Álgebra Linear - 2022.3

Lista 4 - Determinantes

1) Encontre o determinante de cada uma das seguintes matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 8 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{pmatrix}.$$

Solução

Vamos calcular o determinante da matriz A aplicando o desenvolvimento de Laplace na terceira coluna, isto é,

$$detA = det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 8 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{1+3}2\det\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2(8-8) = 2(0) = 0.$$

Para a matriz B, note que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3+L_2\to L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Logo, aplicando o desenvolvimento de Laplace na terceira linha, segue que

$$detB = det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = (-1)^{3+1}2det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2(-1-1) = 2(-2) = -4.$$

Já para a matriz C, por sabermos que o determinante não se altera com operações elementares sobre colunas, procedemos da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3-a^2C_1\to C_3]{C_2-aC_1\to C_2} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & b^2-ab & b^3-a^2b \\ c & c^2-ac & c^3-a^2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & b(b-a) & b(b-a)(b+a) \\ c & c(c-a) & c(c-a)(c+a) \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$detC = det\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & b(b-a) & b(b-a)(b+a) \\ c & c(c-a) & c(c-a)(c+a) \end{pmatrix} = adet\begin{pmatrix} b(b-a) & b(b-a)(b+a) \\ c(c-a) & c(c-a)(c+a) \end{pmatrix}.$$

Note que, na última igualdade, foi aplicado o desenvolvimento de Laplace na primeira linha. Agora, usando a linearidade do determinate em cada linha, concluímos que

$$adet\begin{pmatrix} b(b-a) & b(b-a)(b+a) \\ c(c-a) & c(c-a)(c+a) \end{pmatrix} = ab(b-a)c(c-a)det\begin{pmatrix} 1 & (b+a) \\ 1 & (c+a) \end{pmatrix} = abc(b-a)(c-a)(c-b).$$

Portanto, $detC = abc(b-a)(c-a)(c-b)$.

2) Encontre o determinante da matriz

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & 3 \\ 7 & 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

Solução

Para calcularmos o determinante de B vamos aplicar o desenvolvimento de Laplace na segunda linha, isto é,

$$detB = (-1)^{2+1}1det\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix} + (-1)^{2+3}1det\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 7 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (-1)(-12) + (-1)36 = -24.$$

3) Mostre que

$$det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 1 & 3\\ 2 & 3 & 7 & 1 & 5\\ 2 & 3 & 6 & 1 & 9\\ 4 & 6 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 8 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix} = 2$$

Solução

Note que

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 1 & 3\\ 2 & 3 & 7 & 1 & 5\\ 2 & 3 & 6 & 1 & 9\\ 4 & 6 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 8 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 - L_1 \to L_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 6 & 1 & 9\\ 4 & 6 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 8 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 1 & 3\\ 2 & 3 & 7 & 1 & 5\\ 2 & 3 & 6 & 1 & 9\\ 4 & 6 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 8 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 6 & 1 & 9\\ 4 & 6 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 8 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (-1)^{2+5}2det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 1\\ 2 & 3 & 6 & 1\\ 4 & 6 & 2 & 3\\ 5 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Note que, na última igualdade, foi aplicado o desenvolvimento de Laplace na segunda linha. Contudo,

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 1\\ 2 & 3 & 6 & 1\\ 4 & 6 & 2 & 3\\ 5 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 - L_1 \to L_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 4 & 6 & 2 & 3\\ 5 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$(-2)det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 1\\ 2 & 3 & 6 & 1\\ 4 & 6 & 2 & 3\\ 5 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix} = (-2)det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 4 & 6 & 2 & 3\\ 5 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix} = (-2)(-1)^{2+3}(-1)det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1\\ 4 & 6 & 3\\ 5 & 8 & 4 \end{pmatrix} = 2.$$

Note que novamente, na penúltima igualdade, foi aplicado o desenvolvimento de Laplace na segunda linha.

