores acima obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ b = 0 \\ a - b = 0 \\ a + b + d = 0 \end{cases},$$

cujas soluções são  $a = b = c = d = 0$ .

Portanto,  $\beta$  é linearmente independente e como a  $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$ , segue que  $\beta$  é uma base de  $\mathbb{R}^4$ .

(c) O plano  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - 2y + 5z = 0\}$ .

**Solução**

Os elementos de  $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - 2y + 5z = 0\}$  são da forma:

$$\left(x, y, -\frac{3}{5}x + \frac{2}{5}y\right) = \left(x, 0, -\frac{3}{5}x\right) + \left(0, y, \frac{2}{5}y\right) = x\left(1, 0, -\frac{3}{5}\right) + y\left(0, 1, \frac{2}{5}\right).$$

Temos que  $V = \left[\left(1, 0, -\frac{3}{5}\right), \left(0, 1, \frac{2}{5}\right)\right]$  e o conjunto  $\beta_1 = \left\{\left(1, 0, -\frac{3}{5}\right), \left(0, 1, \frac{2}{5}\right)\right\}$  é linearmente independente, pois

$$a\left(1, 0, -\frac{3}{5}\right) + b\left(0, 1, \frac{2}{5}\right) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow a = b = 0.$$

Portanto,  $\beta_1 = \left\{\left(1, 0, -\frac{3}{5}\right), \left(0, 1, \frac{2}{5}\right)\right\}$  é uma base para  $V$ .

Para estender a uma base de  $\mathbb{R}^3$ , tome  $(0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ ,  $(0, 0, 1) \notin \left[\left(1, 0, -\frac{3}{5}\right), \left(0, 1, \frac{2}{5}\right)\right] = V$  e o conjunto  $\beta = \left\{\left(1, 0, -\frac{3}{5}\right), \left(0, 1, \frac{2}{5}\right), (0, 0, 1)\right\}$  é linearmente independente, pois

$$a\left(1, 0, -\frac{3}{5}\right) + b\left(0, 1, \frac{2}{5}\right) + c(0, 0, 1) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow a = b = c = 0.$$

Como a  $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ , concluímos que  $\beta$  é uma base de  $\mathbb{R}^3$ .

(d)  $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \text{ e } 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$ .

**Solução**

Primeiramente vamos encontrar a forma dos elementos de  $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \text{ e } 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$ . Temos que,

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases},$$

cujas matriz ampliada é dada por:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 5 & -1 & 1 & -1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Sua forma escada reduzida por linhas é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, temos como solução  $x_1 = -\frac{1}{4}x_3$  e  $x_2 = -\frac{1}{4}x_3 - x_4$ ,  $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ .

Logo, os elementos de  $V$  são da forma:

$$\left(-\frac{1}{4}x_3, -\frac{1}{4}x_3 - x_4, x_3, x_4\right) = \left(-\frac{1}{4}x_3, -\frac{1}{4}x_3, x_3, 0\right) + (0, -x_4, 0, x_4) = x_3\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 1, 0\right) + x_4(0, -1, 0, 1).$$

Temos que  $V = \left[\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 1, 0\right), (0, -1, 0, 1)\right]$  e o conjunto  $\beta_1 = \left\{\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 1, 0\right), (0, -1, 0, 1)\right\}$  é linearmente independente, pois

$$a\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 1, 0\right) + b(0, -1, 0, 1) = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow a = b = 0. (\text{exercício})$$

Portanto,  $\beta_1 = \left\{\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 1, 0\right), (0, -1, 0, 1)\right\}$  é uma base para  $V$ .

Para estender a uma base de  $\mathbb{R}^4$ , tome  $(1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1) \in \mathbb{R}^4$ , temos que

$(1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1) \notin \left[\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 1, 0\right), (0, -1, 0, 1)\right] = V$  e o conjunto

$$\beta = \left\{\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 1, 0\right), (0, -1, 0, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\right\}$$

é linearmente independente, pois

$$a\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 1, 0\right) + b(0, -1, 0, 1) + c(1, 0, 0, 0) + d(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow a = b = c = d = 0.$$

(exercício).

Como a  $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$ , concluímos que  $\beta$  é uma base de  $\mathbb{R}^4$ .

