Álgebra Linear - 2022.3

Lista 1 - Espaços e subespaços Vetoriais

1) Para os conjuntos seguintes, determine se são espaços vetoriais reais, se a adição e multiplicação são as usuais.

Solução

Os exercícios podem ser resolvidos analisando se os conjuntos são fechados para a adição e multiplicação, já que são subconjuntos de um espaço vetorial maior. Não necessário provar os 8 axiomas de espaço vetorial, pois eles são satifeitos no conjunto maior. No caso dos polinômios de grau menor ou igual a n os axiomas são provados de maneira ilustrativa.

(a) O conjunto dos polinômios de grau menor o igual a n (considerando o polinômio nulo, que não tem grau, pertencente a este conjunto).

Solução

Seja $P_n(\mathbb{R})$ o conjunto dos polinômios sobre $\mathbb{R}$ em uma variavel t, ou seja, o conjunto das expressões da forma

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t + ... + a_n t^n = \sum_{j=0}^{n} a_j t^j, a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$$

Sejam $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t + ... + a_n t^n = \sum_{j=0}^{n} a_j t^j$ e $q(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t + ... + b_n t^n = \sum_{j=0}^{n} b_j t^j$ dois polinômios quaisquer em $P_n(\mathbb{R})$. A soma é definida por

$$p(t) + q(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2 + ... + (a_n + b_n)t^n = \sum_{j=0}^{n} (a_j + b_j)t^j.$$

A multiplicação por um escalar α é definida por

$$\alpha p(t) = (\alpha a_0) + (\alpha a_1)t + (\alpha a_2)t^2 + ... + (\alpha a_n)t^n = \sum_{j=0}^{n} (\alpha a_j)t^j.$$

Vamos mostrar que o conjunto $P_n(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Sejam $p(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j t^j$, $q(t) = \sum_{j=0}^{n} b_j t^j$, $r(t) = \sum_{j=0}^{n} c_j t^j$ e α, $\beta \in \mathbb{R}$.

i. $p(t) + q(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j t^j + \sum_{j=0}^{n} b_j t^j = \sum_{j=0}^{n} (a_j + b_j)t^j = \sum_{j=0}^{n} (b_j + a_j)t^j = q(t) + p(t).$

ii. $p(t) + (q(t) + r(t)) = \sum_{j=0}^{n} a_j t^j + \left(\sum_{j=0}^{n} b_j t^j + \sum_{j=0}^{n} c_j t^j \right) = \sum_{j=0}^{n} [a_j + (b_j + c_j)] t^j =$

$= \sum_{j=0}^{n} [(a_j + b_j) + c_j] t^j = \left(\sum_{j=0}^{n} a_j t^j + \sum_{j=0}^{n} b_j t^j \right) + \sum_{j=0}^{n} c_j t^j = (p(t) + q(t)) + r(t).$

iii. Seja $\overline{0}(t)$ o polinômio nulo de $P_n(\mathbb{R})$, então

$p(t) + \overline{0}(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j t^j + \sum_{j=0}^{n} 0 t^j = \sum_{j=0}^{n} (a_j + 0)t^j = \sum_{j=0}^{n} a_j t^j = p(t).$

iv. Defina o polinômio $(-p)(t) = \sum_{j=0}^{n} (-a_j)t^j$, então

$p(t) + (-p(t)) = \sum_{j=0}^{n} a_j t^j + \sum_{j=0}^{n} (-a_j)t^j = \sum_{j=0}^{n} (a_j + (-a_j))t^j = \sum_{j=0}^{n} 0 t^j = \overline{0}(t).$

v. $\alpha(\beta p(t)) = \alpha\left(\sum_{j=0}^{n} \beta a_j t^j\right) = \sum_{j=0}^{n}\left(\alpha\beta a_j t^j\right) = \sum_{j=0}^{n}(\alpha\beta)a_j t^j = (\alpha\beta)p(t)$.

vi. $\alpha(p(t)+q(t)) = \alpha\sum_{j=0}^{n}(a_j+b_j)t^j = \sum_{j=0}^{n}[\alpha(a_j+b_j)]t^j = \sum_{j=0}^{n}(\alpha a_j+\alpha b_j)t^j = \sum_{j=0}^{n}(\alpha a_j)t^j + \sum_{j=0}^{n}(\alpha b_j)t^j = \alpha p(t)+\alpha q(t)$.

