Espaços Vetoriais

Introdução

Álgebra Linear

Mariana Silveira - Cristian Coletti

Universidade Federal do ABC

Exemplo: $\mathbb{R}^n$

Consideremos $\mathbb{R}^n = \{(a_1, \ldots, a_n), a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$.

Adição: Dados $u = (a_1, \ldots, a_n), v = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, a operação

$$u + v := (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$$

é uma operação (binária) em $\mathbb{R}^n$ satisfazendo:

A_1- **Associativa**: $(u + v) + w = u + (v + w), \ \forall u, v, w \in \mathbb{R}^n$.

Sejam $u = (a_1, \ldots, a_n), v = (b_1, \ldots, b_n), w = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
(u+v)+w &= ((a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n)) + (c_1, \ldots, c_n) \\
\text{def de } + \to \quad &= (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) + (c_1, \ldots, c_n) \\
\text{def de } + \to \quad &= ((a_1 + b_1) + c_1, \ldots, (a_n + b_n) + c_n) \\
\text{A1 em } \mathbb{R} \to \quad &= (a_1 + (b_1 + c_1), \ldots, a_n + (b_n + c_n)) \\
\text{def de } + \to \quad &= (a_1, \ldots, a_n) + (b_1 + c_1, \ldots, b_n + c_n) \\
\text{def de } + \to \quad &= (a_1, \ldots, a_n) + ((b_1, \ldots, b_n) + (c_1, \ldots, c_n)) = u + (v + w).
\end{aligned}$$

Exemplo: $\mathbb{R}^n$

Consideremos $\mathbb{R}^n = \{(a_1, \ldots, a_n), a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$.

Adição: Dados $u = (a_1, \ldots, a_n), v = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, a operação

$$u + v := (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$$

é uma operação (binária) em $\mathbb{R}^n$ satisfazendo:

$A_1 -$ **Associativa**: $(u + v) + w = u + (v + w), \ \forall u, v, w \in \mathbb{R}^n$.

Sejam $u = (a_1, \ldots, a_n), v = (b_1, \ldots, b_n), w = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
(u+v)+w &= ((a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n)) + (c_1, \ldots, c_n) \\
\text{def de } + \rightarrow &= (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) + (c_1, \ldots, c_n) \\
\text{def de } + \rightarrow &= ((a_1 + b_1) + c_1, \ldots, (a_n + b_n) + c_n) \\
\text{A1 em } \mathbb{R} \rightarrow &= (a_1 + (b_1 + c_1), \ldots, a_n + (b_n + c_n)) \\
\text{def de } + \rightarrow &= (a_1, \ldots, a_n) + (b_1 + c_1, \ldots, b_n + c_n) \\
\text{def de } + \rightarrow &= (a_1, \ldots, a_n) + ((b_1, \ldots, b_n) + (c_1, \ldots, c_n)) = u + (v + w).
\end{aligned}$$

Exemplo: $\mathbb{R}^n$

Consideremos $\mathbb{R}^n = \{(a_1, \ldots, a_n), a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$.

Adição: Dados $u = (a_1, \ldots, a_n), v = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, a operação

$$u + v := (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$$

é uma operação (binária) em $\mathbb{R}^n$ satisfazendo:

$A_1 -$ **Associativa**: $(u + v) + w = u + (v + w), \;\; \forall u, v, w \in \mathbb{R}^n$.

Sejam $u = (a_1, \ldots, a_n), v = (b_1, \ldots, b_n), w = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
(u+v)+w &= ((a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n)) + (c_1, \ldots, c_n) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) + (c_1, \ldots, c_n) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= ((a_1 + b_1) + c_1, \ldots, (a_n + b_n) + c_n) \\
\text{A1 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= (a_1 + (b_1 + c_1), \ldots, a_n + (b_n + c_n)) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= (a_1, \ldots, a_n) + (b_1 + c_1, \ldots, b_n + c_n) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= (a_1, \ldots, a_n) + ((b_1, \ldots, b_n) + (c_1, \ldots, c_n)) = u + (v + w).
\end{aligned}$$

Exemplo: $\mathbb{R}^n$

Consideremos $\mathbb{R}^n = \{(a_1, \ldots, a_n), a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$.

Adição: Dados $u = (a_1, \ldots, a_n), v = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, a operação

$$u + v := (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$$

é uma operação (binária) em $\mathbb{R}^n$ satisfazendo:

$A_1 -$ **Associativa**: $(u + v) + w = u + (v + w), \ \forall u, v, w \in \mathbb{R}^n$.

Sejam $u = (a_1, \ldots, a_n), v = (b_1, \ldots, b_n), w = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
(u + v) + w &= ((a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n)) + (c_1, \ldots, c_n) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) + (c_1, \ldots, c_n) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= ((a_1 + b_1) + c_1, \ldots, (a_n + b_n) + c_n) \\
\text{A1 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= (a_1 + (b_1 + c_1), \ldots, a_n + (b_n + c_n)) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= (a_1, \ldots, a_n) + (b_1 + c_1, \ldots, b_n + c_n) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= (a_1, \ldots, a_n) + ((b_1, \ldots, b_n) + (c_1, \ldots, c_n)) = u + (v + w).
\end{aligned}$$

Exemplo: $\mathbb{R}^n$

Consideremos $\mathbb{R}^n = \{(a_1, \dots, a_n), a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$.

Adição: Dados $u = (a_1, \dots, a_n), v = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, a operação

$$u + v := (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

é uma operação (binária) em $\mathbb{R}^n$ satisfazendo:

$A_1 -$ **Associativa**: $(u + v) + w = u + (v + w), \ \forall u, v, w \in \mathbb{R}^n$.

Sejam $u = (a_1, \dots, a_n), v = (b_1, \dots, b_n), w = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
(u+v)+w &= ((a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n)) + (c_1, \dots, c_n) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) + (c_1, \dots, c_n) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= ((a_1 + b_1) + c_1, \dots, (a_n + b_n) + c_n) \\
\text{A1 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= (a_1 + (b_1 + c_1), \dots, a_n + (b_n + c_n)) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= (a_1, \dots, a_n) + (b_1 + c_1, \dots, b_n + c_n) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= (a_1, \dots, a_n) + ((b_1, \dots, b_n) + (c_1, \dots, c_n)) = u + (v + w).
\end{aligned}$$

Exemplo: $\mathbb{R}^n$

Consideremos $\mathbb{R}^n = \{(a_1, \ldots, a_n), a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$.

Adição: Dados $u = (a_1, \ldots, a_n), v = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, a operação

$$u + v := (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$$

é uma operação (binária) em $\mathbb{R}^n$ satisfazendo:

$A_1 -$ **Associativa**: $(u + v) + w = u + (v + w), \ \forall u, v, w \in \mathbb{R}^n$.

Sejam $u = (a_1, \ldots, a_n), v = (b_1, \ldots, b_n), w = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
(u+v)+w &= ((a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n)) + (c_1, \ldots, c_n) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) + (c_1, \ldots, c_n) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= ((a_1 + b_1) + c_1, \ldots, (a_n + b_n) + c_n) \\
\text{A1 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= (a_1 + (b_1 + c_1), \ldots, a_n + (b_n + c_n)) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= (a_1, \ldots, a_n) + (b_1 + c_1, \ldots, b_n + c_n) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= (a_1, \ldots, a_n) + ((b_1, \ldots, b_n) + (c_1, \ldots, c_n)) = u + (v + w).
\end{aligned}$$

Exemplo: $\mathbb{R}^n$

Consideremos $\mathbb{R}^n = \{(a_1, \ldots, a_n), a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$.

Adição: Dados $u = (a_1, \ldots, a_n), v = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, a operação

$$u + v := (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$$

é uma operação (binária) em $\mathbb{R}^n$ satisfazendo:

$A_1 -$ **Associativa**: $(u + v) + w = u + (v + w), \ \forall u, v, w \in \mathbb{R}^n$.