7) Seja  $\mathcal{P}_n$  o conjunto dos polinômios reais de grau menor igual que  $n$ . Para cada um dos itens seguintes seja  $S$  o conjunto dos polinômios em  $\mathcal{P}_k$  satisfazendo a condição dada. Determine se  $S$  é um subespaço de  $\mathcal{P}_n$ . Se  $S$  for um subespaço calcule a dimensão de  $S$ .

(a)  $p(0) = 0$

**Solução**

O conjunto  $S$  dos polinômios em  $\mathcal{P}_k$  que satisfazem  $p(0) = 0$  é um subespaço vetorial de  $\mathcal{P}_n$ . De fato, sejam  $p, q$  em  $S$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , então

- i.  $\bar{0}(x) \in S$ , pois  $\bar{0}(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \bar{0}(0) = 0$ .
- ii.  $(p+q)(0) = p(0) + q(0) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow p+q \in S$ .
- iii.  $(\alpha p)(0) = \alpha p(0) = \alpha 0 = 0 \Rightarrow \alpha p \in S$ .

Portanto,  $S$  é subespaço vetorial de  $\mathcal{P}_n$

Para calcular a  $\dim(S)$  considere  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k$  em  $\mathcal{P}_k$ . Temos que os polinômios em  $S$  satisfazem,  $p(0) = a_0 = 0$ .

Logo, os polinômios em  $S$  são da forma  $p(x) = a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k$  e, assim, uma base para  $S$  é  $\beta = \{x, x^2, \dots, x^k\}$ .

Portanto, a  $\dim(S) = k$ .

(b)  $p'(0) = 0$

**Solução**

O conjunto  $S$  dos polinômios em  $\mathcal{P}_k$  que satisfazem  $p'(0) = 0$  é um subespaço vetorial de  $\mathcal{P}_n$ . De fato, sejam  $p, q$  em  $S$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , então

- i.  $\bar{0}(x) \in S$ , pois  $\bar{0}'(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \bar{0}'(0) = 0$ .
- ii.  $(p+q)'(0) = p'(0) + q'(0) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow p+q \in S$ .
- iii.  $(\alpha p)'(0) = \alpha p'(0) = \alpha 0 = 0 \Rightarrow \alpha p \in S$ .

Portanto,  $S$  é subespaço vetorial de  $\mathcal{P}_n$

Para calcular a  $\dim(S)$  considere  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k$  em  $\mathcal{P}_k$ . Temos que os polinômios em  $S$  satisfazem,  $p'(0) = a_1 = 0$ .

Logo, os polinômios em  $S$  são da forma  $p(x) = a_0 + a_2x^2 + \dots + a_kx^k$  e, assim, uma base para  $S$  é  $\beta = \{1, x^2, \dots, x^k\}$ .

Portanto, a  $\dim(S) = k$ .

(c)  $p''(0) = 0$

**Solução**

O conjunto  $S$  dos polinômios em  $\mathcal{P}_k$  que satisfazem  $p''(0) = 0$  é um subespaço vetorial de  $\mathcal{P}_n$ . De fato, sejam  $p, q$  em  $S$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , então

- i.  $\bar{0}(x) \in S$ , pois  $\bar{0}''(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \bar{0}''(0) = 0$ .
- ii.  $(p+q)''(0) = p''(0) + q''(0) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow p+q \in S$ .
- iii.  $(\alpha p)''(0) = \alpha p''(0) = \alpha 0 = 0 \Rightarrow \alpha p \in S$ .

Portanto,  $S$  é subespaço vetorial de  $\mathcal{P}_n$

Para calcular a  $\dim(S)$  considere  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k$  em  $\mathcal{P}_k$ . Temos que os polinômios em  $S$  satisfazem,  $p''(0) = a_2 = 0$ .

Logo, os polinômios em  $S$  são da forma  $p(x) = a_0 + a_1x + a_3x^3 + \dots + a_kx^k$  e, assim, uma base para  $S$  é  $\beta = \{1, x, x^3, \dots, x^k\}$ .

Portanto, a  $\dim(S) = k$ .

