Espaços Vetoriais

Bases 1

Álgebra Linear

Mariana Silveira - Cristian Coletti

Universidade Federal do ABC

Base

Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real finitamente gerado. Uma **base** para V é um conjunto finito $B \subset V$ tal que:

b_1. $[B] = V$.

b_2. B é L.I..

Exemplos

1. $V = \mathbb{R}^2$

   - $B = \{(1,0),(0,1)\}$ é uma base para $\mathbb{R}^2$ chamada base canônica.
   - $B_1 = \{(1,1),(0,1)\}$ é uma base para $\mathbb{R}^2$.

b_1. $[B_1] = \mathbb{R}^2$, pois para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ temos que $(x,y) = x(1,1) + (y-x)(0,1)$.

b_2. B_1 é L.I., pois os vetores de B_1 não são multiplos um do outro.

Obs: Um espaço vetorial pode admitir muitas bases.

Base

Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real finitamente gerado. Uma **base** para V é um conjunto finito $B \subset V$ tal que:

b_1. $[B] = V$.

b_2. B é L.I..

Exemplos

1. $V = \mathbb{R}^2$

   - $B = \{(1,0),(0,1)\}$ é uma base para $\mathbb{R}^2$ chamada base canônica.
   - $B_1 = \{(1,1),(0,1)\}$ é uma base para $\mathbb{R}^2$.

b_1. $[B_1] = \mathbb{R}^2$, pois para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ temos que $(x,y) = x(1,1) + (y-x)(0,1)$.

b_2. B_1 é L.I., pois os vetores de B_1 não são multiplos um do outro.

Obs: Um espaço vetorial pode admitir muitas bases.

Base

Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real finitamente gerado. Uma **base** para V é um conjunto finito $B \subset V$ tal que:

b_1. $[B] = V$.

b_2. B é L.I..

Exemplos

1. $V = \mathbb{R}^2$

   - $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ é uma base para $\mathbb{R}^2$ chamada base canônica.
   - $B_1 = \{(1, 1), (0, 1)\}$ é uma base para $\mathbb{R}^2$.

b_1. $[B_1] = \mathbb{R}^2$, pois para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ temos que $(x, y) = x(1, 1) + (y - x)(0, 1)$.

b_2. B_1 é L.I., pois os vetores de B_1 não são multiplos um do outro.

Obs: Um espaço vetorial pode admitir muitas bases.

Base

Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real finitamente gerado. Uma **base** para V é um conjunto finito $B \subset V$ tal que:

b_1. $[B] = V$.

b_2. B é L.I..

Exemplos

1. $V = \mathbb{R}^2$
   - $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ é uma base para $\mathbb{R}^2$ chamada base canônica.
   - $B_1 = \{(1, 1), (0, 1)\}$ é uma base para $\mathbb{R}^2$.

   b_1. $[B_1] = \mathbb{R}^2$, pois para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ temos que $(x, y) = x(1, 1) + (y - x)(0, 1)$.

   b_2. B_1 é L.I., pois os vetores de B_1 não são multiplos um do outro.

Obs: Um espaço vetorial pode admitir muitas bases.

Base

Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real finitamente gerado. Uma **base** para V é um conjunto finito $B \subset V$ tal que:

b_1. $[B] = V$.

b_2. B é L.I..

Exemplos

1. $V = \mathbb{R}^2$

- $B = \{(1,0),(0,1)\}$ é uma base para $\mathbb{R}^2$ chamada base canônica.
- $B_1 = \{(1,1),(0,1)\}$ é uma base para $\mathbb{R}^2$.

b_1. $[B_1] = \mathbb{R}^2$, pois para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ temos que $(x,y) = x(1,1) + (y-x)(0,1)$.

b_2. B_1 é L.I., pois os vetores de B_1 não são multiplos um do outro.

Obs: Um espaço vetorial pode admitir muitas bases.

Base

Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real finitamente gerado. Uma **base** para V é um conjunto finito $B \subset V$ tal que:

b_1. $[B] = V$.

b_2. B é L.I..

