

Álgebra Linear - 2022.3

Lista 3 - Sistemas lineares

1) Descreva todas as possíveis matrizes 2×2 , que estão na forma escada reduzida por linha.

Solução

De acordo com a definição de uma matriz na forma escada reduzida por linhas as possibilidades são:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, k \in \mathbb{R}.$$

2) Reduza as matrizes abaixo à forma escada reduzida por linha e calcule posto e nulidade de cada uma delas:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$

Solução

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} L_2 - 2L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 - 3L_1 \rightarrow L_3 \end{smallmatrix}]{L_2 - 2L_1 \rightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 7 & -7 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} \frac{1}{3}L_2 \rightarrow L_2 \\ \frac{1}{7}L_3 \rightarrow L_3 \end{smallmatrix}]{\frac{1}{3}L_2 \rightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{6}{7} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\begin{smallmatrix} L_1 + 2L_2 \rightarrow L_1 \\ L_3 - L_2 \rightarrow L_3 \end{smallmatrix}]{L_1 + 2L_2 \rightarrow L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{17}{21} \end{bmatrix} \xrightarrow{3L_3 \rightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{17}{7} \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} L_2 + \frac{4}{3}L_3 \rightarrow L_2 \\ L_1 - \frac{1}{3}L_3 \rightarrow L_1 \end{smallmatrix}]{L_2 + \frac{4}{3}L_3 \rightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{22}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{17}{7} \end{bmatrix}.$$

Portanto, a matriz A tem posto 3 e nulidade 1.

b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix};$

Solução

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}L_1 \rightarrow L_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 - 2L_1 \rightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} L_1 - \frac{1}{2}L_2 \rightarrow L_1 \\ L_3 - 2L_2 \rightarrow L_3 \end{smallmatrix}]{L_1 - \frac{1}{2}L_2 \rightarrow L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a matriz B tem posto 2 e nulidade 2.

c) $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$

Solução

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} L_3 - 3L_1 \rightarrow L_3 \\ L_4 - 2L_1 \rightarrow L_4 \end{smallmatrix}]{L_3 - 3L_1 \rightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & -7 \\ 0 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}L_2 \rightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -7 \\ 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 - L_2 \rightarrow L_1 \\ L_3 + 7L_2 \rightarrow L_3 \\ L_4 + 5L_2 \rightarrow L_4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a matriz C tem posto 2 e nulidade 1.

3) Prove que toda matriz anti-simétrica 3×3 não-nula tem posto igual a dois.

Solução

Uma matriz A é antissimétrica se $A^T = -A$. Assim,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ e } A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{bmatrix} = -A.$$

De $A^T = -A$, temos

$a_{11} = -a_{11} \Rightarrow a_{11} = 0$, $a_{21} = -a_{12}$, $a_{31} = -a_{13}$, $a_{12} = -a_{21}$, $a_{22} = -a_{22} \Rightarrow a_{22} = 0$, $a_{32} = -a_{23}$, $a_{13} = -a_{31}$, $a_{23} = -a_{32}$ e $a_{33} = -a_{33} \Rightarrow a_{33} = 0$. Em vista disso,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{bmatrix}.$$

Vamos encontrar a forma escalonada da matriz A . Assumimos inicialmente que $a_{12} \neq 0$, então

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} -a_{12} & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{a_{12}}L_1 \rightarrow L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{12}} \\ 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{bmatrix} \\ \xrightarrow{L_3 + a_{13}L_1 \rightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{12}} \\ 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & -a_{23} & -\frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}} \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{a_{12}}L_2 \rightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{12}} \\ 0 & 1 & \frac{a_{13}}{a_{12}} \\ 0 & -a_{23} & -\frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 + a_{23}L_2 \rightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{12}} \\ 0 & 1 & \frac{a_{13}}{a_{12}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, para o caso em que $a_{12} \neq 0$, o posto da matriz A é 2 e nulidade é 1.

Agora consideremos o caso em que $a_{12} = 0$ e $a_{13} \neq 0$. Assim,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} -a_{13} & -a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{13} \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{a_{13}}L_1 \rightarrow L_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{23}}{a_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{13} \end{bmatrix} \\ \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{23}}{a_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{a_{13}}L_2 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{23}}{a_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_{23} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 - a_{23}L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{23}}{a_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, para o caso em que $a_{12} = 0$ e $a_{13} \neq 0$, a matriz A tem posto 2 e nulidade 1.