(d)  $p'(0) + p(0) = 0$

**Solução**

O conjunto  $S$  dos polinômios em  $\mathcal{P}_k$  que satisfazem  $p'(0) + p(0) = 0$  é um subespaço vetorial de  $\mathcal{P}_n$ . De fato, sejam  $p, q$  em  $S$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , então

- i.  $\bar{0}(x) \in S$ , pois  $\bar{0}'(x) + \bar{0}(x) = 0 + 0 = 0$ .
- ii.  $((p'+p) + (q'+q))(0) = (p'+p)(0) + (q'+q)(0) = p'(0) + p(0) + q'(0) + q(0) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow p+q \in S$ .
- iii.  $(\alpha(p'+p))(0) = \alpha(p'+p)(0) = \alpha(p'(0) + p(0)) = \alpha 0 = 0 \Rightarrow \alpha p \in S$ .



Portanto,  $S$  é subespaço vetorial de  $\mathcal{P}_n$

Para calcular a  $\dim(S)$  considere  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k$  em  $\mathcal{P}_k$ . Temos que

$$p'(x) + p(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + ka_kx^{k-1} + a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k.$$

Os polinômios em  $S$  satisfazem,  $p'(0) + p(0) = a_1 + a_0 = 0 \Rightarrow a_1 = -a_0$ .

Logo, os polinômios em  $S$  são da forma  $p(x) = a_0(1-x) + a_2x^2 + \dots + a_kx^k$  e, assim, uma base para  $S$  é  $\beta = \{1-x, x^2, \dots, x^k\}$ .

Portanto, a  $\dim(S) = k$ .

(e) O conjunto dos polinômios de grau igual ou menor que  $k$ . (com  $k < n$ )

### Solução

O conjunto dos polinômios  $\mathcal{P}_k$  é um subespaço vetorial de  $\mathcal{P}_n$  (com  $k < n$ ). De fato, sejam  $p(x) = \sum_{j=0}^k a_jx^j$ ,

$$q(x) = \sum_{j=0}^k b_jx^j \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}, \text{ então}$$

$$\text{i. } \bar{0}(x) \in \mathcal{P}_k, \text{ pois } \bar{0}(x) = \sum_{j=0}^k 0x^j.$$

$$\text{ii. } (p+q)(x) = \sum_{j=0}^k a_jx^j + \sum_{j=0}^k b_jx^j = \sum_{j=0}^k (a_j + b_j)x^j \in \mathcal{P}_k.$$

$$\text{iii. } (\alpha p)(x) = \alpha \sum_{j=0}^k a_jx^j = \sum_{j=0}^k (\alpha a_j)x^j \in \mathcal{P}_k.$$

Portanto,  $\mathcal{P}_k$  é subespaço vetorial de  $\mathcal{P}_n$

Sabemos que uma base para  $\mathcal{P}_k$  é  $\beta = \{1, x, x^2, \dots, x^k\}$ .

Portanto, a  $\dim(S) = k + 1$ .

8) Determine se os conjuntos abaixo são subespaços de  $M(2, 2)$ . Em caso afirmativo exiba uma base:

$$\text{(a) } \mathbf{V} = \left[ \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right] \text{ com } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } b = c.$$

### Solução

O conjunto  $\mathbf{V}$  é subespaço de  $M(2, 2)$ . De fato, sejam  $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & d_2 \end{bmatrix}$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , então

$$\text{i. } \left[ \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \in \mathbf{V}, \text{ pois } b = c = 0$$

$$\text{ii. } A + B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} \in \mathbf{V}.$$

$$\text{iii. } \alpha A = \alpha \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ \alpha b_1 & \alpha d_1 \end{bmatrix} \in \mathbf{V}.$$

Portanto,  $\mathbf{V}$  é subespaço de  $M(2, 2)$ .

Agora vamos encontrar uma base para  $\mathbf{V}$ . Temos que

$$\left[ \begin{array}{cc} a & b \\ b & d \end{array} \right] = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo,  $\mathbf{V} = \left\{ \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \right\}$  e  $\beta = \left\{ \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \right\}$  é linearmente independente.

Portanto,  $\beta$  é uma base para  $\mathbf{V}$ .

(b)  $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  com  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  e  $b = 0 = c$ .

**Solução**

O conjunto  $\mathbf{V}$  é subespaço de  $M(2, 2)$ . De fato, sejam  $A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , então

i.  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{V}$ , pois  $b = 0 = c$ .

ii.  $A + B = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} \in \mathbf{V}$ .

iii.  $\alpha A = \alpha \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 & 0 \\ 0 & \alpha d_1 \end{bmatrix} \in \mathbf{V}$ .