Exemplos

1. $V = \mathbb{R}^2$

- $B = \{(1,0),(0,1)\}$ é uma base para $\mathbb{R}^2$ chamada base canônica.
- $B_1 = \{(1,1),(0,1)\}$ é uma base para $\mathbb{R}^2$.

b_1. $[B_1] = \mathbb{R}^2$, pois para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ temos que $(x, y) = x(1, 1) + (y - x)(0, 1)$.

b_2. B_1 é L.I., pois os vetores de B_1 não são multiplos um do outro.

Obs: Um espaço vetorial pode admitir muitas bases.

Exemplos

2. $V = \mathbb{R}^2$

   $B_2 = \{(1,0),(3,0)\}$

   b_1. $[B_2] \neq \mathbb{R}^2$. Por exemplo, $(0,1) \notin [B_2]$.

   b_2. B_2 é L.D., pois os vetores de B_2 são multiplos um do outro.

   Portanto B_2 não é uma base para $\mathbb{R}^2$.

3. $V = \mathbb{R}^3$

   $B_1 = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$

   b_1. $[B_1] \neq \mathbb{R}^3$. Por exemplo, $(0,0,1) \notin [B_1]$.

   b_2. B_1 é L.I., pois os vetores de B_1 não são multiplos um do outro.

   Portanto B_1 não é uma base para $\mathbb{R}^3$.

   $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^3$.

Exemplos

2. $V = \mathbb{R}^2$

   $B_2 = \{(1,0),(3,0)\}$

   b_1. $[B_2] \neq \mathbb{R}^2$. Por exemplo, $(0,1) \notin [B_2]$.

   b_2. B_2 é L.D., pois os vetores de B_2 são multiplos um do outro.

   Portanto B_2 não é uma base para $\mathbb{R}^2$.

3. $V = \mathbb{R}^3$

   $B_1 = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$

   b_1. $[B_1] \neq \mathbb{R}^3$. Por exemplo, $(0,0,1) \notin [B_1]$.

   b_2. B_1 é L.I., pois os vetores de B_1 não são multiplos um do outro.

   Portanto B_1 não é uma base para $\mathbb{R}^3$.

   $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^3$.

Exemplos

2. $V = \mathbb{R}^2$

   $B_2 = \{(1,0),(3,0)\}$

   b_1. $[B_2] \neq \mathbb{R}^2$. Por exemplo, $(0,1) \notin [B_2]$.

   b_2. B_2 é L.D., pois os vetores de B_2 são multiplos um do outro.

   Portanto B_2 não é uma base para $\mathbb{R}^2$.

3. $V = \mathbb{R}^3$

   $B_1 = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$

   b_1. $[B_1] \neq \mathbb{R}^3$. Por exemplo, $(0,0,1) \notin [B_1]$.

   b_2. B_1 é L.I., pois os vetores de B_1 não são multiplos um do outro.

   Portanto B_1 não é uma base para $\mathbb{R}^3$.

   $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^3$.

Exemplos

2. $V = \mathbb{R}^2$

   $B_2 = \{(1,0),(3,0)\}$

   b_1. $[B_2] \neq \mathbb{R}^2$. Por exemplo, $(0,1) \notin [B_2]$.

   b_2. B_2 é L.D., pois os vetores de B_2 são multiplos um do outro.

   Portanto B_2 não é uma base para $\mathbb{R}^2$.

3. $V = \mathbb{R}^3$

   $B_1 = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$

   b_1. $[B_1] \neq \mathbb{R}^3$. Por exemplo, $(0,0,1) \notin [B_1]$.

   b_2. B_1 é L.I., pois os vetores de B_1 não são multiplos um do outro.

   Portanto B_1 não é uma base para $\mathbb{R}^3$.

   $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^3$.

Exemplos

2. $V = \mathbb{R}^2$

   $B_2 = \{(1,0),(3,0)\}$

   b_1. $[B_2] \neq \mathbb{R}^2$. Por exemplo, $(0,1) \notin [B_2]$.

   b_2. B_2 é L.D., pois os vetores de B_2 são multiplos um do outro.