vii. $(\alpha+\beta)p(t) = (\alpha+\beta)\sum_{j=0}^{n} a_j t^j = \sum_{j=0}^{n}(\alpha+\beta)a_j t^j = \sum_{j=0}^{n}(\alpha a_j+\beta a_j)t^j = \sum_{j=0}^{n}(\alpha a_j)t^j + \sum_{j=0}^{n}(\beta a_j)t^j = \alpha p(t)+\beta p(t)$.

viii. $1p(t) = \sum_{j=0}^{n}(1a_j)t^j = \sum_{j=0}^{n} a_j t^j = p(t)$.

(b) O conjunto de todas as funções reais tais que $f(0) = f(1)$.

Solução

O conjunto V das funções reais tais que $f(0) = f(1)$ é fechado em relação a adição e a multiplicação por escalar. De fato, sejam $f,\ g \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

i. $(f+g)(0) = f(0)+g(0) = f(1)+g(1) = (f+g)(1)$.
ii. $(\alpha f)(0) = \alpha f(0) = \alpha f(1) = (\alpha f)(1)$.

Os 8 axiomas de espaço vetorial são satisfeitos, pois V é um subconjunto das funções reais.

(c) O conjunto das funções tais que $f(0) = 1 + f(1)$.

Solução

O conjunto V das funções reais tais que $f(0) = 1 + f(1)$ não é fechado nem relação a adição nem em relação a multiplicação por escalar.

De fato, sejam $f,\ g \in V$ e $\alpha \neq 1$ em $\mathbb{R}$, então

i. $(f+g)(0) = f(0)+g(0) = 1+f(1)+1+g(1) = 2+(f+g)(1) \neq 1+(f+g)(1)$.
ii. $(\alpha f)(0) = \alpha f(0) = \alpha(1+f(1)) = \alpha+\alpha f(1) \neq 1+\alpha f(1) = 1+(\alpha f)(1)$.

(d) O conjunto das funções reais crescentes.

Solução

O conjunto V das funções reias crescentes não é fechado em relação a multiplicação por escalar.

De fato, considere em V a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t) = t$. Agora tome o escalar -1 e, assim, $(-1)f(t) = -t$ que é decrescente.

(e) O conjunto das funções reais pares.

Solução

O conjunto V das funções reais pares tais que $f(-t) = f(t)$ é fechado em relação a adição e a multiplicação por escalar.

De fato, sejam $f,\ g \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

i. $(f+g)(-t) = f(-t)+g(-t) = f(t)+g(t) = (f+g)(t) \Longrightarrow f+g \in V$.
ii. $(\alpha f)(-t) = \alpha f(-t) = \alpha f(t) = (\alpha f)(t) \Longrightarrow \alpha f \in V$.

Os 8 axiomas de espaço vetorial são satisfeitos, pois V é um subconjunto das funções reais.

(f) O conjunto das funções contínuas em $[0,1]$ tais que $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Solução

O conjunto V das funções contínuas em $[0,1]$ tais que $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 0$ é fechado em relação a adição e a multiplicação por escalar.

De fato, sejam $f,\ g \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

i. $\displaystyle\int_0^1 (f+g)(x)dx = \int_0^1 [f(x)+g(x)]dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)dx = 0+0 = 0 \Longrightarrow f+g \in V$.
ii. $\displaystyle\int_0^1 (\alpha f)(x)dx = \int_0^1 \alpha f(x)dx = \alpha\int_0^1 f(x)dx = \alpha 0 = 0 \Longrightarrow \alpha f \in V$.

Os 8 axiomas de espaço vetorial são satisfeitos, pois V é um subconjunto das funções reais integráveis.

(g) O conjunto das funções contínuas em $[0, 1]$ tais que $\int_0^1 f(x)dx \geq 0$.

Solução

O conjunto V das funções contínuas em $[0, 1]$ tais que $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx \geq 0$ não é fechado em relação a multiplicação por escalar.