Consideremos agora o caso em que $a_{12} = 0$, $a_{13} = 0$ e $a_{23} \neq 0$. Logo,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & -a_{23} & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 0 & -a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-\frac{1}{a_{23}}L_1 \rightarrow L_1 \\ \frac{1}{a_{23}}L_2 \rightarrow L_2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, para o caso em que $a_{12} = 0$ e $a_{13} = 0$ a matriz A tem posto 2 e nulidade é 1.

Por conseguinte, devido aos casos analisados, a matriz antissimétrica 3×3 não nula tem posto 2 e nulidade 1.

4) Resolver os sistemas por escalonamento. Para sistemas com solução indeterminada, obter a resposta em forma paramétrica.

$$(a) \begin{cases} x + 5y = 13 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases}$$

Solução

Vamos transformar a matriz ampliada do sistema em uma matriz na forma escalonada.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & \vdots & 13 \\ 4 & 3 & \vdots & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{L_2 - 4L_1 \rightarrow L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & \vdots & 13 \\ 0 & -17 & \vdots & -51 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{17}L_2 \rightarrow L_2} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & \vdots & 13 \\ 0 & 1 & \vdots & 3 \end{array} \right] &\xrightarrow{L_1 - 5L_2 \rightarrow L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \vdots & -2 \\ 0 & 1 & \vdots & 3 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Portanto, a solução do sistema é $x = -2$ e $y = 3$.

Posto da Matriz dos Coeficientes = Posto da Matriz Ampliada = 2 = Número de incógnitas. Portanto, temos solução única.

$$(b) \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 5x - 3y + z = -10 \\ -2x - y + z = 1 \end{cases}$$

Solução

Vamos transformar a matriz ampliada do sistema em uma matriz na forma escalonada.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & \vdots & 0 \\ 5 & -3 & 1 & \vdots & -10 \\ -2 & -1 & 1 & \vdots & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{\substack{L_2 - 5L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 + 2L_1 \rightarrow L_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & \vdots & 0 \\ 0 & -13 & 16 & \vdots & -10 \\ 0 & 3 & -5 & \vdots & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{13}L_2 \rightarrow L_2} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{16}{13} & \vdots & \frac{10}{13} \\ 0 & 3 & -5 & \vdots & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{L_3 - 3L_2 \rightarrow L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{16}{13} & \vdots & \frac{10}{13} \\ 0 & 0 & -\frac{17}{13} & \vdots & -\frac{17}{13} \end{array} \right] (*). \end{aligned}$$

Logo, da linha 1 de (*), $-\frac{17}{13}z = -\frac{17}{13} \Rightarrow z = 1$. Da linha 2 de (*), $y - \frac{16}{13} \cdot 1 = \frac{10}{13} \Rightarrow y = 2$. Da linha 1 de (*), $x + 2y - 3z = 0 \Rightarrow x + 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 0 \Rightarrow x = -1$.

Portanto, $x = -1$, $y = 2$ e $z = 1$.

Posto da Matriz dos Coeficientes = Posto da Matriz Ampliada = 3 = Número de incógnitas. Portanto, temos solução única.

$$(c) \begin{cases} x + y + 2z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 3y - z = 3 \end{cases}$$

Solução

Vamos transformar a matriz ampliada do sistema em uma matriz na forma escalonada. Assim,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 6 \\ 2 & -1 & 1 & \vdots & 3 \\ 1 & 3 & -1 & \vdots & 3 \end{bmatrix} &\xrightarrow{\substack{L_2-2L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3-L_1 \rightarrow L_3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 6 \\ 0 & -3 & -3 & \vdots & -9 \\ 0 & 2 & -3 & \vdots & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{3}L_2 \rightarrow L_2} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 6 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 2 & -3 & \vdots & -3 \end{bmatrix} &\xrightarrow{L_3-2L_2 \rightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 6 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & -5 & \vdots & -9 \end{bmatrix} (I). \end{aligned}$$

Da linha 3 de (I), temos que $-5z = -9 \Rightarrow z = \frac{9}{5}$. Da linha 2 de (I), $y + z = 3 \Leftrightarrow y = 3 - z \Rightarrow y = 3 - \frac{9}{5} = \frac{6}{5}$. Da linha 1 de (I), $x + y + 2z = 6 \Leftrightarrow x = -y - 2z + 6 \Rightarrow x = -\frac{6}{5} - 2 \cdot \frac{9}{5} + 6 = \frac{6}{5}$.

Portanto, $x = \frac{6}{5}$, $y = \frac{6}{5}$ e $z = \frac{9}{5}$.