   Portanto B_2 não é uma base para $\mathbb{R}^2$.

3. $V = \mathbb{R}^3$

   $B_1 = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$

   b_1. $[B_1] \neq \mathbb{R}^3$. Por exemplo, $(0,0,1) \notin [B_1]$.

   b_2. B_1 é L.I., pois os vetores de B_1 não são multiplos um do outro.

   Portanto B_1 não é uma base para $\mathbb{R}^3$.

   $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^3$.

Exemplos

2. $V = \mathbb{R}^2$

   $B_2 = \{(1,0),(3,0)\}$

   b_1. $[B_2] \neq \mathbb{R}^2$. Por exemplo, $(0,1) \notin [B_2]$.

   b_2. B_2 é L.D., pois os vetores de B_2 são multiplos um do outro.

   Portanto B_2 não é uma base para $\mathbb{R}^2$.

3. $V = \mathbb{R}^3$

   $B_1 = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$

   b_1. $[B_1] \neq \mathbb{R}^3$. Por exemplo, $(0,0,1) \notin [B_1]$.

   b_2. B_1 é L.I., pois os vetores de B_1 não são multiplos um do outro.

   Portanto B_1 não é uma base para $\mathbb{R}^3$.

   $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^3$.

Exemplos

2. $V = \mathbb{R}^2$

   $B_2 = \{(1,0),(3,0)\}$

   b_1. $[B_2] \neq \mathbb{R}^2$. Por exemplo, $(0,1) \notin [B_2]$.

   b_2. B_2 é L.D., pois os vetores de B_2 são multiplos um do outro.

   Portanto B_2 não é uma base para $\mathbb{R}^2$.

3. $V = \mathbb{R}^3$

   $B_1 = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$

   b_1. $[B_1] \neq \mathbb{R}^3$. Por exemplo, $(0,0,1) \notin [B_1]$.

   b_2. B_1 é L.I., pois os vetores de B_1 não são multiplos um do outro.

   Portanto B_1 não é uma base para $\mathbb{R}^3$.

   $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^3$.

Exemplos

2. $V = \mathbb{R}^2$

   $B_2 = \{(1,0),(3,0)\}$

   b_1. $[B_2] \neq \mathbb{R}^2$. Por exemplo, $(0,1) \notin [B_2]$.

   b_2. B_2 é L.D., pois os vetores de B_2 são multiplos um do outro.

   Portanto B_2 não é uma base para $\mathbb{R}^2$.

3. $V = \mathbb{R}^3$

   $B_1 = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$

   b_1. $[B_1] \neq \mathbb{R}^3$. Por exemplo, $(0,0,1) \notin [B_1]$.

   b_2. B_1 é L.I., pois os vetores de B_1 não são multiplos um do outro.

   Portanto B_1 não é uma base para $\mathbb{R}^3$.

   $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^3$.

Exemplo

4. $V = \mathbb{R}^n$.

   $B = \{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^n$.

5. $V = M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

   é uma base para $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. $\leftarrow$ Base Canônica

   Em particular,

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

   é a base canônica de $V = M_2(\mathbb{R})$.

Exemplo

4. $V = \mathbb{R}^n$.

   $B = \{(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,1)\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^n$.

5. $V = M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

é uma base para $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. $\leftarrow$ Base Canônica

Em particular,

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é a base canônica de $V = M_2(\mathbb{R})$.

Exemplo

4. $V = \mathbb{R}^n$.

   $B = \{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^n$.

5. $V = M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

é uma base para $M_{m \times n}(\mathbb{R})$. $\leftarrow$ Base Canônica

Em particular,

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é a base canônica de $V = M_2(\mathbb{R})$.

Exemplo

4. $V = \mathbb{R}^n$.

   $B = \{(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,1)\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^n$.

5. $V = M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

é uma base para $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. $\leftarrow$ Base Canônica

Em particular,

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é a base canônica de $V = M_2(\mathbb{R})$.

Exemplos

6. $V = P_n(\mathbb{R})$. $B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ é a base canônica de $P_n(\mathbb{R})$.