De fato, sejam $f \in V$, $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx > 0$ e $\alpha = -1 \in \mathbb{R}$, então

$$\int_0^1 (\alpha f)(x)dx = \int_0^1 (-1)f(x)dx = (-1)\left(\int_0^1 f(x)dx\right) < 0 \Longrightarrow \alpha f \notin V.$$

(h) O conjunto dos vetores (x, y, z) que satisfaz a equação linear $ax + by + cz = 0$.

Solução

O conjunto V dos vetores (x, y, z) que satisfaz a equação linear $ax + by + cz = 0$ é fechado em relação a adição e a multiplicação por escalar.

De fato, sejam $u = (x_1, y_1, z_1)$, $v = (x_2, y_2, z_2)$ em V e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

i. $u + v = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ e $a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) + c(z_1 + z_2) = ax_1 + ax_2 + by_1 + by_2 + cz_1 + cz_2 = (ax_1 + by_1 + cz_1) + (ax_2 + by_2 + cz_2) = 0 + 0 = 0$.

ii. $\alpha u = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$ e $a(\alpha x_1) + b(\alpha y_1) + c(\alpha z_1) = \alpha(ax_1 + by_1 + cz_1) = \alpha 0 = 0$.

Os 8 axiomas de espaço vetorial são satisfeitos, pois V é um subconjunto de $\mathbb{R}^3$.

(i) O conjunto das matrizes 3×3 triangulares estritamente superiores, i.e., o conjunto das matrizes da forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solução

O conjunto V das matrizes 3×3 triangulares estritamente superiores é fechado em relação a adição e a multiplicação por escalar.

De fato, sejam $A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ em V e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

i. $A + B = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a+d & b+e \\ 0 & 0 & c+f \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in V$.

ii. $\alpha A = \alpha \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha a & \alpha b \\ 0 & 0 & \alpha c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in V$.

Os 8 axiomas de espaço vetorial são satisfeitos, pois V é um subconjunto das matrizes reais 3×3.

2) Mostre que os seguintes conjuntos não são espaços vetoriais.

(a) O intervalo $[0, 1]$ da reta real.

Solução

O intervalo $[0, 1]$ da reta real não é fechado em relação a adição e a multiplicação por escalar.

De fato, sejam $u = v = 1$ em $[0, 1]$ e $\alpha = 3 \in \mathbb{R}$, então

i. $u + v = 1 + 1 = 2 \notin [0, 1]$.

ii. $\alpha u = 3 \times 1 = 3 \notin [0, 1]$.

(b) O conjunto $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\right\}$. Que objeto geométrico é esse?

Solução

O conjunto $V = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\right\}$ não fechado em relação a adição e a multiplicação por escalar.

De fato, sejam $u = v = (1, 1)$ em V e $\alpha = 3 \in \mathbb{R}$, então

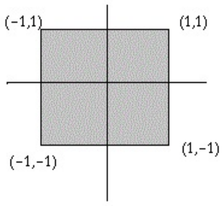


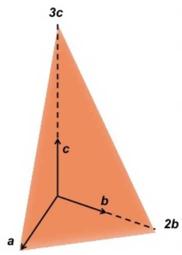
Figura 1: Objeto geométrico que descreve o conjunto V.

i. $u+v=(1,1)+(1,1)=(1+1,1+1)=(2,2)$ e $|2|=2>1 \Rightarrow u+v \notin V$.
ii. $\alpha u = 3(1,1)=(3\times 1, 3\times 1)=(3,3)$ e $|3|=3>1 \Rightarrow \alpha u \notin V$.

(c) O conjunto dos vetores (x,y,z) que satisfaz a equação linear $ax+by+cz=d, d\neq 0$. Que objeto geométrico é esse? Qual é a diferença com a questão 1. (h)?

Solução

O conjunto dos vetores (x, y, z) que satisfaz a equação linear $ax+by+cz=d\neq 0$ não é um espaço vetorial, pois o elemento neutro $(0,0,0)$ não satizfaz a equação $ax+by+cz=d\neq 0$, ou seja, $a\times 0+b\times 0+c\times 0=0\neq d$.
A equação $ax+by+cz=d\neq 0$ descreve os planos que não passam pela origem. Um exemplo deste objeto geométrico está representado na figura abaixo.