Posto da Matriz dos Coeficientes = Posto da Matriz Ampliada = 3 = Número de incógnitas. Portanto, temos solução única.

$$(d) \begin{cases} x - y + 2z - t = 0 \\ 3x + y + 3z + t = 0 \\ x - y - z - 5t = 0 \end{cases}$$

Solução

Transformando a matriz ampliada do sistema em uma matriz na forma escalonada.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & \vdots & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -5 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2-3L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3-L_1 \rightarrow L_3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 4 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Posto da Matriz dos Coeficientes = Posto da Matriz Ampliada = 3 < 4 = Número de incógnitas. Portanto, temos um sistema compatível Indeterminado.

O sistema equivalente é:

$$\begin{cases} x - y + 2z - t = 0 \\ 4y - 3z + 4t = 0 \\ -3z - 4t = 0 \end{cases}.$$

A Nulidade = Número de incógnitas - Posto da Matriz dos coeficientes = 4 - 3 = 1. Temos então uma variável livre que escolhemos $t \in \mathbb{R}$.

Da última equação $z = -\frac{4}{3}t$, substituindo na segunda equação obtemos $y = -2t$. Da primeira equação $x - y + 2z - t = 0 \Leftrightarrow x + 2t + 2(-\frac{4}{3}t) - t = 0 \Leftrightarrow x - \frac{5}{3}t = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3}t$.

Portanto, $x = \frac{5}{3}t$, $y = -2t$ e $z = -\frac{4}{3}t$, $t \in \mathbb{R}$.

Resposta: $(x, y, z, t) = t(\frac{5}{3}, -2, -\frac{4}{3}, 1)$. Dimensão 1.

$$(e) \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 3 \\ x + 7y - 7z = 5 \end{cases}$$

Solução

Vamos transformar a matriz ampliada do sistema na forma escalonada.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 2 & 5 & -2 & \vdots & 3 \\ 1 & 7 & -7 & \vdots & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2-2L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3-L_1 \rightarrow L_3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 3 & -4 & \vdots & -5 \\ 0 & 6 & -8 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3-2L_2 \rightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 3 & -4 & \vdots & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 11 \end{bmatrix}.$$

Portanto, pela última linha concluímos que o sistema é impossível.

Posto da Matriz dos Coeficientes = 2 < 3 = Posto da Matriz Ampliada.

$$(f) \begin{cases} 3x + 2y - 4z = 1 \\ x - y + z = 3 \\ x - y - 3z = -3 \\ 3x + 3y - 5z = 0 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$$

Solução

Vamos transformar a matriz ampliada do sistema na forma escalonada.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 & \vdots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \vdots & 3 \\ 1 & -1 & -3 & \vdots & -3 \\ 3 & 3 & -5 & \vdots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 3 \\ 3 & 2 & -4 & \vdots & 1 \\ 1 & -1 & -3 & \vdots & -3 \\ 3 & 3 & -5 & \vdots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L_2 - 3L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 - L_1 \rightarrow L_3 \\ L_4 - 3L_1 \rightarrow L_4 \\ L_5 + L_1 \rightarrow L_5 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 5 & -7 & \vdots & -8 \\ 0 & 0 & -4 & \vdots & -6 \\ 0 & 6 & -8 & \vdots & -9 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & 4 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{\begin{matrix} L_4 + \frac{1}{10}L_3 \rightarrow L_4 \\ L_4 - \frac{6}{5}L_2 \rightarrow L_4 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 5 & -7 & \vdots & -8 \\ 0 & 0 & -4 & \vdots & -6 \\ 0 & 6 & -8 & \vdots & -9 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_5 + \frac{1}{2}L_3 \rightarrow L_5} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 5 & -7 & \vdots & -8 \\ 0 & 0 & -4 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftrightarrow L_5} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 5 & -7 & \vdots & -8 \\ 0 & 0 & -4 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Portanto, pela linha 4 da matriz ampliada escalonada, concluímos que o sistema é impossível.

Posto da Matriz dos Coeficientes = 3 < 4 = Posto da Matriz Ampliada.

$$(g) \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + 5y + 6z = 0 \end{cases}$$

Solução

A matriz ampliada do sistema é:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & \vdots & 0 \\ 2 & 5 & 6 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Vamos encontrar a sua forma escalonada

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & \vdots & 0 \\ 2 & 5 & 6 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 - 2L_1 \rightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & 9 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Da última linha obtemos que $y = 0$. Da primeira temos que $x - 2y + 3z = 0 \Leftrightarrow x + 2z = 0 \Rightarrow x = -3z$.