Portanto,  $\mathbf{V}$  é subespaço de  $M(2, 2)$ .

Agora vamos encontrar uma base para  $\mathbf{V}$ . Temos que

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo,  $\mathbf{V} = \left\{ \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \right\}$  e  $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$  é linearmente independente.

Portanto,  $\beta$  é uma base para  $V$ .

(c)  $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  com  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  e  $a = 0$ .

**Solução**

O conjunto  $\mathbf{V}$  é subespaço de  $M(2, 2)$ . De fato, sejam  $A = \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , então

i.  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{V}$ , pois  $a = 0$ .

ii.  $A + B = \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} \in \mathbf{V}$ .

iii.  $\alpha A = \alpha \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha b_1 \\ \alpha c_1 & \alpha d_1 \end{bmatrix} \in \mathbf{V}$ .

Portanto,  $\mathbf{V}$  é subespaço de  $M(2, 2)$ .

Agora vamos encontrar uma base para  $\mathbf{V}$ . Temos que

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ c & d \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo,  $\mathbf{V} = \left\{ \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \right\}$  e  $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$  é linearmente independente.

Portanto,  $\beta$  é uma base para  $V$ .

9) Mostre que os polinômios  $1 - t^3, (1 - t)^2, 1 - t$  e  $1$  geram o espaço dos polinômios de grau menor igual a 3.

**Solução**

Queremos encontrar constantes  $a, b, c$  e  $d$ , tais que

$$a(1 - t^3) + b(1 - 2t + t^2) + c(1 - t) + d = 0t^3 + 0t^2 + 0t + 0$$

$$-at^3 + bt^2 + (-2b - c)t + a + b + c + d = 0t^3 + 0t^2 + 0t + 0$$

Da igualdade de polinômios acima obtemos que  $a = b = c = d = 0$ .

Portanto, o conjunto  $\beta = \{1 - t^3, (1 - t)^2, 1 - t, 1\}$  é linearmente independente e como  $\dim(\mathcal{P}_3) = 4$ ,  $\beta$  é uma base para  $\mathcal{P}_3$  e  $\beta$  gera o espaço vetorial.

10) Seja  $U$  o subespaço de  $\mathbb{R}^3$ , gerado por  $(1, 0, 0)$  e  $W$  o subespaço gerado por  $(1, 1, 0)$  e  $(0, 1, 1)$  Mostre que  $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$

### Solução 1

i.  $U \cap W = \{(0, 0, 0)\}$ . De fato,

$$a(1, 0, 0) = b(1, 1, 0) + c(0, 1, 1)$$

$$a(1, 0, 0) - b(1, 1, 0) - c(0, 1, 1) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow a = b = c = 0.$$

Portanto,  $U \cap W = \{(0, 0, 0)\}$ .

ii.  $a(1, 0, 0) + b(1, 1, 0) + c(0, 1, 1) = (x, y, z) \Leftrightarrow a = x - y + z, b = y - z$  e  $c = z$ .

$$\text{Logo, } \underbrace{(x - y + z)(1, 0, 0)}_{\in U} + \underbrace{(y - z)(1, 1, 0) + z(0, 1, 1)}_{\in W} = (x, y, z).$$

Portanto,  $\mathbb{R}^3 = U + W$

Portanto,  $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ .

### Solução 2

i. Análogo ao item *i.* da solução 1.

ii. Pelo item *i.* temos que a  $\dim(U \cap W) = 0$  e, assim, pelo teorema da dimensão segue que  $\dim(U + W) = \dim U + \dim W = 1 + 2 = 3 \Rightarrow U + W = \mathbb{R}^3$ .

Portanto,  $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ .

11) Sejam  $W_1 = \{(x, y, z, t) : x + y = 0 \text{ e } z - t = 0\}$  e

$$W_2 = \{(x, y, z, t) : x - y - z + t = 0\}$$

(a) Determine  $W_1 \cap W_2$  e exiba uma base.

### Solução

resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} x - y - z + t = 0 \\ x + y = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}$$

que é equivalente a

$$\begin{cases} x - y - z + t = 0 \\ 2y + z - t = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}$$

Que tem posto 3 e nulidade 1. Por tanto, a dimensão de  $W_1 \cap W_2$  é 1, que é o número de variáveis livres no sistema.