Portanto,

$$det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 1 & 3\\ 2 & 3 & 7 & 1 & 5\\ 2 & 3 & 6 & 1 & 9\\ 4 & 6 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 8 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix} = 2.$$

4) Mostre que

$$det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 5 & 1 & 2\\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1\\ 4 & 3 & 2 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 6 & \pi & 7 \end{pmatrix} = 2$$

Solução

Temos que

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 5 & 1 & 2\\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1\\ 4 & 3 & 2 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 6 & \pi & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 - L_1 \to L_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1\\ 4 & 3 & 2 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 6 & \pi & 7 \end{pmatrix}.$$

Consequentemente,

$$det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 5 & 1 & 2\\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1\\ 4 & 3 & 2 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 6 & \pi & 7\end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1\\ 4 & 3 & 2 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 6 & \pi & 7\end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 1\\ 4 & 3 & 2 & 1\\ 4 & 3 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 6 & \pi\end{pmatrix}.$$

Note que, na última igualdade, foi aplicado o desenvolvimento de Laplace na segunda linha. Entretanto,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 1\\ 4 & 3 & 2 & 1\\ 4 & 3 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 6 & \pi\end{pmatrix} \xrightarrow{L_3-L_2\to L_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 1\\ 4 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 6 & \pi\end{pmatrix}.$$

Em vista disso,

$$det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 1\\ 4 & 3 & 2 & 1\\ 4 & 3 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 6 & \pi\end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 1\\ 4 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 6 & \pi\end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5\\ 4 & 3 & 2\\ 2 & 1 & 6\end{pmatrix} = 2.$$

Note que novamente, na penúltima igualdade, foi aplicado o desenvolvimento de Laplace na terceira linha. Por conseguinte,

$$det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 5 & 1 & 2\\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1\\ 4 & 3 & 2 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 6 & \pi & 7\end{pmatrix} = 2.$$

5) Use eliminação Gaussiana (escalonamento) para calcular os determinantes das seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1\\ 1 & 5 & -7 & 2\\ 3 & 1 & -5 & 3\\ 2 & 3 & -6 & 0\end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2\\ 3 & 0 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 4 & 3\\ 2 & 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

Solução

Escalonando a matriz A, obtemos

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1\\ 1 & 5 & -7 & 2\\ 3 & 1 & -5 & 3\\ 2 & 3 & -6 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[L_4-2L_1\to L_4]{\substack{L_2-L_1\to L_2\\ L_3-3L_1\to L_3}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1\\ 0 & 7 & -8 & 3\\ 0 & 7 & -8 & 6\\ 0 & 7 & -8 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow[L_4-L_2\to L_4]{L_3-L_2\to L_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1\\ 0 & 7 & -8 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1\\ 1 & 5 & -7 & 2\\ 3 & 1 & -5 & 3\\ 2 & 3 & -6 & 0\end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1\\ 0 & 7 & -8 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix} = 0.$$

Já para a matriz B, temos

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2\\ 3 & 0 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 4 & 3\\ 2 & 2 & -1 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[L_4-L_1\to L_4]{\substack{L_2-\frac{3}{2}L_1\to L_2\\ L_3-\frac{1}{2}L_1\to L_3}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2\\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & -5\\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 2\\ 0 & 1 & -4 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow[L_4+\frac{2}{3}L_2\to L_4]{L_3-L_2\to L_3}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2\\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & -5\\ 0 & 0 & 6 & 7\\ 0 & 0 & -\frac{19}{3} & -\frac{13}{3}\end{pmatrix} \xrightarrow{L_4+\frac{19}{18}L_3\to L_4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2\\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & -5\\ 0 & 0 & 6 & 7\\ 0 & 0 & 0 & \frac{55}{18}\end{pmatrix}$$

Portanto,

$$det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & -5 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{55}{18} \end{pmatrix} = -55.$$

6) Se A e B são matrizes quadradas das mesmas dimensões e $det(A) = 2$ e $det(B) = 3$, encontre $det(A^2B^{-1})$.