Portanto, $y = 0$ e $x = -3z$, $z \in \mathbb{R}$.

Posto da Matriz dos Coeficientes = Posto da Matriz Ampliada = 2 < 3 = Número de Incógnitas. Portanto o sistema é compatível e indeterminado.

Nulidade = 3 - 2 = 1. Temos uma varável livre, que escolhemos $z \in \mathbb{R}$.

Resposta: $(x, y, z) = z(-3, 0, 1)$. Dimensão 1.

5) Determine m de modo que o sistema linear seja indeterminado:

$$\begin{cases} mx + 3y = 12 \\ 2x + \frac{1}{2}y = 2 \end{cases}$$

Solução

A matriz ampliada do sistema é:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} m & 3 & \vdots & 12 \\ 2 & \frac{1}{2} & \vdots & 2 \end{array} \right].$$

Calculemos a sua forma escalonada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} m & 3 & \vdots & 12 \\ 2 & \frac{1}{2} & \vdots & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & \frac{1}{2} & \vdots & 2 \\ m & 3 & \vdots & 12 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 - \frac{1}{2}mL_1 \rightarrow L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & \frac{1}{2} & \vdots & 2 \\ 0 & 3 - \frac{m}{4} & \vdots & 12 - m \end{array} \right].$$

Portanto, concluí-se pela última linha que para o sistema ser indeterminado devemos ter $m = 12$.

6) Para o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} m^2x - y = 0 \\ x + ky = 0 \end{cases}$$

Determine, se existe, o valor de m em função de k de modo que o sistema:

(a) tenha solução única (trivial);

Solução

A matriz ampliada do sistema é:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} m^2 & -1 & \vdots & 0 \\ 1 & k & \vdots & 0 \end{array} \right].$$

Calculemos a forma escalonada da matriz ampliada do sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} m^2 & -1 & \vdots & 0 \\ 1 & k & \vdots & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & k & \vdots & 0 \\ m^2 & -1 & \vdots & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 - m^2L_1 \rightarrow L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & k & \vdots & 0 \\ 0 & -1 - m^2k & \vdots & 0 \end{array} \right].$$

Logo, concluí-se pela última linha que para o sistema ter solução única devemos ter $-1 - m^2k \neq 0$. Note que se $k > 0$, $-1 - m^2k \neq 0$. No entanto se $k < 0$, $-1 - m^2k \neq 0$ se e, somente se, $m \neq \pm\sqrt{-\frac{1}{k}}$.

(b) seja impossível.

Solução

Pelo item (a) concluímos que não há valor de m para o qual o sistema seja impossível. Visto que, para $m = \pm\sqrt{-\frac{1}{k}}$, $k < 0$, o sistema é possível e indeterminado e nos demais casos o sistema é possível e determinado.

Observação: o sistema é homogêneo então sempre tem solução trivial $x = y = 0$, portanto nunca é impossível.

7) Prove que o sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - 3t = a \\ 2x - 5y - 3z + 12t = b \\ 7x + y + 8z + 5t = c \end{cases}$$

admite solução se, e somente se, $37a + 13b = 9c$. Ache a solução geral do sistema quando $a = 2$ e $b = 4$.

Solução

A matriz ampliada do sistema é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 & \vdots & a \\ 2 & -5 & -3 & 12 & \vdots & b \\ 7 & 1 & 8 & 5 & \vdots & c \end{bmatrix}.$$

Calculemos a sua forma escalonada

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 & \vdots & a \\ 2 & -5 & -3 & 12 & \vdots & b \\ 7 & 1 & 8 & 5 & \vdots & c \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2-2L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3-7L_1 \rightarrow L_3}]{L_2-2L_1 \rightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 & \vdots & a \\ 0 & -9 & -9 & 18 & \vdots & b-2a \\ 0 & -13 & -13 & 26 & \vdots & c-7a \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{9}L_2 \rightarrow L_2} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 & \vdots & a \\ 0 & 1 & 1 & -2 & \vdots & \frac{2a-b}{9} \\ 0 & -13 & -13 & 26 & \vdots & c-7a \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3+13L_2 \rightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 & \vdots & a \\ 0 & 1 & 1 & -2 & \vdots & \frac{2a-b}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \frac{9c-37a-13b}{9} \end{bmatrix}.$$

Portanto, concluí-se pela última linha que o sistema admite solução se e, somente se, $\frac{9c-37a-13b}{9} = 0 \Leftrightarrow 37a + 13b = 9c$. Agora vamos calcular a solução geral do sistema quando $a = 2$ e $b = 4$. Logo, para $a = 2$ e $b = 4$ a matriz ampliada do sistema é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculemos a sua forma escada reduzida por linhas

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1-2L_2 \rightarrow L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, da segunda linha obtemos que $y = -z + 2t$ e da primeira linha obtemos que $x = 2 - z - t$, com $z, t \in \mathbb{R}$.