7. $V = \{0\}$, $B = \emptyset$.

   b_1. $[B] = \{0\}$.

   b_2. B é L.I., por convenção.

   Portanto $\emptyset$ é base para $\{0\}$.

   Obs: É possível definir base para espaços vetoriais que não são finitamente gerados. Por exemplo, $B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ é uma base de $P(\mathbb{R})$. A partir de agora estudaremos apenas espaços vetoriais finitamente gerados.

Exemplos

6. $V = P_n(\mathbb{R})$. $B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ é a base canônica de $P_n(\mathbb{R})$.

7. $V = \{0\}$, $B = \emptyset$.

   b_1. $[B] = \{0\}$.

   b_2. B é L.I., por convenção.

   Portanto $\emptyset$ é base para $\{0\}$.

   Obs: É possível definir base para espaços vetoriais que não são finitamente gerados. Por exemplo, $B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ é uma base de $P(\mathbb{R})$. A partir de agora estudaremos apenas espaços vetoriais finitamente gerados.

Exemplos

6. $V = P_n(\mathbb{R})$. $B = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ é a base canônica de $P_n(\mathbb{R})$.

7. $V = \{0\}$, $B = \emptyset$.

   b_1. $[B] = \{0\}$.

   b_2. B é L.I., por convenção.

   Portanto $\emptyset$ é base para $\{0\}$.

   Obs: É possível definir base para espaços vetoriais que não são finitamente gerados. Por exemplo, $B = \{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ é uma base de $P(\mathbb{R})$. A partir de agora estudaremos apenas espaços vetoriais finitamente gerados.

Exemplos

6. $V = P_n(\mathbb{R})$. $B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ é a base canônica de $P_n(\mathbb{R})$.

7. $V = \{0\}$, $B = \emptyset$.

   b_1. $[B] = \{0\}$.

   b_2. B é L.I., por convenção.

Portanto $\emptyset$ é base para $\{0\}$.

Obs: É possível definir base para espaços vetoriais que não são finitamente gerados. Por exemplo, $B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ é uma base de $P(\mathbb{R})$. A partir de agora estudaremos apenas espaços vetoriais finitamente gerados.

Exemplos

6. $V = P_n(\mathbb{R})$. $B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ é a base canônica de $P_n(\mathbb{R})$.

7. $V = \{0\}$, $B = \emptyset$.

   b_1. $[B] = \{0\}$.

   b_2. B é L.I., por convenção.

   Portanto $\emptyset$ é base para $\{0\}$.

   Obs: É possível definir base para espaços vetoriais que não são finitamente gerados. Por exemplo, $B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ é uma base de $P(\mathbb{R})$. A partir de agora estudaremos apenas espaços vetoriais finitamente gerados.

Exemplos

6. $V = P_n(\mathbb{R})$. $B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ é a base canônica de $P_n(\mathbb{R})$.

7. $V = \{0\}$, $B = \emptyset$.

   b_1. $[B] = \{0\}$.

   b_2. B é L.I., por convenção.

   Portanto $\emptyset$ é base para $\{0\}$.

   Obs: É possível definir base para espaços vetoriais que não são finitamente gerados. Por exemplo, $B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ é uma base de $P(\mathbb{R})$. A partir de agora estudaremos apenas espaços vetoriais finitamente gerados.

Exemplos

6. $V = P_n(\mathbb{R})$. $B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ é a base canônica de $P_n(\mathbb{R})$.

7. $V = \{0\}$, $B = \emptyset$.

   b_1. $[B] = \{0\}$.

   b_2. B é L.I., por convenção.

   Portanto $\emptyset$ é base para $\{0\}$.

   Obs: É possível definir base para espaços vetoriais que não são finitamente gerados. Por exemplo, $B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ é uma base de $P(\mathbb{R})$. A partir de agora estudaremos apenas espaços vetoriais finitamente gerados.

Existência de Base para Espaços Finitamente Gerados

Teorema: Todo espaço vetorial real finitamente gerado admite uma base.