Note que no exercício 1 item h, a equação descreve os planos que passam pela origem.

(d) O conjunto do plano $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x,y)=(t,t^2), t\in\mathbb{R}\}$.

Solução

O conjunto $V=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x,y)=(t,t^2), t\in\mathbb{R}\}$ não é fechado em relação a adição e a multiplicação por escalar.
De fato, sejam $u=(x_1,y_1)$ e $v=(x_2,y_2)$ em V tais que $(x_1,y_1)=(t_1,t_1^2)$, $(x_2,y_2)=(t_2,t_2^2)$, $t_1,t_2\in\mathbb{R}$ e $\alpha\neq 1$ em $\mathbb{R}$, então

i. $u+v=(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2)=(t_1+t_2,t_1^2+t_2^2)\neq(t_1+t_2,(t_1+t_2)^2)$ em geral. Como exemplo, tome $u=v=(1,1)\Rightarrow t_1=t_2=1$, então
$u+v=(1,1)+(1,1)=(1+1,1+1)=(1+1,1^2+1^2)=(2,2)\neq(2,2^2)=(2,4)$.
ii. $\alpha u=\alpha(x_1,y_1)=\alpha(t_1,t_1^2)=(\alpha t_1,\alpha t_1^2)\neq(\alpha t_1,\alpha^2 t_1^2)=(\alpha t_1,(\alpha t_1)^2)$ pois $\alpha\neq 1$.

3) Seja V o conjunto de todos os pares ordenados (x_1,x_2) de números reais. Determine se V é um espaço vetorial se a soma ("+") e o produto escalar são **definidos** das formas abaixo. (Desconsidere a soma e multiplicação por escalar usuais.)

(a) $(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1,x_2+y_2), a(x_1,x_2)=(ax_1,ax_2)$.

Solução

V não é um espaço vetorial, pois a comutatividade falha. De fato, sejam $u=(x_1,x_2)$ e $v=(y_1,y_2)$ em V, então
$u+v=(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1,x_2+y_2)$. Por outro lado,
$v+u=(y_1,y_2)+(x_1,x_2)=(y_1,y_2+x_2)$.
Em geral, $u+v\neq v+u$, por exemplo, tome $u=(1,2)$, $v=(2,1)$ e, assim,
$u+v=(1,2)+(2,1)=(1,2+1)=(1,3)$.
Por outro lado,
$v+u=(2,1)+(1,2)=(2,1+2)=(2,3)$.
Logo, $u+v\neq v+u$.

(b) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2), a(x_1, x_2) = (ax_1, 0)$.

Solução

V não é espaço vetorial, pois falha a multiplicação pelo elemento identidade 1 de $\mathbb{R}$. De fato, seja $u = (x_1, x_2)$ em V, $x_2 \neq 0$ e $\alpha = 1 \in \mathbb{R}$, então

$1u = 1(x_1, x_2) = (1x_1, 0) = (x_1, 0) \neq (x_1, x_2) = u$.

(c) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2), a(x_1, x_2) = (ax_1, ax_2)$.

Solução

V não é espaço vetorial, pois a distributividade falha. De fato, sejam $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ em V e $\alpha \neq 1$ em $\mathbb{R}$, então

$\alpha(u + v) = \alpha[(x_1, x_2) + (y_1, y_2)] = \alpha(x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2) = (\alpha x_1 + \alpha y_1 + \alpha, \alpha x_2 + \alpha y_2)$. Por outro lado,

$\alpha u + \alpha v = \alpha(x_1, x_2) + \alpha(y_1, y_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\alpha y_1, \alpha y_2) = (\alpha x_1 + \alpha y_1 + 1, \alpha x_2 + \alpha y_2)$.

(d) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (|x_1 + y_1|, |x_2 + y_2|), a(x_1, x_2) = (ax_1, ax_2)$.

Solução

V não é um espaço vetorial, pois a associatividade falha. De fato, sejam $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2)$ e $w = (z_1, z_2)$ em V, então

$(u + v) + w = [(x_1, x_2) + (y_1, y_2)] + (z_1, z_2) = (|x_1 + y_1|, |x_2 + y_2|) + (z_1, z_2) = (||x_1 + y_1| + z_1|, ||x_2 + y_2| + z_2|)$.