Sejam $u = (a_1, \ldots, a_n), v = (b_1, \ldots, b_n), w = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
(u+v)+w &= ((a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n)) + (c_1, \ldots, c_n) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) + (c_1, \ldots, c_n) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= ((a_1 + b_1) + c_1, \ldots, (a_n + b_n) + c_n) \\
\text{A1 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= (a_1 + (b_1 + c_1), \ldots, a_n + (b_n + c_n)) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= (a_1, \ldots, a_n) + (b_1 + c_1, \ldots, b_n + c_n) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= (a_1, \ldots, a_n) + ((b_1, \ldots, b_n) + (c_1, \ldots, c_n)) = u + (v + w).
\end{aligned}$$

Exemplo: $\mathbb{R}^n$

Consideremos $\mathbb{R}^n = \{(a_1, \ldots, a_n), a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$.

Adição: Dados $u = (a_1, \ldots, a_n), v = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, a operação

$$u + v := (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$$

é uma operação (binária) em $\mathbb{R}^n$ satisfazendo:

$A_1 -$ **Associativa**: $(u + v) + w = u + (v + w), \ \forall u, v, w \in \mathbb{R}^n$.

Sejam $u = (a_1, \ldots, a_n), v = (b_1, \ldots, b_n), w = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
(u+v)+w &= ((a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n)) + (c_1, \ldots, c_n) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) + (c_1, \ldots, c_n) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= ((a_1 + b_1) + c_1, \ldots, (a_n + b_n) + c_n) \\
\text{A1 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= (a_1 + (b_1 + c_1), \ldots, a_n + (b_n + c_n)) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= (a_1, \ldots, a_n) + (b_1 + c_1, \ldots, b_n + c_n) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= (a_1, \ldots, a_n) + ((b_1, \ldots, b_n) + (c_1, \ldots, c_n)) = u + (v + w).
\end{aligned}$$

Exemplo: $\mathbb{R}^n$

Consideremos $\mathbb{R}^n = \{(a_1, \ldots, a_n), a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$.

Adição: Dados $u = (a_1, \ldots, a_n), v = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, a operação

$$u + v := (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$$

é uma operação (binária) em $\mathbb{R}^n$ satisfazendo:

$A_1 -$ **Associativa**: $(u + v) + w = u + (v + w), \ \forall u, v, w \in \mathbb{R}^n$.

Sejam $u = (a_1, \ldots, a_n), v = (b_1, \ldots, b_n), w = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
(u+v)+w &= ((a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n)) + (c_1, \ldots, c_n) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) + (c_1, \ldots, c_n) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= ((a_1 + b_1) + c_1, \ldots, (a_n + b_n) + c_n) \\
\text{A1 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= (a_1 + (b_1 + c_1), \ldots, a_n + (b_n + c_n)) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= (a_1, \ldots, a_n) + (b_1 + c_1, \ldots, b_n + c_n) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= (a_1, \ldots, a_n) + ((b_1, \ldots, b_n) + (c_1, \ldots, c_n)) = u + (v + w).
\end{aligned}$$

Exemplo: Espaço $\mathbb{R}^n$

A_2- **Comutativa**: $u + v = v + u, \ \forall u, v \in \mathbb{R}^n$.

Sejam $u = (a_1, \ldots, a_n), v = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} u + v &= (a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) \\ \text{def de } + \rightarrow \quad &= (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) \\ \text{A2 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= (b_1 + a_1, \ldots, b_n + a_n) \\ \text{def de } + \rightarrow \quad &= (b_1, \ldots, b_n) + (a_1, \ldots, a_n) = v + u. \end{aligned}$$

A_3- **Elemento Neutro**: existe 0 tal que $u + 0 = 0 + u = u, \ \forall u \in \mathbb{R}^n$.

Sejam $0 = (0, \ldots, 0)$ e $u = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} u + 0 &= (a_1, \ldots, a_n) + (0, \ldots, 0) \\ \text{def de } + \rightarrow \quad &= (a_1 + 0, \ldots, a_n + 0) \\ \text{A3 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= (a_1, \ldots, a_n) = u. \end{aligned}$$

Analogamente, $0 + u = u, \ \forall u \in V$.

Exemplo: Espaço $\mathbb{R}^n$

A_2- **Comutativa**: $u+v=v+u, \ \forall u,v\in\mathbb{R}^n$.

Sejam $u=(a_1,\ldots,a_n), v=(b_1,\ldots,b_n)\in\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
u+v &= (a_1,\ldots,a_n)+(b_1,\ldots,b_n)\\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= (a_1+b_1,\ldots,a_n+b_n)\\
\text{A2 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= (b_1+a_1,\ldots,b_n+a_n)\\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= (b_1,\ldots,b_n)+(a_1,\ldots,a_n)=v+u.
\end{aligned}$$

A_3- **Elemento Neutro**: existe 0 tal que $u+0=0+u=u, \ \forall u\in\mathbb{R}^n$.

Sejam $0=(0,\ldots,0)$ e $u=(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
u+0 &= (a_1,\ldots,a_n)+(0,\ldots,0)\\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= (a_1+0,\ldots,a_n+0)\\
\text{A3 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= (a_1,\ldots,a_n)=u.
\end{aligned}$$

Analogamente, $0+u=u, \ \forall u\in V$.

Exemplo: Espaço $\mathbb{R}^n$

A_2- **Comutativa**: $u+v=v+u, \ \forall u,v\in\mathbb{R}^n$.

Sejam $u=(a_1,\ldots,a_n), v=(b_1,\ldots,b_n)\in\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
u+v &= (a_1,\ldots,a_n)+(b_1,\ldots,b_n)\\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= (a_1+b_1,\ldots,a_n+b_n)\\
\text{A2 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= (b_1+a_1,\ldots,b_n+a_n)\\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= (b_1,\ldots,b_n)+(a_1,\ldots,a_n)=v+u.
\end{aligned}$$

A_3- **Elemento Neutro**: existe 0 tal que $u+0=0+u=u, \ \forall u\in\mathbb{R}^n$.

Sejam $0=(0,\ldots,0)$ e $u=(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
u+0 &= (a_1,\ldots,a_n)+(0,\ldots,0)\\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= (a_1+0,\ldots,a_n+0)\\
\text{A3 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= (a_1,\ldots,a_n)=u.
\end{aligned}$$

Analogamente, $0+u=u, \ \forall u\in V$.

Exemplo: Espaço $\mathbb{R}^n$

A_2- **Comutativa**: $u+v=v+u, \ \forall u,v\in\mathbb{R}^n$.

Sejam $u=(a_1,\dots,a_n)$, $v=(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} u+v &= (a_1,\dots,a_n)+(b_1,\dots,b_n) \\ \text{def de } + \rightarrow \quad &= (a_1+b_1,\dots,a_n+b_n) \\ \text{A2 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= (b_1+a_1,\dots,b_n+a_n) \\ \text{def de } + \rightarrow \quad &= (b_1,\dots,b_n)+(a_1,\dots,a_n)=v+u. \end{aligned}$$

A_3- **Elemento Neutro**: existe 0 tal que $u+0=0+u=u, \ \forall u\in\mathbb{R}^n$.

Sejam $0=(0,\dots,0)$ e $u=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} u+0 &= (a_1,\dots,a_n)+(0,\dots,0) \\ \text{def de } + \rightarrow \quad &= (a_1+0,\dots,a_n+0) \\ \text{A3 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= (a_1,\dots,a_n)=u. \end{aligned}$$

Analogamente, $0+u=u, \ \forall u\in V$.

Exemplo: Espaço $\mathbb{R}^n$

A_2- **Comutativa**: $u+v=v+u, \ \forall u,v \in \mathbb{R}^n$.

Sejam $u=(a_1,\dots,a_n), v=(b_1,\dots,b_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} u+v &= (a_1,\dots,a_n)+(b_1,\dots,b_n) \\ \text{def de } + \rightarrow &= (a_1+b_1,\dots,a_n+b_n) \\ \text{A2 em } \mathbb{R} \rightarrow &= (b_1+a_1,\dots,b_n+a_n) \\ \text{def de } + \rightarrow &= (b_1,\dots,b_n)+(a_1,\dots,a_n) = v+u. \end{aligned}$$

A_3- **Elemento Neutro**: existe 0 tal que $u+0=0+u=u, \ \forall u \in \mathbb{R}^n$.