Portanto, os elementos de  $W_1 \cap W_2$  são da forma  $(0, 0, z, z) = z(0, 0, 1, 1)$  e, assim,  $\beta = \{(0, 0, 1, 1)\}$  é uma base para  $W_1 \cap W_2$ .

(b) Determine  $W_1 + W_2$ .

### Solução 1

Vamos encontrar as bases de  $W_1$  e  $W_2$ . Os elementos em  $W_1$  são da forma:

$$(x, -x, z, z) = (x, -x, 0, 0) + (0, 0, z, z) = x(1, -1, 0, 0) + z(0, 0, 1, 1).$$

Portanto,  $\beta_1 = \{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$  é uma base de  $W_1$ .

Os elementos em  $W_2$  são da forma:

$$(x, y, z, -x + y + z) = (x, 0, 0, -x) + (0, y, 0, y) + (0, 0, z, z) = x(1, 0, 0, -1) + y(0, 1, 0, 1) + z(0, 0, 1, 1).$$

Portanto,  $\beta_2 = \{(1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1)\}$  é uma base de  $W_2$ .

Sabemos que  $\beta = \beta_1 \cup \beta_2$  gera  $W_1 + W_2$ , isto é,  $[\beta] = W_1 + W_2$ .

Além disso,  $\beta = \{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, 1)\}$  é linearmente independente e, assim, uma base de  $W_1 + W_2$ . Uma vez que  $\beta$  é linearmente independente e a  $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ , segue que  $\beta$  é também uma base de  $\mathbb{R}^4$ , ou seja,  $[\beta] = \mathbb{R}^4$ .

Portanto,  $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$ .

### Solução 2

Pelo item (a) temos que a  $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$  e, assim, pelo teorema da dimensão segue que  $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) = 2 + 3 - 1 = 4 \Rightarrow W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$ .

(c)  $W_1 + W_2$  é soma direta? Justifique.

**Solução**

Não, pois  $W_1 \cap W_2 \neq \{(0, 0, 0)\}$ .

(d)  $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$ ?

**Solução**

Sim, pelo item (b).

12) (a) Dado o subespaço  $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y + z = 0\}$  ache um subespaço  $V_2$  tal que  $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$ .

**Solução**

Os elementos de  $V_1$  são da forma  $(x, y, -x - 2y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -2)$  e, assim,  $V_1 = \{(1, 0, -1), (0, 1, -2)\}$  e  $\beta = \{(1, 0, -1), (0, 1, -2)\}$  é base para  $V_1$ .

Agora tome  $V_2 = \{(1, 0, 0)\}$ , então

i.  $V_1 \cap V_2 = \{(0, 0, 0)\}$ . De fato,

$$a(1, 0, -1) + b(0, 1, -2) - c(1, 0, 0) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow a = b = c = 0.$$

Portanto,  $V_1 \cap V_2 = \{(0, 0, 0)\}$ ,

ii.  $\mathbb{R}^3 = V_1 + V_2$ . De fato,

$$a(1, 0, -1) + b(0, 1, -2) + c(1, 0, 0) = (x, y, z) \Rightarrow a = -2y - z, b = y \text{ e } c = x + 2y + z.$$

Assim,

$$\underbrace{(-2y - z)(1, 0, -1) + y(0, 1, -2)}_{\in V_1} + \underbrace{(x + 2y + z)(1, 0, 0)}_{\in V_2} = (x, y, z).$$

Portanto,  $\mathbb{R}^3 = V_1 + V_2$ .

Portanto,  $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$ .

**Observações**

Na resolução do exercício foi utilizado o teorema da dimensão para calcular a  $\dim V_2$ , ou seja,  $3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2) = 2 + \dim V_2 - 0 \Rightarrow \dim V_2 = 1$ .

Uma vez que a  $\dim V_2 = 1$ , escolhamos uma reta que não está contida no plano  $x + 2y + z = 0$ , isto é,  $V_2 = \{(1, 0, 0)\}$ .

(b) Dê exemplos de dois subespaços de dimensão dois de  $\mathbb{R}^3$  tais que  $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$ . A soma é direta?

**Solução**

Tome  $V_1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$  e  $V_2 = \{(0, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ . Temos que  $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$ . No entanto,  $V_1 + V_2$  não é soma direta, pois de  $\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$ , segue que  $3 = 2 + 2 - \dim(V_1 \cap V_2) \Rightarrow \dim(V_1 \cap V_2) = 1$ .