Por outro lado,

$u + (v + w) = (x_1, x_2) + [(y_1, y_2) + (z_1, z_2)] = (x_1, x_2) + (|y_1 + z_1|, |y_2 + z_2|) = (|x_1 + |y_1 + z_1||, |x_2 + |y_2 + z_2||)$.

Em geral, $(u + v) + w \neq u + (v + w)$. Por exemplo, sejam $u = (1, 0)$, $v = (-1, 0)$ e $w = (0, -1)$, então

$(u + v) + w = (||x_1 + y_1| + z_1|, ||x_2 + y_2| + z_2|) = (||1 - 1| + 0|, ||0 + 0| - 1|) = (0, 1)$.

Por outro lado,

$u + (v + w) = (|x_1 + |y_1 + z_1||, |x_2 + |y_2 + z_2||) = (|1 + |-1 + 0||, |0 + |0 - 1||) = (2, 1)$.

Portanto, $(u + v) + w \neq u + (v + w)$.

(e) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2), a(x_1, x_2) = (ax_1, ax_2)$.

Solução

V não é espaço vetorial, pois a distributividade falha. De fato, sejam $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ em V e $\alpha \neq 1$ em $\mathbb{R}$, então

$\alpha(u + v) = \alpha[(x_1, x_2) + (y_1, y_2)] = \alpha(x_1 y_1, x_2 y_2) = (\alpha x_1 y_1, \alpha x_2 y_2)$.

Por outro lado,

$\alpha u + \alpha v = \alpha(x_1, x_2) + \alpha(y_1, y_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\alpha y_1, \alpha y_2) = (\alpha^2 x_1 y_1, \alpha^2 y_1 y_2)$.

Portanto, $\alpha(u + v) \neq \alpha u + \alpha v$.

4) Dados os espaços vetorias V_1, V_2 considere o conjunto $V = V_1 \times V_2$ (produto cartesiano de V_1 por V_2), cujos elementos são os pares ordenados$v = (v_1, v_2)$, com $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$. Defina operações que tornem V um espaço vetorial. Verifique a validade de cada um dos axiomas.

Solução

Sejam $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$ em V. A soma é definida por

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2).$$

A multiplicação por um escalar α é definida por

$$\alpha u = \alpha(u_1, u_2) = (\alpha u_1, \alpha u_2).$$

Vamos mostrar que o conjunto V é um espaço vetorial com as operações acima definidas.

Sejam $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$, $w = (w_1, w_2)$ em V e α, $\beta \in \mathbb{R}$, então

i. $u + v = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2) = \underbrace{(v_1 + u_1, v_2 + u_2)}_{\text{comutativa em} V_1 \text{ e } V_2} = (v_1, v_2) + (u_1, u_2) = v + u$.

ii. $(u + v) + w = [(u_1, v_2) + (v_1, v_2)] + (w_1, w_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2) + (w_1, w_2) = ((u_1 + v_1) + w_1, (u_2 + v_2) + w_2) = \underbrace{(u_1 + (v_1 + w_1), u_2 + (v_2 + w_2))}_{\text{associativa em} V_1 \text{ e } V_2} = (u_1, u_2) + (v_1 + w_1, v_2 + w_2) = u + (v + w)$.

iii. $\overline{0} = (\overline{0}_1, \overline{0}_2)$ é o elemento nulo de V, em que $\overline{0}_i$ são elementos nulos de V_i,$i = 1, 2$. De fato, $u + \overline{0} = (u_1, u_2) + (\overline{0}_1, \overline{0}_2) = (u_1 + \overline{0}_1, u_2 + \overline{0}_2) = (u_1, u_2) = u$.

iv. $-u = (-u_1, -u_2)$ é o inverso de V. De fato, $u + (-u) = (u_1, u_2) + (-u_1, -u_2) = \underbrace{(u_1 - u_1, u_2 - u_2)}_{\text{inverso em} V_1 \text{ e } V_2} = (\overline{0}_1, \overline{0}_2) = \overline{0}$.