Solução

Sabemos que

$$BB^{-1} = I \Leftrightarrow det(BB^{-1}) = detI \Leftrightarrow detBdetB^{-1} = 1 \Leftrightarrow detB^{-1} = \frac{1}{detB}.$$

Além disso,

$$det(A^2) = det(AA) = detAdetA = (detA)^2.$$

Portanto,

$$det(A^2B^{-1}) = detA^2detB^{-1} = (detA)^2\frac{1}{detB} = (2)^2\frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

7) Para cada uma das matrizes abaixo calcule sua adjunta e utilize estes cálculos para calcular a matriz inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solução

A adjunta da matriz A é à transposta da matriz dos cofatores de A. O cofator Δ_{ij} do elemento a_{ij} da matriz é $(-1)^{i+j}detA_{ij}$, em que A_{ij} é a submatriz de A, obtida extraindo-se a i-ésima linha e j-ésima coluna. Isto posto, calculemos

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}det\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1, \quad \Delta_{12} = (-1)^{1+2}det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$
$$\Delta_{13} = (-1)^{1+3}det\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2, \quad \Delta_{21} = (-1)^{2+1}det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 3,$$
$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2}det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \Delta_{23} = (-1)^{2+3}det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1,$$
$$\Delta_{31} = (-1)^{3+1}det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 7, \quad \Delta_{32} = (-1)^{3+2}det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 5,$$
$$\Delta_{33} = (-1)^{3+3}det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = -4.$$

Por conseguinte,

$$adjA = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Agora, para a matriz B, calculemos

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1, \quad \Delta_{12} = (-1)^{1+2}det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1,$$
$$\Delta_{13} = (-1)^{1+3}det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1, \quad \Delta_{21} = (-1)^{2+1}det\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -5,$$
$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2}det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1, \quad \Delta_{23} = (-1)^{2+3}det\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 5,$$
$$\Delta_{31} = (-1)^{3+1}det\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1, \quad \Delta_{32} = (-1)^{3+2}det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 5,$$
$$\Delta_{33} = (-1)^{3+3}det\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -7.$$

Portanto,

$$adjB = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ -1 & -1 & 5 \\ -1 & 5 & -7 \end{pmatrix}.$$

Uma vez que

$$detA = det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 5 \text{ e } detB = det\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -6,$$

segue que

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}(adjA) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

e

$$B^{-1} = \frac{1}{detB}(adjB) = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ -1 & -1 & 5 \\ -1 & 5 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}.$$

8) Calcule os seguintes determinantes

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{\pi} & 10 & 100 \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & \sqrt{\pi} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \sqrt{\pi} & 0 & 0 \\ 10 & 1 & 0 \\ 100 & e & \sqrt{\pi} \end{pmatrix}$$

Solução

A matriz A é triangular superior e a matriz B é triangular inferior. Em vista disso, os respectivos determinantes são o produto dos elementos da diagonal principal, isto é,

$$detA = det\begin{pmatrix} \sqrt{\pi} & 10 & 100 \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & \sqrt{\pi} \end{pmatrix} = \pi \text{ e } detB = det\begin{pmatrix} \sqrt{\pi} & 0 & 0 \\ 10 & 1 & 0 \\ 100 & e & \sqrt{\pi} \end{pmatrix} = \pi.$$

9) Determine a matriz de cofatores e a matriz adjunta das seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solução

Os cofatores da matriz A são:

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}det\,(4) = 4, \quad \Delta_{12} = (-1)^{1+2}det\,(3) = -3,$$
$$\Delta_{13} = (-1)^{2+1}det\,(2) = -2, \quad \Delta_{21} = (-1)^{2+2}det\,(1) = 1.$$

Portanto,

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$adjA = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},$$

em que $\overline{A}$ é a matriz dos cofatores de A.

Os cofatores da matriz B são:

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = 2, \quad \Delta_{12} = (-1)^{1+2}det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -1,$$
$$\Delta_{13} = (-1)^{1+3}det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = 1, \quad \Delta_{21} = (-1)^{2+1}det\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = -6,$$
$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2}det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 3, \quad \Delta_{23} = (-1)^{2+3}det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = 5,$$
$$\Delta_{31} = (-1)^{3+1}det\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -4, \quad \Delta_{32} = (-1)^{3+2}det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -2,$$
$$\Delta_{33} = (-1)^{3+3}det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

Por conseguinte,

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -6 & 3 & 5 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

e

$$adjB = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix},$$

em que $\overline{B}$ é a matriz dos cofatores de B.