Sejam $0=(0,\dots,0)$ e $u=(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} u+0 &= (a_1,\dots,a_n)+(0,\dots,0) \\ \text{def de } + \rightarrow &= (a_1+0,\dots,a_n+0) \\ \text{A3 em } \mathbb{R} \rightarrow &= (a_1,\dots,a_n) = u. \end{aligned}$$

Analogamente, $0+u=u, \ \forall u \in V$.

Exemplo: Espaço $\mathbb{R}^n$

A_2- **Comutativa**: $u+v=v+u, \ \forall u,v\in\mathbb{R}^n$.

Sejam $u=(a_1,\dots,a_n)$, $v=(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} u+v &= (a_1,\dots,a_n)+(b_1,\dots,b_n)\\ \text{def de } + \rightarrow \quad &= (a_1+b_1,\dots,a_n+b_n)\\ \text{A2 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= (b_1+a_1,\dots,b_n+a_n)\\ \text{def de } + \rightarrow \quad &= (b_1,\dots,b_n)+(a_1,\dots,a_n)=v+u. \end{aligned}$$

A_3- **Elemento Neutro**: existe 0 tal que $u+0=0+u=u, \ \forall u\in\mathbb{R}^n$.

Sejam $0=(0,\dots,0)$ e $u=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} u+0 &= (a_1,\dots,a_n)+(0,\dots,0)\\ \text{def de } + \rightarrow \quad &= (a_1+0,\dots,a_n+0)\\ \text{A3 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= (a_1,\dots,a_n)=u. \end{aligned}$$

Analogamente, $0+u=u, \ \forall u\in V$.

Exemplo: Espaço $\mathbb{R}^n$

A_2- **Comutativa**: $u+v=v+u, \ \forall u,v\in\mathbb{R}^n$.

Sejam $u=(a_1,\ldots,a_n)$, $v=(b_1,\ldots,b_n)\in\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} u+v &= (a_1,\ldots,a_n)+(b_1,\ldots,b_n) \\ \text{def de } + \rightarrow &= (a_1+b_1,\ldots,a_n+b_n) \\ \text{A2 em } \mathbb{R} \rightarrow &= (b_1+a_1,\ldots,b_n+a_n) \\ \text{def de } + \rightarrow &= (b_1,\ldots,b_n)+(a_1,\ldots,a_n)=v+u. \end{aligned}$$

A_3- **Elemento Neutro**: existe 0 tal que $u+0=0+u=u, \ \forall u\in\mathbb{R}^n$.

Sejam $0=(0,\ldots,0)$ e $u=(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} u+0 &= (a_1,\ldots,a_n)+(0,\ldots,0) \\ \text{def de } + \rightarrow &= (a_1+0,\ldots,a_n+0) \\ \text{A3 em } \mathbb{R} \rightarrow &= (a_1,\ldots,a_n)=u. \end{aligned}$$

Analogamente, $0+u=u, \ \forall u\in V$.

Exemplo: Espaço $\mathbb{R}^n$

A_2- **Comutativa**: $u+v=v+u, \ \forall u,v\in\mathbb{R}^n$.

Sejam $u=(a_1,\dots,a_n)$, $v=(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} u+v &= (a_1,\dots,a_n)+(b_1,\dots,b_n) \\ \text{def de } + \rightarrow \quad &= (a_1+b_1,\dots,a_n+b_n) \\ \text{A2 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= (b_1+a_1,\dots,b_n+a_n) \\ \text{def de } + \rightarrow \quad &= (b_1,\dots,b_n)+(a_1,\dots,a_n)=v+u. \end{aligned}$$

A_3- **Elemento Neutro**: existe 0 tal que $u+0=0+u=u, \ \forall u\in\mathbb{R}^n$.

Sejam $0=(0,\dots,0)$ e $u=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} u+0 &= (a_1,\dots,a_n)+(0,\dots,0) \\ \text{def de } + \rightarrow \quad &= (a_1+0,\dots,a_n+0) \\ \text{A3 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= (a_1,\dots,a_n)=u. \end{aligned}$$

Analogamente, $0+u=u, \ \forall u\in V$.

Exemplo: Espaço $\mathbb{R}^n$

A_2- **Comutativa**: $u + v = v + u, \;\; \forall u, v \in \mathbb{R}^n$.

Sejam $u = (a_1, \ldots, a_n), v = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} u + v \quad &= (a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) \\ \text{def de } + \rightarrow \quad &= (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) \\ \text{A2 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= (b_1 + a_1, \ldots, b_n + a_n) \\ \text{def de } + \rightarrow \quad &= (b_1, \ldots, b_n) + (a_1, \ldots, a_n) = v + u. \end{aligned}$$

A_3- **Elemento Neutro**: existe 0 tal que $u + 0 = 0 + u = u, \;\; \forall u \in \mathbb{R}^n$.

Sejam $0 = (0, \ldots, 0)$ e $u = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} u + 0 \quad &= (a_1, \ldots, a_n) + (0, \ldots, 0) \\ \text{def de } + \rightarrow \quad &= (a_1 + 0, \ldots, a_n + 0) \\ \text{A3 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= (a_1, \ldots, a_n) = u. \end{aligned}$$

Analogamente, $0 + u = u, \;\; \forall u \in V$.

Exemplo: Espaço $\mathbb{R}^n$

A_2- **Comutativa**: $u+v=v+u, \ \forall u,v\in\mathbb{R}^n$.

Sejam $u=(a_1,\ldots,a_n), v=(b_1,\ldots,b_n)\in\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
u+v &= (a_1,\ldots,a_n)+(b_1,\ldots,b_n)\\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= (a_1+b_1,\ldots,a_n+b_n)\\
\text{A2 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= (b_1+a_1,\ldots,b_n+a_n)\\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= (b_1,\ldots,b_n)+(a_1,\ldots,a_n)=v+u.
\end{aligned}$$

A_3- **Elemento Neutro**: existe 0 tal que $u+0=0+u=u, \ \forall u\in\mathbb{R}^n$.

Sejam $0=(0,\ldots,0)$ e $u=(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
u+0 &= (a_1,\ldots,a_n)+(0,\ldots,0)\\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= (a_1+0,\ldots,a_n+0)\\
\text{A3 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= (a_1,\ldots,a_n)=u.
\end{aligned}$$

Analogamente, $0+u=u, \ \forall u\in V$.

Exemplo: $\mathbb{R}^n$

A_4- **Elemento Inverso**: para todo $u \in \mathbb{R}^n$ existe $-u \in \mathbb{R}^n$ tal que $u + (-u) = -u + u = 0, \ \forall u \in \mathbb{R}^n$.

Dado $u = (a_1, \ldots, a_n)$, seja $-u = (-a_1, \ldots, -a_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$
\begin{aligned}
u + (-u) & = (a_1, \ldots, a_n) + (-a_1, \ldots, -a_n) \\
\text{def de } + \rightarrow & = (a_1 + (-a_1), \ldots, a_n + (-a_n)) \\
\text{A4 em } \mathbb{R} \rightarrow & = (0, \ldots, 0) = 0.
\end{aligned}
$$

Analogamente, $-u + u = 0, \ \forall u \in \mathbb{R}^n$.

$(\mathbb{R}^n, +)$ é um grupo abeliano. (Apenas a modo informativo)

Exemplo: $\mathbb{R}^n$

A_4- **Elemento Inverso**: para todo $u \in \mathbb{R}^n$ existe $-u \in \mathbb{R}^n$ tal que $u + (-u) = -u + u = 0, \ \forall u \in \mathbb{R}^n$.