v. $\alpha(\beta u) = \alpha[\beta(u_1, u_2)] = \alpha(\beta u_1, \beta u_2) = (\alpha(\beta u_1), \alpha(\beta u_2)) = ((\alpha\beta)u_1, (\alpha\beta)u_2) = (\alpha\beta)u$.

vi. $\alpha(u + v) = \alpha[(u_1, u_2) + (v_1, v_2)] = \alpha(u_1 + v_1, u_2 + v_2) = (\alpha(u_1 + v_1), \alpha(u_2 + v_2)) = (\alpha u_1 + \alpha v_1, \alpha u_2 + \alpha v_2) = (\alpha u_1, \alpha u_2) + (\alpha v_1, \alpha v_2) = \alpha(u_1, u_2) + \alpha(v_1, v_2) = \alpha u + \alpha v$.

vii. $(\alpha + \beta)u = (\alpha + \beta)(u_1, u_2) = ((\alpha + \beta)u_1, (\alpha + \beta)u_2) = (\alpha u_1 + \beta u_1, \alpha u_2 + \beta u_2) = (\alpha u_1, \alpha u_2) + (\beta u_1, \beta u_2) = \alpha(u_1, u_2) + \beta(u_1, u_2) = \alpha u + \beta u$.

viii. $1u = 1(u_1, u_2) = (1u_1, 1u_2) = (u_1, u_2) = u$.

Portanto, V é um espaço vetorial.

5) Sejam V um espaço vetorial, $\mathbf{v} \in V$ um elemento qualquer de V e $\alpha \in \mathbb{R}$ um número real. Use os axiomas de espaço vetorial para provar que:

a) $\mathbf{v} + \mathbf{v} + \mathbf{v} = 3\mathbf{v}$;

b) $0.\mathbf{v} = \mathbf{0}$;

c) $\alpha.\mathbf{0} = \mathbf{0}$;

d) se $\alpha.\mathbf{v} = \mathbf{0}$, então $\alpha = 0$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Solução

d) Comece com a hipótese $\alpha\mathbf{v} = 0$ e separe em dois casos ($\alpha = 0$ e $\alpha \neq 0$).

6) Defina a média $\mathbf{u}\star\mathbf{v}$ entre dois vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ no espaço vetorial V pondo $\mathbf{u}\star\mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{u}+\frac{1}{2}\mathbf{v}$. Prove que $(\mathbf{u}\star\mathbf{v})\star\mathbf{w} = \mathbf{u}\star(\mathbf{v}\star\mathbf{w})$ se e somente se $\mathbf{u} = \mathbf{w}$.

Solução

Provar usando a definição de média dada. Este operção não satifaz o axioma associativo. Não se esqueça que é preciso provar a "ida" e a "volta" (por causa do "se e somente se").

7) Seja V um espaço vetorial real. Verifique que V e $\{0\}$ são subespaços de V

Solução

V é um subespaço vetorial de V. De fato, sejam u, v em V e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

i. $0 \in V$, pois V é espaço vetorial.

ii. $u + v \in V$, pois V é espaço vetorial.

iii. $\alpha u \in V$, pois V é espaço vetorial.

Portanto, V é subespaço vetorial de V.

$\{0\}$ também é subespaço de V. De fato:

i. $0 \in \{0\}$.

ii. $0 + 0 = 0 \in \{0\}$.

iii. $\alpha 0 = 0 \in \{0\}$.

Portanto, $\{0\}$ é subespaço vetorial de V.

8) Quais dos seguintes subconjuntos são subespaços vetoriais?

(a) O conjunto $X \subset \mathbb{R}^3$ formado pelos vetores $v = (x, y, z)$ tais que $z = 3x$ e $x = 2y$.