Prova: Seja V um espaço vetorial real finitamente gerado. Então existem $v_1, \dots, v_n \in V$ tais que $V = [v_1, \dots, v_n]$.

Se $v_1 = \cdots = v_n = 0$, então $V = \{0\}$ e $B = \emptyset$ é uma base para V.

Suponhamos agora que $v_1, \dots, v_n$ não sejam todos nulos.

Passo 1: Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ é L.I., satisfaz b_1 e b_2 e portanto é uma base para V.

- **T.Car.:** $S \subset V$ é L.D. se, e somente se, pelo menos um dos vetores de S é combinação linear dos demais.

Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ é L.D, então por T.Car. pelo menos um dos seus vetores é combinação linear dos demais.

Existência de Base para Espaços Finitamente Gerados

Teorema: Todo espaço vetorial real finitamente gerado admite uma base.

Prova: Seja V um espaço vetorial real finitamente gerado. Então existem $v_1, \ldots, v_n \in V$ tais que $V = [v_1, \ldots, v_n]$.

Se $v_1 = \cdots = v_n = 0$, então $V = \{0\}$ e $B = \emptyset$ é uma base para V.

Suponhamos agora que $v_1, \ldots, v_n$ não sejam todos nulos.

Passo 1: Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é L.I., satisfaz b_1 e b_2 e portanto é uma base para V.

- **T.Car.:** $S \subset V$ é L.D. se, e somente se, pelo menos um dos vetores de S é combinação linear dos demais.

Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é L.D, então por T.Car. pelo menos um dos seus vetores é combinação linear dos demais.

Existência de Base para Espaços Finitamente Gerados

Teorema: Todo espaço vetorial real finitamente gerado admite uma base.

Prova: Seja V um espaço vetorial real finitamente gerado. Então existem $v_1, \ldots, v_n \in V$ tais que $V = [v_1, \ldots, v_n]$.

Se $v_1 = \cdots = v_n = 0$, então $V = \{0\}$ e $B = \emptyset$ é uma base para V.

Suponhamos agora que $v_1, \ldots, v_n$ não sejam todos nulos.

Passo 1: Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é L.I., satisfaz b_1 e b_2 e portanto é uma base para V.

- **T.Car.:** $S \subset V$ é L.D. se, e somente se, pelo menos um dos vetores de S é combinação linear dos demais.

Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é L.D, então por **T.Car.** pelo menos um dos seus vetores é combinação linear dos demais.

Existência de Base para Espaços Finitamente Gerados

Teorema: Todo espaço vetorial real finitamente gerado admite uma base.

Prova: Seja V um espaço vetorial real finitamente gerado. Então existem $v_1, \ldots, v_n \in V$ tais que $V = [v_1, \ldots, v_n]$.

Se $v_1 = \cdots = v_n = 0$, então $V = \{0\}$ e $B = \emptyset$ é uma base para V.

Suponhamos agora que $v_1, \ldots, v_n$ não sejam todos nulos.

Passo 1: Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é L.I., satisfaz b_1 e b_2 e portanto é uma base para V.

- **T.Car.:** $S \subset V$ é L.D. se, e somente se, pelo menos um dos vetores de S é combinação linear dos demais.

Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é L.D, então por T.Car. pelo menos um dos seus vetores é combinação linear dos demais.

Existência de Base para Espaços Finitamente Gerados

Teorema: Todo espaço vetorial real finitamente gerado admite uma base.

Prova: Seja V um espaço vetorial real finitamente gerado. Então existem $v_1, \ldots, v_n \in V$ tais que $V = [v_1, \ldots, v_n]$.

Se $v_1 = \cdots = v_n = 0$, então $V = \{0\}$ e $B = \emptyset$ é uma base para V.

Suponhamos agora que $v_1, \ldots, v_n$ não sejam todos nulos.

Passo 1: Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é L.I., satisfaz b_1 e b_2 e portanto é uma base para V.

- **T.Car.:** $S \subset V$ é L.D. se, e somente se, pelo menos um dos vetores de S é combinação linear dos demais.

Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é L.D, então por **T.Car.** pelo menos um dos seus vetores é combinação linear dos demais.

Existência de Base para Espaços Finitamente Gerados

Teorema: Todo espaço vetorial real finitamente gerado admite uma base.

Prova: Seja V um espaço vetorial real finitamente gerado. Então existem $v_1, \dots, v_n \in V$ tais que $V = [v_1, \dots, v_n]$.

Se $v_1 = \cdots = v_n = 0$, então $V = \{0\}$ e $B = \emptyset$ é uma base para V.

Suponhamos agora que $v_1, \dots, v_n$ não sejam todos nulos.

Passo 1: Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ é L.I., satisfaz b_1 e b_2 e portanto é uma base para V.

- **T.Car.:** $S \subset V$ é L.D. se, e somente se, pelo menos um dos vetores de S é combinação linear dos demais.

Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ é L.D, então por **T.Car.** pelo menos um dos seus vetores é combinação linear dos demais.

Existência de Base para Espaços Finitamente Gerados

Teorema: Todo espaço vetorial real finitamente gerado admite uma base.

Prova: Seja V um espaço vetorial real finitamente gerado. Então existem $v_1, \ldots, v_n \in V$ tais que $V = [v_1, \ldots, v_n]$.

Se $v_1 = \cdots = v_n = 0$, então $V = \{0\}$ e $B = \emptyset$ é uma base para V.

Suponhamos agora que $v_1, \ldots, v_n$ não sejam todos nulos.

Passo 1: Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é L.I., satisfaz b_1 e b_2 e portanto é uma base para V.

- **T.Car.:** $S \subset V$ é L.D. se, e somente se, pelo menos um dos vetores de S é combinação linear dos demais.

Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é L.D, então por **T.Car.** pelo menos um dos seus vetores é combinação linear dos demais.

Existência de Base para Espaços Finitamente Gerados

Teorema: Todo espaço vetorial real finitamente gerado admite uma base.

Prova: Seja V um espaço vetorial real finitamente gerado. Então existem $v_1, \ldots, v_n \in V$ tais que $V = [v_1, \ldots, v_n]$.

Se $v_1 = \cdots = v_n = 0$, então $V = \{0\}$ e $B = \emptyset$ é uma base para V.

Suponhamos agora que $v_1, \ldots, v_n$ não sejam todos nulos.

Passo 1: Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é L.I., satisfaz b_1 e b_2 e portanto é uma base para V.

- **T.Car.:** $S \subset V$ é L.D. se, e somente se, pelo menos um dos vetores de S é combinação linear dos demais.

Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é L.D, então por **T.Car.** pelo menos um dos seus vetores é combinação linear dos demais.

Existência de Base para Espaços Finitamente Gerados

Sem perda de generalidade, suponha que seja v_n. Então $v_n \in [v_1, \dots, v_{n-1}]$.

- **P.5:** Dado $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$, se $v_j \in [S - \{v_j\}]$, então $[S] = [S - \{v_j\}]$.

Pela **P.5** temos que $V = [v_1, \dots, v_n] = [v_1, \dots, v_{n-1}]$. Portanto $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ é um conjunto de geradores para V.

Passo 2: Se $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ é L.I, então é uma base para V. Se $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ é L.D, então por **T.Car.**, pelo menos um dos seus vetores é combinação linear dos demais. Sem perda de generalidade, suponha que seja v_{n-1}. Pela **P.5** temos que $V = [v_1, \dots, v_{n-1}] = [v_1, \dots, v_{n-2}]$. Portanto $\{v_1, \dots, v_{n-2}\}$ é um conjunto de geradores para V.

Existência de Base para Espaços Finitamente Gerados

Sem perda de generalidade, suponha que seja v_n. Então $v_n \in [v_1, \ldots, v_{n-1}]$.

- **P.5:** Dado $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$, se $v_j \in [S - \{v_j\}]$, então $[S] = [S - \{v_j\}]$.

Pela **P.5** temos que $V = [v_1, \ldots, v_n] = [v_1, \ldots, v_{n-1}]$. Portanto $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ é um conjunto de geradores para V.