Dado $u = (a_1, \ldots, a_n)$, seja $-u = (-a_1, \ldots, -a_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$
\begin{aligned}
u + (-u) &= (a_1, \ldots, a_n) + (-a_1, \ldots, -a_n) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= (a_1 + (-a_1), \ldots, a_n + (-a_n)) \\
\text{A4 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= (0, \ldots, 0) = 0.
\end{aligned}
$$

Analogamente, $-u + u = 0, \ \forall u \in \mathbb{R}^n$.

$(\mathbb{R}^n, +)$ é um grupo abeliano. (Apenas a modo informativo)

Exemplo: $\mathbb{R}^n$

A_4- **Elemento Inverso**: para todo $u \in \mathbb{R}^n$ existe $-u \in \mathbb{R}^n$ tal que $u + (-u) = -u + u = 0, \ \forall u \in \mathbb{R}^n$.

Dado $u = (a_1, \dots, a_n)$, seja $-u = (-a_1, \dots, -a_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} u + (-u) &= (a_1, \dots, a_n) + (-a_1, \dots, -a_n) \\ \text{def de } + \rightarrow \quad &= (a_1 + (-a_1), \dots, a_n + (-a_n)) \\ \text{A4 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= (0, \dots, 0) = 0. \end{aligned}$$

Analogamente, $-u + u = 0, \ \forall u \in \mathbb{R}^n$.

$(\mathbb{R}^n, +)$ é um grupo abeliano. (Apenas a modo informativo)

Exemplo: $\mathbb{R}^n$

A_4- **Elemento Inverso**: para todo $u \in \mathbb{R}^n$ existe $-u \in \mathbb{R}^n$ tal que $u + (-u) = -u + u = 0, \ \forall u \in \mathbb{R}^n$.

Dado $u = (a_1, \ldots, a_n)$, seja $-u = (-a_1, \ldots, -a_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} u + (-u) &= (a_1, \ldots, a_n) + (-a_1, \ldots, -a_n) \\ \text{def de } + \rightarrow \quad &= (a_1 + (-a_1), \ldots, a_n + (-a_n)) \\ \text{A4 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= (0, \ldots, 0) = 0. \end{aligned}$$

Analogamente, $-u + u = 0, \ \forall u \in \mathbb{R}^n$.

$(\mathbb{R}^n, +)$ é um grupo abeliano. (Apenas a modo informativo)

Exemplo: $\mathbb{R}^n$

A_4- **Elemento Inverso**: para todo $u \in \mathbb{R}^n$ existe $-u \in \mathbb{R}^n$ tal que
$u + (-u) = -u + u = 0, \;\; \forall u \in \mathbb{R}^n$.
Dado $u = (a_1, \ldots, a_n)$, seja $-u = (-a_1, \ldots, -a_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
u + (-u) &= (a_1, \ldots, a_n) + (-a_1, \ldots, -a_n) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= (a_1 + (-a_1), \ldots, a_n + (-a_n)) \\
\text{A4 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= (0, \ldots, 0) = 0.
\end{aligned}$$

Analogamente, $-u + u = 0, \;\; \forall u \in \mathbb{R}^n$.

$(\mathbb{R}^n, +)$ é um grupo abeliano. (Apenas a modo informativo)

Exemplo: $\mathbb{R}^n$

A_4- **Elemento Inverso**: para todo $u \in \mathbb{R}^n$ existe $-u \in \mathbb{R}^n$ tal que

$u + (-u) = -u + u = 0, \ \forall u \in \mathbb{R}^n$.

Dado $u = (a_1, \ldots, a_n)$, seja $-u = (-a_1, \ldots, -a_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
u + (-u) \quad & = (a_1, \ldots, a_n) + (-a_1, \ldots, -a_n) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad & = (a_1 + (-a_1), \ldots, a_n + (-a_n)) \\
\text{A4 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad & = (0, \ldots, 0) = 0.
\end{aligned}$$

Analogamente, $-u + u = 0, \ \forall u \in \mathbb{R}^n$.

$(\mathbb{R}^n, +)$ é um grupo abeliano. (Apenas a modo informativo)

Exemplo: $\mathbb{R}^n$

Multiplicação por Escalar: Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, a operação

$$\alpha . u := (\alpha a_1, \dots, \alpha a_n)$$

é uma operação satisfazendo:

$M_1 -$ **Associativa**: $\alpha.(\beta.u) = (\alpha\beta).u, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in \mathbb{R}^n$.

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
\alpha.(\beta.u) &= \alpha.(\beta.(a_1, \dots, a_n)) \\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= \alpha.(\beta a_1, \dots, \beta a_n) \\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= (\alpha(\beta a_1), \dots, \alpha(\beta a_n)) \\
\text{A1 em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow \quad &= ((\alpha\beta) a_1, \dots, (\alpha\beta) a_n) \\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= (\alpha\beta)(a_1, \dots, a_n) = (\alpha\beta).u.
\end{aligned}$$

Exemplo: $\mathbb{R}^n$

Multiplicação por Escalar: Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, a operação

$$\alpha.u := (\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n)$$

é uma operação satisfazendo:

$M_1 -$ **Associativa**: $\alpha.(\beta.u) = (\alpha\beta).u, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in \mathbb{R}^n$.

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
\alpha.(\beta.u) &= \alpha.(\beta.(a_1, \ldots, a_n)) \\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= \alpha.(\beta a_1, \ldots, \beta a_n) \\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= (\alpha(\beta a_1), \ldots, \alpha(\beta a_n)) \\
\text{A1 em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow \quad &= ((\alpha\beta) a_1, \ldots, (\alpha\beta) a_n) \\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= (\alpha\beta)(a_1, \ldots, a_n) = (\alpha\beta).u.
\end{aligned}$$

Exemplo: $\mathbb{R}^n$

Multiplicação por Escalar: Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, a operação

$$\alpha.u := (\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n)$$

é uma operação satisfazendo:

$M_1 -$ **Associativa**: $\alpha.(\beta.u) = (\alpha\beta).u, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in \mathbb{R}^n$.

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
\alpha.(\beta.u) &= \alpha.(\beta.(a_1, \ldots, a_n)) \\
\text{def de . } \rightarrow &= \alpha.(\beta a_1, \ldots, \beta a_n) \\
\text{def de . } \rightarrow &= (\alpha(\beta a_1), \ldots, \alpha(\beta a_n)) \\
\text{A1 em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow &= ((\alpha\beta)a_1, \ldots, (\alpha\beta)a_n) \\
\text{def de . } \rightarrow &= (\alpha\beta)(a_1, \ldots, a_n) = (\alpha\beta).u.
\end{aligned}$$

Exemplo: $\mathbb{R}^n$

Multiplicação por Escalar: Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, a operação

$$\alpha.u := (\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n)$$

é uma operação satisfazendo:

$M_1 -$ **Associativa**: $\alpha.(\beta.u) = (\alpha\beta).u, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in \mathbb{R}^n$.

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
\alpha.(\beta.u) &= \alpha.(\beta.(a_1, \ldots, a_n)) \\
\text{def de . } \rightarrow &= \alpha.(\beta a_1, \ldots, \beta a_n) \\
\text{def de . } \rightarrow &= (\alpha(\beta a_1), \ldots, \alpha(\beta a_n)) \\
\text{A1 em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow &= ((\alpha\beta)a_1, \ldots, (\alpha\beta)a_n) \\
\text{def de . } \rightarrow &= (\alpha\beta)(a_1, \ldots, a_n) = (\alpha\beta).u.
\end{aligned}$$

Exemplo: $\mathbb{R}^n$

Multiplicação por Escalar: Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, a operação

$$\alpha.u := (\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n)$$

é uma operação satisfazendo:

$M_1 -$ **Associativa**: $\alpha.(\beta.u) = (\alpha\beta).u, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in \mathbb{R}^n$.