10) Calcule as inversas das matrizes do exercício anterior usando adjunta e escalonamento.

Solução

Primeiramente vamos calcular as inversas das matrizes A e B usando as respectivas adjuntas. Haja vista que

$$detA = det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -2 \ e \ detB = det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 8,$$

segue que

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}(adjA) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e

$$B^{-1} = \frac{1}{detB}(adjB) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Agora vamos calcular A^{-1} e B^{-1} usando a eliminação de Gauss-Jordan. Então,

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 - 3L_1 \to L_2} \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{2}L_2 \to L_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 - 2L_2 \to L_1} \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Portanto,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Já para B^{-1}, segue

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}L_1 \to L_1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 + L_1 \to L_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 + \frac{5}{2}L_2 \to L_3} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{4}L_3 \to L_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{1}{4} \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 - L_3 \to L_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{1}{4} \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 - \frac{3}{2}L_3 \to L_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{16} & -\frac{15}{16} & -\frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{1}{4} \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 + \frac{1}{2}L_2 \to L_1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{1}{4} \end{array}\right).$$

Portanto,

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

11) (a) Use eliminação Gaussiana (escalonamento) para determinar se existem as inversas das seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solução

Vamos calcular a forma escalonada da matriz A, isto é,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 - \frac{1}{2}L1 \to L_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 + \frac{1}{2}L_1 \to L_4}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 + \frac{1}{2}L_2 \to L_3}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 - \frac{1}{2}L_2 \to L_4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 - L_3 \to L_4}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Uma vez que durante o escalonamento houve uma permutação de linhas, segue que

$$det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = -det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Portanto existe A^{-1}, pois $detA = 1 \neq 0$.

Já para a matriz B, temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 - L_1 \to L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 - L_2 \to L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Portanto, B^{-1} não existe, pois $detB = 0$.

(b) Calcular a inversa quando existe.

Solução

Vamos calcular A^{-1} utilizando a eliminação de Gauss-Jordam, isto é,

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}L_1 \to L_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 - L_1 \to L_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_4 + L_1 \to L_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-2L_2 \to L_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3-L_2\to L_3} \left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_4-\frac{1}{2}L_2\to L_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(-1)L_3\to L_3} \left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_4-L_3\to L_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3+3L_4\to L_3} \left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -5 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2+2L_4\to L_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -5 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2-2L_3\to L_2} \left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 6 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -5 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1-\frac{1}{2}L_2\to L_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 6 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -5 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Portanto,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 & 2 \\ -5 & 6 & 6 & -4 \\ 4 & -5 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

12) Resolva os seguintes sistemas, com a, b, c constantes, por dois métodos: (i) escalonamento e (ii) escrevendo o sistema na forma matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e encontrando a inversa da matriz A.

(a)

$$\begin{aligned} 2x + y &= a \\ 3x + 6y &= b \end{aligned} \qquad (1)$$

Solução

Vamos transformar a matriz ampliada do sitema (1) em uma matriz na forma escalonada, isto é,

$$\left(\begin{array}{cc:c} 2 & 1 & a \\ 3 & 6 & b \end{array}\right) \xrightarrow{L_2-\frac{3}{2}L_1\to L_2} \left(\begin{array}{cc:c} 2 & 1 & a \\ 0 & \frac{9}{2} & \frac{2b-3a}{2} \end{array}\right).$$

Logo, o sistema de equações correspondente à forma escalonada da matriz ampliada do sistema (1) é:

$$\begin{array}{rcl} 2x+y & = & a \\ \frac{9}{2}y & = & \frac{2b-3a}{2}. \end{array} \tag{2}$$

Da segunda linha de (2) obtemos $y = \frac{2b-3a}{9}$, que substituindo na primeira linha de (2) nos possibilita concluir que $x = \frac{6a-b}{9}$.
Portanto, a solução do sistema (1) é:

$$S_1 = \begin{pmatrix} \frac{6a-b}{9} \\ \frac{2b-3a}{9} \end{pmatrix}.$$

Agora, reescrevendo o sistema (1) na forma matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, obtemos

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Temos que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

é a matriz dos coeficientes. Então,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}.$$