Solução

Os elementos do conjunto X são os vetores $v = (2y, y, 6y)$, $y \in \mathbb{R}$. X é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$. De fato, sejam $u = (2y_1, y_1, 6y_1)$, $v = (2y_2, y_2, 6y_2)$ em X e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

i. $(0,0,0) \in X$, basta tomar $y = 0$.
ii. $u + v = (2y_1, y_1, 6y_1) + (2y_2, y_2, 6y_2) = (2y_1 + 2y_2, y_1 + y_2, 6y_1 + 6y_2) =$
$= (2(y_1 + y_2), y_1 + y_2, 6(y_1 + y_2)) \in X$.
iii. $\alpha u = \alpha(2y_1, y_1, 6y_1) = (\alpha 2y_1, \alpha y_1, \alpha 6y_1) = (2(\alpha y_1), \alpha y_1, 6(\alpha y_1)) \in X$.

Portanto, X é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

(b) O conjunto $Y \subset \mathbb{R}^3$ formado pelos vetores $v = (x, y, z)$ tais que $xy = 0$.

Solução

Y não é um espaço vetorial, pois não é fechado em relação a soma. De fato, sejam $u = (x_1, y_1, z_1)$, $v = (x_2, y_2, z_2)$ em Y tais que $x_1y_1 = 0$ e $x_2y_2 = 0$, então

$u + v = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ e $(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 = x_1y_2 + x_2y_1 \neq 0$ em geral.

Como exemplo, tome $x_2 = y_1 = 1$, $x_1 = y_2 = 0$ e, assim, sejam $u = (0, 1, 0)$, $v = (1, 0, 0)$ em Y, então

$u + v = (0, 1, 0) + (1, 0, 0) = (1, 1, 0)$ e $1 \times 1 = 1 \neq 0 \Longrightarrow u + v \notin Y$.

Portanto, Y não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

O conjunto Y é união de duas retas (x, y, z) tais que $x = 0 \cup y = 0$. A união não necessariamente é subespaço.

(c) O conjunto $\mathbb{F} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ formado pelas funções f tais que $f(x + 1) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução

$\mathbb{F}$ é um subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. De fato, sejam $f, g \in \mathbb{F}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

i. A função nula $0(x)$ de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ está em $\mathbb{F}$, pois $0(x + 1) = 0(x)$.
ii. $(f + g)(x + 1) = f(x + 1) + g(x + 1) = f(x) + g(x) = (f + g)(x) \Rightarrow f + g \in \mathbb{F}$.
iii. $(\alpha f)(x + 1) = \alpha f(x + 1) = \alpha f(x) = (\alpha f)(x) \Rightarrow \alpha f \in \mathbb{F}$.

Portanto, $\mathbb{F}$ é subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

é o subespaço das funções periódicas, de período 1.

(d) O conjunto dos vetores $v \in \mathbb{R}^5$ que tem duas ou mais coordenadas nulas.

Solução

O conjunto X dos vetores $v \in \mathbb{R}^5$ que tem duas ou mais coordenadas nulas não é um subespaço vetoial. De fato, sejam $u = (a_1, a_2, 0, 0, 0)$, $v = (0, 0, a_3, a_4, a_5)$ em X, $a_i \neq 0$, $i = 1, ..., 5$, então

$u + v = (a_1, a_2, 0, 0, 0) + (0, 0, a_3, a_4, a_5) = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \notin X$.

Portanto, X não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^5$.

Este conjunto também pode ser pensado como união de subespaços, e por tanto, não necessariamente subespaço.

(e) O conjunto dos vetores $v \in \mathbb{R}^3$ que tem pelo menos uma coordenada ≥ 0.

Solução

O conjunto V dos vetores $v \in \mathbb{R}^3$ que tem pelo menos uma coordenada ≥ 0 não é subespaço vetoial de $\mathbb{R}^3$. De fato, sejam $v = (1, 1, 1)$ em V e $\alpha = -1 \in \mathbb{R}$, então

$\alpha v = (-1)(1, 1, 1) = (-1, -1, -1) \notin V$.

Portanto, V não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

(f) O conjunto dos vetores $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $x^3 + 3x = y^2 + 3y$.

Solução

O conjunto V dos vetores $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $x^3 + 3x = y^2 + 3y$ não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.De fato, sejam $u = v = (1, 1)$ em V, então

$u + v = (1, 1) + (1, 1) = (2, 2)$ e $2^3 + 3.2 \neq 2^2 + 3.2 \Rightarrow u + v \notin V$.

Portanto, V não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

9) Quais dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$?