Passo 2: Se $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ é L.I, então é uma base para V. Se $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ é L.D, então por **T.Car.**, pelo menos um dos seus vetores é combinação linear dos demais. Sem perda de generalidade, suponha que seja v_{n-1}. Pela **P.5** temos que $V = [v_1, \ldots, v_{n-1}] = [v_1, \ldots, v_{n-2}]$. Portanto $\{v_1, \ldots, v_{n-2}\}$ é um conjunto de geradores para V.

Existência de Base para Espaços Finitamente Gerados

Sem perda de generalidade, suponha que seja v_n. Então $v_n \in [v_1, \ldots, v_{n-1}]$.

- **P.5:** Dado $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$, se $v_j \in [S - \{v_j\}]$, então $[S] = [S - \{v_j\}]$.

Pela **P.5** temos que $V = [v_1, \ldots, v_n] = [v_1, \ldots, v_{n-1}]$. Portanto $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ é um conjunto de geradores para V.

Passo 2: Se $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ é L.I, então é uma base para V. Se $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ é L.D, então por **T.Car.**, pelo menos um dos seus vetores é combinação linear dos demais. Sem perda de generalidade, suponha que seja v_{n-1}. Pela **P.5** temos que $V = [v_1, \ldots, v_{n-1}] = [v_1, \ldots, v_{n-2}]$. Portanto $\{v_1, \ldots, v_{n-2}\}$ é um conjunto de geradores para V.

Existência de Base para Espaços Finitamente Gerados

Sem perda de generalidade, suponha que seja v_n. Então $v_n \in [v_1, \ldots, v_{n-1}]$.

- **P.5:** Dado $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$, se $v_j \in [S - \{v_j\}]$, então $[S] = [S - \{v_j\}]$.

Pela **P.5** temos que $V = [v_1, \ldots, v_n] = [v_1, \ldots, v_{n-1}]$. Portanto $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ é um conjunto de geradores para V.

Passo 2: Se $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ é L.I, então é uma base para V. Se $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ é L.D, então por **T.Car.**, pelo menos um dos seus vetores é combinação linear dos demais. Sem perda de generalidade, suponha que seja v_{n-1}. Pela **P.5** temos que $V = [v_1, \ldots, v_{n-1}] = [v_1, \ldots, v_{n-2}]$. Portanto $\{v_1, \ldots, v_{n-2}\}$ é um conjunto de geradores para V.

Existência de Base para Espaços Finitamente Gerados

Sem perda de generalidade, suponha que seja v_n. Então $v_n \in [v_1, \ldots, v_{n-1}]$.

- **P.5:** Dado $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$, se $v_j \in [S - \{v_j\}]$, então $[S] = [S - \{v_j\}]$.

Pela **P.5** temos que $V = [v_1, \ldots, v_n] = [v_1, \ldots, v_{n-1}]$. Portanto $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ é um conjunto de geradores para V.

Passo 2: Se $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ é L.I, então é uma base para V. Se $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ é L.D, então por **T.Car.**, pelo menos um dos seus vetores é combinação linear dos demais. Sem perda de generalidade, suponha que seja v_{n-1}. Pela **P.5** temos que $V = [v_1, \ldots, v_{n-1}] = [v_1, \ldots, v_{n-2}]$. Portanto $\{v_1, \ldots, v_{n-2}\}$ é um conjunto de geradores para V.

Existência de Base para Espaços Finitamente Gerados

Sem perda de generalidade, suponha que seja v_n. Então $v_n \in [v_1, \ldots, v_{n-1}]$.

- **P.5:** Dado $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$, se $v_j \in [S - \{v_j\}]$, então $[S] = [S - \{v_j\}]$.

Pela **P.5** temos que $V = [v_1, \ldots, v_n] = [v_1, \ldots, v_{n-1}]$. Portanto $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ é um conjunto de geradores para V.