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
\alpha.(\beta.u) &= \alpha.(\beta.(a_1, \ldots, a_n)) \\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= \alpha.(\beta a_1, \ldots, \beta a_n) \\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= (\alpha(\beta a_1), \ldots, \alpha(\beta a_n)) \\
\text{A1 em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow \quad &= ((\alpha\beta) a_1, \ldots, (\alpha\beta) a_n) \\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= (\alpha\beta)(a_1, \ldots, a_n) = (\alpha\beta).u.
\end{aligned}$$

Exemplo: $\mathbb{R}^n$

Multiplicação por Escalar: Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, a operação

$$\alpha.u := (\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n)$$

é uma operação satisfazendo:

$M_1 -$ **Associativa**: $\alpha.(\beta.u) = (\alpha\beta).u, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in \mathbb{R}^n$.

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
\alpha.(\beta.u) &= \alpha.(\beta.(a_1, \ldots, a_n)) \\
\text{def de .} \rightarrow \quad &= \alpha.(\beta a_1, \ldots, \beta a_n) \\
\text{def de .} \rightarrow \quad &= (\alpha(\beta a_1), \ldots, \alpha(\beta a_n)) \\
\text{A1 em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow \quad &= ((\alpha\beta) a_1, \ldots, (\alpha\beta) a_n) \\
\text{def de .} \rightarrow \quad &= (\alpha\beta)(a_1, \ldots, a_n) = (\alpha\beta).u.
\end{aligned}$$

Exemplo: $\mathbb{R}^n$

M_2- **Distributiva sobre a adição de escalares**: $(\alpha+\beta).u = \alpha.u + \beta.u$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in \mathbb{R}^n$.

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
(\alpha+\beta).u &= (\alpha+\beta).(a_1, \ldots, a_n) \\
\text{def de . } \rightarrow &= ((\alpha+\beta)a_1, \ldots, (\alpha+\beta)a_n) \\
\text{distributiva em } \mathbb{R} \rightarrow &= (\alpha a_1 + \beta a_1, \ldots, \alpha a_n + \beta a_n) \\
\text{def de } + \rightarrow &= (\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n) + (\beta a_1, \ldots, \beta a_n) \\
\text{def de . } \rightarrow &= \alpha.(a_1, \ldots, a_n) + \beta.(a_1, \ldots, a_n) = \alpha.u + \beta.u
\end{aligned}$$

M_3- **Distributiva sobre a adição de vetores**: $\alpha.(u+v) = \alpha.u + \alpha.v$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$.

Exemplo: $\mathbb{R}^n$

M_2- **Distributiva sobre a adição de escalares**: $(\alpha+\beta).u = \alpha.u + \beta.u$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in \mathbb{R}^n$.

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$
\begin{aligned}
(\alpha+\beta).u &= (\alpha+\beta).(a_1, \ldots, a_n)\\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= ((\alpha+\beta)a_1, \ldots, (\alpha+\beta)a_n)\\
\text{distributiva em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= (\alpha a_1 + \beta a_1, \ldots, \alpha a_n + \beta a_n)\\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= (\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n) + (\beta a_1, \ldots, \beta a_n)\\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= \alpha.(a_1, \ldots, a_n) + \beta.(a_1, \ldots, a_n) = \alpha.u + \beta.u
\end{aligned}
$$

M_3- **Distributiva sobre a adição de vetores**: $\alpha.(u+v) = \alpha.u + \alpha.v$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$.

Exemplo: $\mathbb{R}^n$

M_2- **Distributiva sobre a adição de escalares**: $(\alpha+\beta).u = \alpha.u + \beta.u$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in \mathbb{R}^n$.

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
(\alpha+\beta).u &= (\alpha+\beta).(a_1,\dots,a_n) \\
\text{def de . } \rightarrow &= ((\alpha+\beta)a_1,\dots,(\alpha+\beta)a_n) \\
\text{distributiva em } \mathbb{R} \rightarrow &= (\alpha a_1 + \beta a_1,\dots,\alpha a_n + \beta a_n) \\
\text{def de } + \rightarrow &= (\alpha a_1,\dots,\alpha a_n) + (\beta a_1,\dots,\beta a_n) \\
\text{def de . } \rightarrow &= \alpha.(a_1,\dots,a_n) + \beta.(a_1,\dots,a_n) = \alpha.u + \beta.u
\end{aligned}$$

M_3- **Distributiva sobre a adição de vetores**: $\alpha.(u+v) = \alpha.u + \alpha.v$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$.

Exemplo: $\mathbb{R}^n$

M_2- **Distributiva sobre a adição de escalares**: $(\alpha+\beta).u = \alpha.u + \beta.u$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in \mathbb{R}^n$.

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$
\begin{aligned}
(\alpha+\beta).u &= (\alpha+\beta).(a_1, \ldots, a_n) \\
\text{def de . } \rightarrow\ &= ((\alpha+\beta)a_1, \ldots, (\alpha+\beta)a_n) \\
\text{distributiva em } \mathbb{R} \rightarrow\ &= (\alpha a_1 + \beta a_1, \ldots, \alpha a_n + \beta a_n) \\
\text{def de } + \rightarrow\ &= (\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n) + (\beta a_1, \ldots, \beta a_n) \\
\text{def de . } \rightarrow\ &= \alpha.(a_1, \ldots, a_n) + \beta.(a_1, \ldots, a_n) = \alpha.u + \beta.u
\end{aligned}
$$

M_3- **Distributiva sobre a adição de vetores**: $\alpha.(u+v) = \alpha.u + \alpha.v$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$.

Exemplo: $\mathbb{R}^n$

M_2- **Distributiva sobre a adição de escalares**: $(\alpha+\beta).u = \alpha.u + \beta.u$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in \mathbb{R}^n$.

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$
\begin{aligned}
(\alpha+\beta).u &= (\alpha+\beta).(a_1, \ldots, a_n) \\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= ((\alpha+\beta)a_1, \ldots, (\alpha+\beta)a_n) \\
\text{distributiva em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= (\alpha a_1 + \beta a_1, \ldots, \alpha a_n + \beta a_n) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= (\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n) + (\beta a_1, \ldots, \beta a_n) \\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= \alpha.(a_1, \ldots, a_n) + \beta.(a_1, \ldots, a_n) = \alpha.u + \beta.u
\end{aligned}
$$

M_3- **Distributiva sobre a adição de vetores**: $\alpha.(u+v) = \alpha.u + \alpha.v$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$.

Exemplo: $\mathbb{R}^n$

M_2- **Distributiva sobre a adição de escalares**: $(\alpha+\beta).u = \alpha.u + \beta.u$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in \mathbb{R}^n$.

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$
\begin{aligned}
(\alpha+\beta).u &= (\alpha+\beta).(a_1, \dots, a_n) \\
\text{def de . } \rightarrow &= ((\alpha+\beta)a_1, \dots, (\alpha+\beta)a_n) \\
\text{distributiva em } \mathbb{R} \rightarrow &= (\alpha a_1 + \beta a_1, \dots, \alpha a_n + \beta a_n) \\
\text{def de } + \rightarrow &= (\alpha a_1, \dots, \alpha a_n) + (\beta a_1, \dots, \beta a_n) \\
\text{def de . } \rightarrow &= \alpha.(a_1, \dots, a_n) + \beta.(a_1, \dots, a_n) = \alpha.u + \beta.u
\end{aligned}
$$

M_3- **Distributiva sobre a adição de vetores**: $\alpha.(u+v) = \alpha.u + \alpha.v$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$.

Exemplo: $\mathbb{R}^n$

M_2- **Distributiva sobre a adição de escalares**: $(\alpha+\beta).u = \alpha.u + \beta.u$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in \mathbb{R}^n$.

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
(\alpha+\beta).u &= (\alpha+\beta).(a_1,\dots,a_n) \\
\text{def de . } \rightarrow &= ((\alpha+\beta)a_1,\dots,(\alpha+\beta)a_n) \\
\text{distributiva em } \mathbb{R} \rightarrow &= (\alpha a_1+\beta a_1,\dots,\alpha a_n+\beta a_n) \\
\text{def de } + \rightarrow &= (\alpha a_1,\dots,\alpha a_n)+(\beta a_1,\dots,\beta a_n) \\
\text{def de . } \rightarrow &= \alpha.(a_1,\dots,a_n)+\beta.(a_1,\dots,a_n) = \alpha.u+\beta.u
\end{aligned}$$

M_3- **Distributiva sobre a adição de vetores**: $\alpha.(u+v) = \alpha.u + \alpha.v$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$.