Posto da Matriz dos Coeficientes = Posto da Matriz Ampliada = $2 < 4$ = Número de Incógnitas. Sistema Compatível Indeterminado.

Nulidade = $4 - 2 = 2$. Temos duas variáveis livres que escolhemos $z, t \in \mathbb{R}$.

Resposta: $(x, y, z, t) = z(-1, -1, 1, 0) + t(-1, 2, 0, 1) + (2, 0, 0, 0)$.

$v_0 = (2, 0, 0, 0)$ é chamada solução particular.

8) Determinar a e b para que o sistema seja possível e determinado

$$\begin{cases} 3x - 7y = a \\ x + y = b \\ 5x + 3y = 5a + 2b \\ x + 2y = a + b - 1 \end{cases}$$

Solução

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 & \vdots & a \\ 1 & 1 & \vdots & b \\ 5 & 3 & \vdots & 5a + 2b \\ 1 & 2 & \vdots & a + b - 1 \end{bmatrix}.$$

Vamos calcular a forma escalonada da matriz ampliada

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cccc} 3 & -7 & \vdots & a \\ 1 & 1 & \vdots & b \\ 5 & 3 & \vdots & 5a+2b \\ 1 & 2 & \vdots & a+b-1 \end{array} \right] & \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & \vdots & b \\ 3 & -7 & \vdots & a \\ 5 & 3 & \vdots & 5a+2b \\ 1 & 2 & \vdots & a+b-1 \end{array} \right] & \xrightarrow{\substack{L_2-3L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3-5L_1 \rightarrow L_3 \\ L_4-L_1 \rightarrow L_4}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & \vdots & b \\ 0 & -10 & \vdots & a-3b \\ 0 & -2 & \vdots & 5a-3b \\ 0 & 1 & \vdots & a-1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{L_4 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & \vdots & b \\ 0 & 1 & \vdots & a-1 \\ 0 & -2 & \vdots & 5a-3b \\ 0 & -10 & \vdots & a-3b \end{array} \right] & \xrightarrow{\substack{L_3+2L_2 \rightarrow L_3 \\ L_4+10L_2 \rightarrow L_4}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & \vdots & b \\ 0 & 1 & \vdots & a-1 \\ 0 & 0 & \vdots & 7a-3b-2 \\ 0 & 0 & \vdots & 11a-3b-10 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Para o sistema ser determinado é necessário que

$$\begin{cases} 7a - 3b = 2 \\ 11a - 3b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7a + 3b = -2 \\ 11a - 3b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow 4a = 8 \Rightarrow a = 2.$$

Substituindo $a = 2$ em $7a - 3b = 2$, obtemos $b = 4$.

Portanto, para o sistema ser determinado é necessário que $b = 4$ e $a = 2$.

9) Determinar o valor de k para que o sistema

$$\begin{cases} x + 2y + kz = 1 \\ 2x + ky + 8z = 3 \end{cases}$$

tenha:

- (a) solução única
- (b) nenhuma solução
- (c) mais de uma solução

Solução

A matriz ampliada do sistema é:

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & k & \vdots & 1 \\ 2 & k & 8 & \vdots & 3 \end{array} \right].$$

Calculamos a forma escalonada da matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & k & \vdots & 1 \\ 2 & k & 8 & \vdots & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2-2L_1 \rightarrow L_2} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & k & \vdots & 1 \\ 0 & k-4 & 8-2k & \vdots & 1 \end{array} \right].$$

- (a) O posto da matriz ampliada é igual ao posto da matriz dos coeficientes, mas não é igual ao número de incógnitas. Em vista disso, o sistema não admite solução única.
- (b) O sistema não admite nenhuma solução se $k - 4 = 0$ e $8 - 2k = 0$, o que ocorre em $k = 4$.
- (c) O sistema admite mais de uma solução para todo $k \neq 4$.