(a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$.

Solução

O subconjunto $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$ é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$. De fato, sejam $u = (0, y_1, z_1)$, $v = (0, y_2, z_2)$ em V e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

i. $(0, 0, 0) \in V$

ii. $u + v = (0, y_1, z_1) + (0, y_2, z_2) = (0, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in V$.
iii. $\alpha u = \alpha(0, y_1, z_1) = (0, \alpha y_1, \alpha z_1) \in V$.

Portanto, V é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

(b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$.

Solução

O subconjunto $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$ é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$. De fato, sejam $u = (x_1, y_1, z_1)$, $v = (x_2, y_2, z_2)$ em V, com $x_1 = y_1 = z_1$, $x_2 = y_2 = z_2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

i. $(0, 0, 0) \in V$
ii. $u + v = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in V$. E temos que $x_1 + x_2 = y_1 + y_2 = z_1 + z_2$ somando as igualdades acima.
iii. $\alpha u = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$. E temos que $\alpha x_1 = \alpha y_1 = \alpha z_1$

Portanto, V é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

(c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\}$.

Solução

O subconjunto $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\}$ é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$. De fato, sejam $u = (x_1, y_1, z_1)$, $v = (x_2, y_2, z_2)$ em V, tais que $x_1 + y_1 = 0$, $x_2 + y_2 = 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

i. $(0, 0, 0) \in V$
ii. $u + v = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ e $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow u + v \in V$.
iii. $\alpha u = \alpha(x_1, y_1, z_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$ e $\alpha x_1 + \alpha y_1 = \alpha(x_1 + y_1) = \alpha 0 = 0 \Rightarrow \alpha u \in V$.

Portanto, V é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

(d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0\}$

Solução

O subconjunto $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0\}$ não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$. De fato, sejam $u = (0, 1, 0)$ em V e $\alpha = -1 \in \mathbb{R}$, então

$\alpha u = (-1)(0, 1, 0) = (0, -1, 0) \notin V$.

Portanto, V não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

10) Seja V um espaço vetoriais real. Sejam W_1 e W_2 dois subespaços vetoriais de V. Mostre que $W_1 \cap W_2$ é, ainda, um subespaço vetorial de V.

Prova

Sejam u, $v \in W_1 \cap W_2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

i. $0 \in W_1 \cap W_2$.
ii. u, $v \in W_1$ e $u + v \in W_1$, pois W_1 é subespaço vetorial de V. Também,
u, $v \in W_2$ e $u + v \in W_2$, pois W_2 é subespaço vetorial de V.
Logo, $u + v \in W_1 \cap W_2$.
iii. $u \in W_1$ e $\alpha u \in W_1$, pois W_1 é subespaço vetorial de V. Também,
$u \in W_2$ e $\alpha u \in W_2$, pois W_2 é subespaço vetorial de V.
Logo, $\alpha u \in W_1 \cap W_2$.

Portanto, $W_1 \cap W_2$ é subespaço vetorial de V.

11) Seja S o conjunto das funções y satisfazendo a equação

$$2\frac{dy}{dx} + 3y = 0$$

(a) Mostre que o conjunto S é não vazio.

Solução

O conjunto S é não vazio, pois a função nula $y \equiv 0$ pertence a S.

(b) Mostre que S é um subespaço do espaço vetorial $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Solução

sejam y_1, y_2 em S e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

i. $y \equiv 0 \in S$.

ii. $2\dfrac{d(y_1+y_2)}{dx} + 3(y_1+y_2) = 2\dfrac{d(y_1)}{dx} + 2\dfrac{d(y_1)}{dx} + 3y_1 + 3y_2 = (2\dfrac{d(y_1)}{dx} + 3y_1) + (2\dfrac{d(y_2)}{dx} + 3y_2) = 0+0 = 0 \Rightarrow y_1+y_2 \in S$.

iii. $2\dfrac{d(\alpha y_1)}{dx} + 3y_1 = \alpha(2\dfrac{d(y_1)}{dx} + 3y_1) = \alpha 0 = 0 \Rightarrow \alpha y_1 \in S$.

Portanto, S é um subespaço vetorial de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.