Passo 2: Se $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ é L.I, então é uma base para V. Se $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ é L.D, então por **T.Car.**, pelo menos um dos seus vetores é combinação linear dos demais. Sem perda de generalidade, suponha que seja v_{n-1}. Pela **P.5** temos que $V = [v_1, \ldots, v_{n-1}] = [v_1, \ldots, v_{n-2}]$. Portanto $\{v_1, \ldots, v_{n-2}\}$ é um conjunto de geradores para V.

Existência de Base para Espaços Finitamente Gerados

Sem perda de generalidade, suponha que seja v_n. Então $v_n \in [v_1, \ldots, v_{n-1}]$.

- **P.5:** Dado $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$, se $v_j \in [S - \{v_j\}]$, então $[S] = [S - \{v_j\}]$.

Pela **P.5** temos que $V = [v_1, \ldots, v_n] = [v_1, \ldots, v_{n-1}]$. Portanto $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ é um conjunto de geradores para V.

Passo 2: Se $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ é L.I, então é uma base para V. Se $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ é L.D, então por **T.Car.**, pelo menos um dos seus vetores é combinação linear dos demais. Sem perda de generalidade, suponha que seja v_{n-1}. Pela **P.5** temos que $V = [v_1, \ldots, v_{n-1}] = [v_1, \ldots, v_{n-2}]$. Portanto $\{v_1, \ldots, v_{n-2}\}$ é um conjunto de geradores para V.

Existência de Base para Espaços Finitamente Gerados

Sem perda de generalidade, suponha que seja v_n. Então $v_n \in [v_1, \ldots, v_{n-1}]$.

- **P.5:** Dado $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$, se $v_j \in [S - \{v_j\}]$, então $[S] = [S - \{v_j\}]$.

Pela **P.5** temos que $V = [v_1, \ldots, v_n] = [v_1, \ldots, v_{n-1}]$. Portanto $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ é um conjunto de geradores para V.

Passo 2: Se $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ é L.I, então é uma base para V. Se $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ é L.D, então por **T.Car.**, pelo menos um dos seus vetores é combinação linear dos demais. Sem perda de generalidade, suponha que seja v_{n-1}. Pela **P.5** temos que $V = [v_1, \ldots, v_{n-1}] = [v_1, \ldots, v_{n-2}]$. Portanto $\{v_1, \ldots, v_{n-2}\}$ é um conjunto de geradores para V.

Existência de Base para Espaços Finitamente Gerados

Sem perda de generalidade, suponha que seja v_n. Então $v_n \in [v_1, \ldots, v_{n-1}]$.

- **P.5:** Dado $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$, se $v_j \in [S - \{v_j\}]$, então $[S] = [S - \{v_j\}]$.

Pela **P.5** temos que $V = [v_1, \ldots, v_n] = [v_1, \ldots, v_{n-1}]$. Portanto $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ é um conjunto de geradores para V.

Passo 2: Se $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ é L.I, então é uma base para V. Se $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ é L.D, então por **T.Car.**, pelo menos um dos seus vetores é combinação linear dos demais. Sem perda de generalidade, suponha que seja v_{n-1}. Pela **P.5** temos que $V = [v_1, \ldots, v_{n-1}] = [v_1, \ldots, v_{n-2}]$. Portanto $\{v_1, \ldots, v_{n-2}\}$ é um conjunto de geradores para V.

Existência de Base para Espaços Finitamente Gerados

Após um número finito de passos, chegamos a um subconjunto de vetores $\{v_1, \ldots, v_r\}$, $r \leq n$ que é L.I. e gera V. Portanto $B = \{v_1, \ldots, v_r\}$, é uma base para V.

$\square$

Corolário: Para todo conjunto S de geradores de V podemos extrair de S uma base para V.

Existência de Base para Espaços Finitamente Gerados

Após um número finito de passos, chegamos a um subconjunto de vetores $\{v_1, \ldots, v_r\}$, $r \leq n$ que é L.I. e gera V. Portanto $B = \{v_1, \ldots, v_r\}$, é uma base para V.

$\square$

Corolário: Para todo conjunto S de geradores de V podemos extrair de S uma base para V.