Exemplo: $\mathbb{R}^n$

M_4- **Identidade**: $1.u = u, \;\; \forall u \in \mathbb{R}^n$. Seja $u = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} 1.u &= 1.(a_1, \ldots, a_n) \\ \text{def de . } \rightarrow \quad &= (1.a_1, \ldots, 1.a_n) \\ \text{1 é identidade em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow \quad &= (a_1, \ldots, a_n) = u. \end{aligned}$$

Observações:

Obs 1: As operações $+$ e $.$ em $\mathbb{R}^n$ definidas nesse exemplo são chamadas operações usuais em $\mathbb{R}^n$.

Obs 2: As propriedades A_1, A_2, A_3, A_4 e M_1, M_2, M_3, M_4 dependem do conjunto e também das operações.

Exemplo: $\mathbb{R}^n$

M_4- **Identidade**: $1.u = u, \ \forall u \in \mathbb{R}^n$. Seja $u = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} 1.u &= 1.(a_1, \ldots, a_n) \\ \text{def de . } \rightarrow &= (1.a_1, \ldots, 1.a_n) \\ \text{1 é identidade em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow &= (a_1, \ldots, a_n) = u. \end{aligned}$$

Observações:

Obs 1: As operações $+$ e . em $\mathbb{R}^n$ definidas nesse exemplo são chamadas operações usuais em $\mathbb{R}^n$.

Obs 2: As propriedades A_1, A_2, A_3, A_4 e M_1, M_2, M_3, M_4 dependem do conjunto e também das operações.

Exemplo: $\mathbb{R}^n$

M_4- **Identidade**: $1.u = u, \ \forall u \in \mathbb{R}^n$. Seja $u = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$
\begin{aligned}
1.u &= 1.(a_1, \ldots, a_n) \\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= (1.a_1, \ldots, 1.a_n) \\
\text{1 é identidade em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow \quad &= (a_1, \ldots, a_n) = u.
\end{aligned}
$$

Observações:

Obs 1: As operações $+$ e . em $\mathbb{R}^n$ definidas nesse exemplo são chamadas operações usuais em $\mathbb{R}^n$.

Obs 2: As propriedades A_1, A_2, A_3, A_4 e M_1, M_2, M_3, M_4 dependem do conjunto e também das operações.

Exemplo: $\mathbb{R}^n$

M_4- **Identidade**: $1.u = u, \ \ \forall u \in \mathbb{R}^n$. Seja $u = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$
\begin{aligned}
1.u &= 1.(a_1, \ldots, a_n) \\
\text{def de .} \rightarrow \quad &= (1.a_1, \ldots, 1.a_n) \\
\text{1 é identidade em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow \quad &= (a_1, \ldots, a_n) = u.
\end{aligned}
$$

Observações:

Obs 1: As operações $+$ e . em $\mathbb{R}^n$ definidas nesse exemplo são chamadas operações usuais em $\mathbb{R}^n$.

Obs 2: As propriedades A_1, A_2, A_3, A_4 e M_1, M_2, M_3, M_4 dependem do conjunto e também das operações.

Exemplo: $\mathbb{R}^n$

M_4- **Identidade**: $1.u = u, \ \forall u \in \mathbb{R}^n$. Seja $u = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} 1.u &= 1.(a_1, \ldots, a_n) \\ \text{def de . } \rightarrow \quad &= (1.a_1, \ldots, 1.a_n) \\ \text{1 é identidade em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow \quad &= (a_1, \ldots, a_n) = u. \end{aligned}$$

Observações:

Obs 1: As operações $+$ e $.$ em $\mathbb{R}^n$ definidas nesse exemplo são chamadas operações usuais em $\mathbb{R}^n$.

Obs 2: As propriedades A_1, A_2, A_3, A_4 e M_1, M_2, M_3, M_4 dependem do conjunto e também das operações.

Exemplo: $\mathbb{R}^n$

M_4- **Identidade**: $1.u = u, \ \forall u \in \mathbb{R}^n$. Seja $u = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} 1.u &= 1.(a_1, \dots, a_n) \\ \text{def de . } \rightarrow \quad &= (1.a_1, \dots, 1.a_n) \\ \text{1 é identidade em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow \quad &= (a_1, \dots, a_n) = u. \end{aligned}$$

Observações:

Obs 1: As operações $+$ e . em $\mathbb{R}^n$ definidas nesse exemplo são chamadas operações usuais em $\mathbb{R}^n$.

Obs 2: As propriedades A_1, A_2, A_3, A_4 e M_1, M_2, M_3, M_4 dependem do conjunto e também das operações.

Exemplo: $\mathbb{R}^n$

M_4- **Identidade**: $1.u = u, \ \forall u \in \mathbb{R}^n$. Seja $u = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

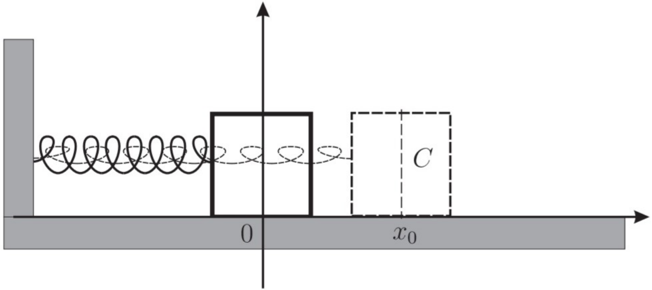
$$\begin{aligned} 1.u &= 1.(a_1, \ldots, a_n) \\ \text{def de . } \rightarrow \quad &= (1.a_1, \ldots, 1.a_n) \\ \text{1 é identidade em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow \quad &= (a_1, \ldots, a_n) = u. \end{aligned}$$

Observações:

Obs 1: As operações $+$ e . em $\mathbb{R}^n$ definidas nesse exemplo são chamadas operações usuais em $\mathbb{R}^n$.

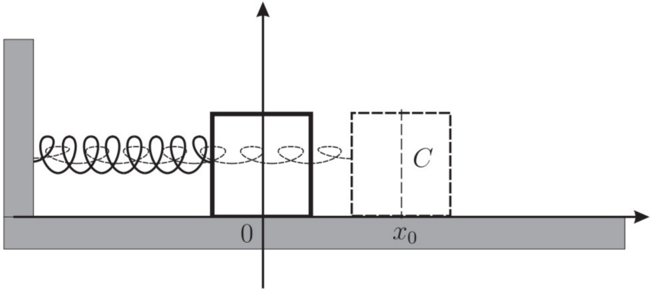
Obs 2: As propriedades A_1, A_2, A_3, A_4 e M_1, M_2, M_3, M_4 dependem do conjunto e também das operações.

Espaço das soluções do sistema massa-mola



- Vamos considerar o sistema massa-mola onde um corpo C de massa m é arrastado até a posição x_0 de um sistema de referência cuja imagem se localiza na posição natural da mola.

Espaço das soluções do sistema massa-mola



- Vamos considerar o sistema massa-mola onde um corpo C de massa m é arrastado até a posição x_0 de um sistema de referência cuja imagem se localiza na posição natural da mola.

Exemplo: Espaço das soluções do sistema massa-mola

- O corpo C é solto no tempo $t = 0$ com velocidade inicial $v_0 = 0$,
- Supondo a restrição do ar e o atrito desprezadas, pela lei de Hooke, $F = -kx$, onde k é a constante de rigidez da mola. O sinal negativo aparece devido à direção e o sentido da força,
- Pela segunda lei de Newton $F(t) = ma(t)$ e supondo $m = 1$ $F(t) = a(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$, assim $\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$.