Logo, a solução do sistema (1) é $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$, ou seja,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6a-b}{9} \\ \frac{2b-3a}{9} \end{pmatrix}.$$

(b)

$$\begin{array}{rcl} x+y+z & = & a \\ 2x+2z & = & b \\ 3y+3z & = & c \end{array} \tag{3}$$

Solução
Vamos transformar a matriz ampliada do sitema (3) em uma matriz na forma escalonada, isto é,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 0 & 2 & b \\ 0 & 3 & 3 & c \end{array}\right) \xrightarrow{L_2-2L_1\to L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & 0 & b-2a \\ 0 & 3 & 3 & c \end{array}\right) \xrightarrow{L_3+\frac{3}{2}L_2\to L_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & 0 & b-2a \\ 0 & 0 & 3 & \frac{3b+2c-6a}{2} \end{array}\right).$$

Logo, o sistema de equações correspondente à forma escalonada da matriz ampliada do sistema (3) é:

$$\begin{array}{rcl} x+y+z & = & a \\ -2y & = & -2a+b \\ 3z & = & \frac{3b+2c-6a}{2} \end{array} \tag{4}$$

Da terceira linha de (4), obtemos $z = \frac{3b+2c-6a}{6}$. Já, na segunda linha de (4) determinamos que $y = \frac{2a-b}{2}$. Por fim, substituindo os resultados de y e z na primeira linha de (4), concluímos que $x = \frac{3a-c}{3}$.
Portanto, a solução do sistema (3) é:

$$S_2 = \begin{pmatrix} \frac{3a-c}{3} \\ \frac{2a-b}{2} \\ \frac{3b+2c-6a}{6} \end{pmatrix}.$$

Agora, reescrevendo o sistema (3) na forma matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, obtemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & a \\ 2 & 0 & 2 & \vdots & b \\ 0 & 3 & 3 & \vdots & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Temos que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

é a matriz dos coeficientes. Então,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Logo, a solução do sistema (3) é $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$, ou seja,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3a-c}{3} \\ \frac{2a-b}{2} \\ \frac{3b+2c-6a}{6} \end{pmatrix}.$$

13) Mostrar para a seguiente matriz de $M_{n\times n}$ a igualdade:

$$\left| \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix} \right| = n + 1$$

Solução 1

A demonstração será feita de maneira indutiva sobre a ordem da matriz $n \geq 1$. Se $n = 1$, então a matriz $A = (2)$ e, neste caso, $detA = det\,(2) = 2 = 1 + 1 = n + 1$.

Agora, como hipótese de indução, assumimos a validade da afirmação para todo $n \leq k$ e vamos provar que vale para $n = k + 1$.

De fato,

$$
\begin{aligned}
det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 2 \end{pmatrix}_{k+1\times k+1} &= (-1)^{1+1} 2 det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 2 \end{pmatrix}_{k\times k} \\
&+ (-1)^{1+2} 1 det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 2 \end{pmatrix}_{k\times k} \\
&\overbrace{=}^{hip} 2(k+1) \\
&- (-1)^{1+1} 1 det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 2 \end{pmatrix}_{k-1\times k-1} \\
&\overbrace{=}^{hip} 2(k+1) - k \\
&= (k+1) + 1,
\end{aligned}
$$

o que termina a prova por indução.

Solução 2

Nesta solução é apresentado o procedimento para o cálculo do determinante por escalonamento, isto é,

$$
\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 - \frac{1}{2}L_1 \to L_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 2 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{L_3 - \frac{2}{3}L_2 \to L_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdots \xrightarrow{L_{n-1} - \frac{n-2}{n-1}L_{n-2} \to L_{n-1}}
$$

$$\vdots$$

$$
\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & \frac{n-1}{n} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_n - \frac{n-1}{n}L_{n-1} \to L_n} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & \frac{n}{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \frac{n+1}{n} \end{pmatrix}.
$$

Logo,

$$det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 2 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & \frac{n}{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \frac{n+1}{n} \end{pmatrix}$$

$$= 2\frac{3}{2}\frac{4}{3}\dots\frac{n}{n-1}\frac{n+1}{n} = \prod_{i=1}^{n}\frac{i+1}{i} = n+1.$$