10) Resolva o sistema

$$\begin{cases} \frac{2}{u} + \frac{3}{v} = 8 \\ \frac{1}{u} - \frac{1}{v} = -1 \end{cases}$$

Solução

Fazendo as mudanças de variáveis $x = \frac{1}{u}$ e $y = \frac{1}{v}$, temos

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ -2x + 2y = 2 \end{cases}.$$

Daí segue que $5y = 10 \Rightarrow y = 2$. Substituindo $y = 2$ em $x - y = -1$, obtemos que $x = 1$.

Portanto, $\frac{1}{u} = x = 1 \Rightarrow u = 1$ e $\frac{1}{v} = y = 2 \Rightarrow v = \frac{1}{2}$.

11) Discuta os seguintes sistemas:

$$(a) \begin{cases} x + z = 4 \\ y + z = 5 \\ ax + z = 4 \end{cases}$$

Solução

A matriz ampliada do sistema é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 5 \\ a & 0 & 1 & \vdots & 4 \end{bmatrix}.$$

Calculemos a forma escalonada da matriz ampliada do sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 5 \\ a & 0 & 1 & \vdots & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 - aL_1 \rightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 5 \\ 0 & 0 & 1 - a & \vdots & 4 - 4a \end{bmatrix}.$$

Pela última linha temos que se $a = 1$ o sistema é indeterminado. Por outro lado, se $a \neq 1$ o sistema é determinado.

$$(b) \begin{cases} x + z + w = 0 \\ x + ky + k^2w = 1 \\ x + (k+1)z + w = 1 \\ x + z + kw = 2 \end{cases}$$

Solução

A matriz ampliada do sistema é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & k & 0 & k^2 & \vdots & 1 \\ 1 & 0 & k+1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & k & \vdots & 2 \end{bmatrix}.$$

Calculemos a sua forma escalonada

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & k & 0 & k^2 & \vdots & 1 \\ 1 & 0 & k+1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & k & \vdots & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L_2 - L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 - L_1 \rightarrow L_3 \\ L_4 - L_1 \rightarrow L_4 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & k & -1 & k^2 - 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & k & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k - 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix}.$$

Pela quarta linha, temos que se $k = 1$ o sistema é impossível. Também, pela terceira linha, temos que se $k = 0$ o sistema é impossível. Nestes casos o Posto da Matriz dos Coeficientes = $3 < 4 =$ Posto da Matriz Ampliada.

Por outro lado, se $k \neq 1$ e $k \neq 0$ o sistema é possível e determinado e tem como solução: $x = \frac{-3k+1}{k^2-k}$, $y = \frac{-2k^2-k+1}{k^2}$, $z = \frac{1}{k}$ e $w = \frac{2}{k-1}$.

12) Determine k para que o sistema admita solução.

$$\begin{cases} -4x + 3y = 2 \\ 5x - 4y = 0 \\ 2x - y = k \end{cases}$$

Solução

A matriz ampliada do sistema é:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 3 & \vdots & 2 \\ 5 & -4 & \vdots & 0 \\ 2 & -1 & \vdots & k \end{array} \right]$$

Calculemos a forma escalonada da matriz ampliada

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 3 & \vdots & 2 \\ 5 & -4 & \vdots & 0 \\ 2 & -1 & \vdots & k \end{array} \right] &\xrightarrow{-\frac{1}{4}L_1 \leftrightarrow L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{4} & \vdots & -\frac{1}{2} \\ 5 & -4 & \vdots & 0 \\ 2 & -1 & \vdots & k \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{L_2 - 5L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 - 2L_1 \rightarrow L_3}} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{4} & \vdots & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \vdots & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \vdots & k+1 \end{array} \right] &\xrightarrow{L_3 + 2L_2 \rightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{4} & \vdots & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \vdots & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \vdots & k+6 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Portanto, pela última linha, temos que se $k = -6$ o sistema é possível e determinado. Neste caso temos: Posto da Matriz dos Coeficientes = 2 = Posto da Matriz Ampliada.

Por outro lado, se $k \neq -6$ o sistema é impossível. Neste caso temos: Posto da Matriz dos Coeficientes = 2 < 3 = Posto da Matriz Ampliada.

13) Classifique, de acordo com o valor de k , os sistemas abaixo em “possível e determinado”, “possível e indeterminado”, ou “impossível”.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad &\begin{cases} x + y - kz = 0 \\ kx + y - z = 2 - k \\ x + ky - z = -k \end{cases} \\ \text{b)} \quad &\begin{cases} kx + 2y = 6 \\ 3x - y = -2 \\ x + y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Solução

14) a) SI se $k = -2$ ou $k = 1$ e SPD caso contrário. b) SPD se $k = -10$ e SI caso contrário.