Exemplo: Espaço das soluções do sistema massa-mola

Seja $\mathbb{S}$ o conjunto de todas as soluções da equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0. \tag{1}$$

- $\mathbb{S}$ é um conjunto não vazio pois as funções $\cos\sqrt{k}t$ e $\sin\sqrt{k}t$ verificam a equação (1).
- **Adição:** Dados $s_1, s_2 \in \mathbb{S}$, a operação soma é uma operação binária. Isto é,

$$s_1 + s_2$$

$s = s_1 + s_2 \in \mathbb{S}$ ou $s_1 + s_2$ é solução da equação (1).

$$\begin{aligned} \frac{d^2s}{dt^2} + ks &= \frac{d^2(s_1+s_2)}{dt^2} + k(s_1+s_2) \\ &= \frac{d^2s_1}{dt^2} + ks_1 + \frac{d^2s_2}{dt^2} + ks_2 = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Exemplo: Espaço das soluções do sistema massa-mola

Seja $\mathbb{S}$ o conjunto de todas as soluções da equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0. \tag{1}$$

- $\mathbb{S}$ é um conjunto não vazio pois as funções $\cos\sqrt{k}t$ e $\sin\sqrt{k}t$ verificam a equação (1).
- **Adição:** Dados $s_1, s_2 \in \mathbb{S}$, a operação soma é uma operação binária. Isto é,

$$s_1 + s_2$$

$s = s_1 + s_2 \in \mathbb{S}$ ou $s_1 + s_2$ é solução da equação (1).

$$\begin{aligned} \frac{d^2s}{dt^2} + ks &= \frac{d^2(s_1+s_2)}{dt^2} + k(s_1+s_2) \\ &= \frac{d^2s_1}{dt^2} + ks_1 + \frac{d^2s_2}{dt^2} + ks_2 = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Exemplo: Espaço das soluções do sistema massa-mola

Seja $\mathbb{S}$ o conjunto de todas as soluções da equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0. \tag{1}$$

- $\mathbb{S}$ é um conjunto não vazio pois as funções $\cos\sqrt{k}t$ e $\sin\sqrt{k}t$ verificam a equação (1).
- **Adição:** Dados $s_1, s_2 \in \mathbb{S}$, a operação soma é uma operação binária. Isto é,

$$s_1 + s_2$$

$s = s_1 + s_2 \in \mathbb{S}$ ou $s_1 + s_2$ é solução da equação (1).

$$\begin{aligned} \frac{d^2s}{dt^2} + ks &= \frac{d^2(s_1+s_2)}{dt^2} + k(s_1+s_2) \\ &= \frac{d^2s_1}{dt^2} + ks_1 + \frac{d^2s_2}{dt^2} + ks_2 = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Exemplo: Espaço das soluções do sistema massa-mola

Seja $\mathbb{S}$ o conjunto de todas as soluções da equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0. \tag{1}$$

- $\mathbb{S}$ é um conjunto não vazio pois as funções $\cos\sqrt{k}t$ e $\sin\sqrt{k}t$ verificam a equação (1).
- **Adição:** Dados $s_1, s_2 \in \mathbb{S}$, a operação soma é uma operação binária. Isto é,

$$s_1 + s_2$$

$s = s_1 + s_2 \in \mathbb{S}$ ou $s_1 + s_2$ é solução da equação (1).

$$\begin{aligned} \frac{d^2s}{dt^2} + ks &= \frac{d^2(s_1+s_2)}{dt^2} + k(s_1+s_2) \\ &= \frac{d^2s_1}{dt^2} + ks_1 + \frac{d^2s_2}{dt^2} + ks_2 = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Exemplo: Espaço das soluções do sistema massa-mola

O espaço das soluções satisfaz as seguintes propriedades:

A_1- **Associativa**: $(s_1+s_2)+s_3 = s_1+(s_2+s_3), \ \forall s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{S}$.

A_2- **Comutativa**: $s_1+s_2 = s_2+s_1, \ \forall s_1, s_2 \in \mathbb{S}$.

A_3- **Elemento Neutro**: existe 0 tal que $s_1+0 = 0+s_1 = s_1, \ \forall s_1 \in \mathbb{S}$.

Analogamente, $0+s_1 = s_1, \ \forall s_1 \in \mathbb{S}$.

A_4- **Elemento Inverso**: para todo $s_1 \in \mathbb{S}$ existe $-s_1 \in \mathbb{S}$ tal que

$s_1+(-s_1) = -s_1+s_1 = 0, \ \forall s_1 \in \mathbb{S}$.

Exemplo: Espaço das soluções do sistema massa-mola

O espaço das soluções satisfaz as seguintes propriedades:

A_1- **Associativa**: $(s_1 + s_2) + s_3 = s_1 + (s_2 + s_3),\ \ \forall s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{S}$.

A_2- **Comutativa**: $s_1 + s_2 = s_2 + s_1,\ \ \forall s_1, s_2 \in \mathbb{S}$.

A_3- **Elemento Neutro**: existe 0 tal que $s_1 + 0 = 0 + s_1 = s_1,\ \ \forall s_1 \in \mathbb{S}$.
Analogamente, $0 + s_1 = s_1,\ \ \forall s_1 \in \mathbb{S}$.

A_4- **Elemento Inverso**: para todo $s_1 \in \mathbb{S}$ existe $-s_1 \in \mathbb{S}$ tal que
$s_1 + (-s_1) = -s_1 + s_1 = 0,\ \ \forall s_1 \in \mathbb{S}$.

Exemplo: Espaço das soluções do sistema massa-mola

O espaço das soluções satisfaz as seguintes propriedades:

A_1- **Associativa**: $(s_1 + s_2) + s_3 = s_1 + (s_2 + s_3),\ \ \forall s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{S}$.

A_2- **Comutativa**: $s_1 + s_2 = s_2 + s_1,\ \ \forall s_1, s_2 \in \mathbb{S}$.

A_3- **Elemento Neutro**: existe 0 tal que $s_1 + 0 = 0 + s_1 = s_1,\ \ \forall s_1 \in \mathbb{S}$.

Analogamente, $0 + s_1 = s_1,\ \ \forall s_1 \in \mathbb{S}$.

A_4- **Elemento Inverso**: para todo $s_1 \in \mathbb{S}$ existe $-s_1 \in \mathbb{S}$ tal que

$s_1 + (-s_1) = -s_1 + s_1 = 0,\ \ \forall s_1 \in \mathbb{S}$.

Exemplo: Espaço das soluções do sistema massa-mola

O espaço das soluções satisfaz as seguintes propriedades:

A_1- **Associativa**: $(s_1 + s_2) + s_3 = s_1 + (s_2 + s_3), \;\; \forall s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{S}$.

A_2- **Comutativa**: $s_1 + s_2 = s_2 + s_1, \;\; \forall s_1, s_2 \in \mathbb{S}$.

A_3- **Elemento Neutro**: existe 0 tal que $s_1 + 0 = 0 + s_1 = s_1, \;\; \forall s_1 \in \mathbb{S}$.
Analogamente, $0 + s_1 = s_1, \;\; \forall s_1 \in \mathbb{S}$.

A_4- **Elemento Inverso**: para todo $s_1 \in \mathbb{S}$ existe $-s_1 \in \mathbb{S}$ tal que
$s_1 + (-s_1) = -s_1 + s_1 = 0, \;\; \forall s_1 \in \mathbb{S}$.

Exemplo: Espaço das soluções do sistema massa-mola

O espaço das soluções satisfaz as seguintes propriedades:

A_1- **Associativa**: $(s_1+s_2)+s_3=s_1+(s_2+s_3),\ \forall s_1,s_2,s_3\in\mathbb{S}$.

A_2- **Comutativa**: $s_1+s_2=s_2+s_1,\ \forall s_1,s_2\in\mathbb{S}$.

A_3- **Elemento Neutro**: existe 0 tal que $s_1+0=0+s_1=s_1,\ \forall s_1\in\mathbb{S}$.
Analogamente, $0+s_1=s_1,\ \forall s_1\in\mathbb{S}$.

A_4- **Elemento Inverso**: para todo $s_1\in\mathbb{S}$ existe $-s_1\in\mathbb{S}$ tal que
$s_1+(-s_1)=-s_1+s_1=0,\ \forall s_1\in\mathbb{S}$.

Exemplo: Espaço das soluções do sistema massa-mola

Multiplicação por Escalar: Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $s \in \mathbb{S}$, a operação

$$\alpha.s$$

é uma operação satisfazendo:

M_1- **Associativa**: $\alpha.(\beta.s) = (\alpha\beta).s, \quad \forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall s \in \mathbb{S}$.

M_2- **Distributiva sobre a adição de escalares**: $(\alpha + \beta).s = \alpha.s + \beta.s$, $\forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall s \in \mathbb{S}$.

M_3- **Distributiva sobre a adição de vetores**: $\alpha.(s_1 + s_2) = \alpha.s_1 + \alpha.s_2, \quad \forall\alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall s_1, s_2 \in \mathbb{S}$.

M_4- **Identidade**: $1.s_1 = s_1, \quad \forall s_1 \in \mathbb{S}$.

Exemplo: Espaço das soluções do sistema massa-mola

Multiplicação por Escalar: Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $s \in \mathbb{S}$, a operação

$$\alpha.s$$

é uma operação satisfazendo:

$M_1 -$ **Associativa**: $\alpha.(\beta.s) = (\alpha\beta).s, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall s \in \mathbb{S}$.

$M_2 -$ **Distributiva sobre a adição de escalares**: $(\alpha + \beta).s = \alpha.s + \beta.s$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall s \in \mathbb{S}$.

$M_3 -$ **Distributiva sobre a adição de vetores**: $\alpha.(s_1 + s_2) = \alpha.s_1 + \alpha.s_2, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall s_1, s_2 \in \mathbb{S}$.

$M_4 -$ **Identidade**: $1.s_1 = s_1, \quad \forall s_1 \in \mathbb{S}$.

Exemplo: Espaço das soluções do sistema massa-mola

Multiplicação por Escalar: Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $s \in \mathbb{S}$, a operação

$$\alpha.s$$

é uma operação satisfazendo:

M_1- **Associativa**: $\alpha.(\beta.s) = (\alpha\beta).s, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall s \in \mathbb{S}$.

M_2- **Distributiva sobre a adição de escalares**: $(\alpha + \beta).s = \alpha.s + \beta.s$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall s \in \mathbb{S}$.

M_3- **Distributiva sobre a adição de vetores**: $\alpha.(s_1 + s_2) = \alpha.s_1 + \alpha.s_2, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall s_1, s_2 \in \mathbb{S}$.

M_4- **Identidade**: $1.s_1 = s_1, \quad \forall s_1 \in \mathbb{S}$.

Exemplo: Espaço das soluções do sistema massa-mola

Multiplicação por Escalar: Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $s \in \mathbb{S}$, a operação

$$\alpha.s$$

é uma operação satisfazendo:

M_1- **Associativa**: $\alpha.(\beta.s) = (\alpha\beta).s, \quad \forall\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ e $\forall s \in \mathbb{S}$.

M_2- **Distributiva sobre a adição de escalares**: $(\alpha+\beta).s = \alpha.s + \beta.s$, $\forall\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ e $\forall s \in \mathbb{S}$.

M_3- **Distributiva sobre a adição de vetores**: $\alpha.(s_1+s_2) = \alpha.s_1 + \alpha.s_2, \ \forall\alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall s_1, s_2 \in \mathbb{S}$.

M_4- **Identidade**: $1.s_1 = s_1, \ \forall s_1 \in \mathbb{S}$.

Exemplo: Espaço das soluções do sistema massa-mola

Multiplicação por Escalar: Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $s \in \mathbb{S}$, a operação

$$\alpha.s$$

é uma operação satisfazendo:

M_1- **Associativa**: $\alpha.(\beta.s) = (\alpha\beta).s, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall s \in \mathbb{S}$.

M_2- **Distributiva sobre a adição de escalares**: $(\alpha + \beta).s = \alpha.s + \beta.s$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall s \in \mathbb{S}$.

M_3- **Distributiva sobre a adição de vetores**: $\alpha.(s_1 + s_2) = \alpha.s_1 + \alpha.s_2, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall s_1, s_2 \in \mathbb{S}$.

M_4- **Identidade**: $1.s_1 = s_1, \ \forall s_1 \in \mathbb{S}$.

Exemplo: Espaço das soluções do sistema massa-mola

Multiplicação por Escalar: Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $s \in \mathbb{S}$, a operação

$$\alpha.s$$

é uma operação satisfazendo:

M_1- **Associativa**: $\alpha.(\beta.s) = (\alpha\beta).s, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall s \in \mathbb{S}$.

M_2- **Distributiva sobre a adição de escalares**: $(\alpha + \beta).s = \alpha.s + \beta.s$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall s \in \mathbb{S}$.

M_3- **Distributiva sobre a adição de vetores**: $\alpha.(s_1 + s_2) = \alpha.s_1 + \alpha.s_2, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall s_1, s_2 \in \mathbb{S}$.

M_4- **Identidade**: $1.s_1 = s_1, \ \forall s_1 \in \mathbb{S}$.

Observações:

- Resumindo, consideramos dois conjuntos diferentes,
- Em cada um deles definimos a noção de soma entre os elementos desses conjuntos e a noção de multiplicação um número real por um elemento desse conjunto,
- A pesar de tratar-se de dois conjuntos de natureza diferente, vimos que esses conjuntos munidos dessas duas operações satisfazem as mesmas propriedades,
- O que têm em comum esses dois exemplos é que cada um desses conjuntos (munidos com uma soma e uma multiplicação por um número real) é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ (ou um $\mathbb{R}$-espaço vetorial).

Observações:

- Resumindo, consideramos dois conjuntos diferentes,
- Em cada um deles definimos a noção de soma entre os elementos desses conjuntos e a noção de multiplicação um número real por um elemento desse conjunto,
- A pesar de tratar-se de dois conjuntos de natureza diferente, vimos que esses conjuntos munidos dessas duas operações satisfazem as mesmas propriedades,
- O que têm em comum esses dois exemplos é que cada um desses conjuntos (munidos com uma soma e uma multiplicação por um número real) é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ (ou um $\mathbb{R}$-espaço vetorial).

Observações:

- Resumindo, consideramos dois conjuntos diferentes,
- Em cada um deles definimos a noção de soma entre os elementos desses conjuntos e a noção de multiplicação um número real por um elemento desse conjunto,
- A pesar de tratar-se de dois conjuntos de natureza diferente, vimos que esses conjuntos munidos dessas duas operações satisfazem as mesmas propriedades,
- O que têm em comum esses dois exemplos é que cada um desses conjuntos (munidos com uma soma e uma multiplicação por um número real) é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ (ou um $\mathbb{R}$-espaço vetorial).

Observações:

- Resumindo, consideramos dois conjuntos diferentes,
- Em cada um deles definimos a noção de soma entre os elementos desses conjuntos e a noção de multiplicação um número real por um elemento desse conjunto,
- A pesar de tratar-se de dois conjuntos de natureza diferente, vimos que esses conjuntos munidos dessas duas operações satisfazem as mesmas propriedades,
- O que têm em comum esses dois exemplos é que cada um desses conjuntos (munidos com uma soma e uma multiplicação por um número real) é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ (ou um $\mathbb{R}$-espaço vetorial).

Observações:

- Resumindo, consideramos dois conjuntos diferentes,
- Em cada um deles definimos a noção de soma entre os elementos desses conjuntos e a noção de multiplicação um número real por um elemento desse conjunto,
- A pesar de tratar-se de dois conjuntos de natureza diferente, vimos que esses conjuntos munidos dessas duas operações satisfazem as mesmas propriedades,
- O que têm em comum esses dois exemplos é que cada um desses conjuntos (munidos com uma soma e uma multiplicação por um número real) é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ (ou um $\mathbb{R}$-espaço vetorial).