Espaços Vetoriais

Estruturas Algébricas

Álgebra Linear

Mariana Silveira - Cristian Coletti

Universidade Federal do ABC

Estruturas Algébricas

Algebra: Estuda o comportamento de operações em conjuntos.

Estrutura Algébrica: Classe de Conjuntos com uma ou mais operações sobre eles satisfazendo determinadas propriedades. Espaços vetoriais, Grupos, Anéis, Corpos, Módulos,...

Uma **operação binária** em um conjunto não vazio A é uma aplicação que associa a cada par ordenado de elementos de A um único elemento de A.

$$\begin{array}{rcl} *: A \times A & \longrightarrow & A \\ (a_1, a_2) & \mapsto & a_1 * a_2 \end{array}$$

Estruturas Algébricas

Algebra: Estuda o comportamento de operações em conjuntos.

Estrutura Algébrica: Classe de Conjuntos com uma ou mais operações sobre eles satisfazendo determinadas propriedades. Espaços vetoriais, Grupos, Anéis, Corpos, Módulos,...

Uma **operação binária** em um conjunto não vazio A é uma aplicação que associa a cada par ordenado de elementos de A um único elemento de A.

$$\begin{array}{rcl} * : A \times A & \longrightarrow & A \\ (a_1, a_2) & \mapsto & a_1 * a_2 \end{array}$$

Propriedades

Seja $*$ uma operação binária em A.

- $*$ é **associativa** se $(a_1 * a_2) * a_3 = a_1 * (a_2 * a_3)$ $\forall a_1, a_2, a_3 \in A$.
- $*$ é **comutativa** se $a_1 * a_2 = a_2 * a_1$ $\forall a_1, a_2 \in A$.

Dizemos que $e \in A$ é um **elemento identidade** ou **elemento neutro** para $*$ em A se para todo $a \in A$

$$a * e = e * a = a.$$

Obs: Quando e existe, ele é único. Sejam $e, e' \in A$ elementos identidade para $*$.
Como $a * e = a$ para todo $a \in A$, então $e' * e = e'$.
Como $e' * a = a$ para todo $a \in A$, então $e' * e = e$.
Segue que $e' = e$.

Propriedades

Seja $*$ uma operação binária em A.

- $*$ é **associativa** se $(a_1 * a_2) * a_3 = a_1 * (a_2 * a_3)\ \forall a_1, a_2, a_3 \in A$.
- $*$ é **comutativa** se $a_1 * a_2 = a_2 * a_1\ \forall a_1, a_2 \in A$.

Dizemos que $e \in A$ é um **elemento identidade** ou **elemento neutro** para $*$ em A se para todo $a \in A$

$$a * e = e * a = a.$$

Obs: Quando e existe, ele é único. Sejam $e, e' \in A$ elementos identidade para $*$.

Como $a * e = a$ para todo $a \in A$, então $e' * e = e'$.

Como $e' * a = a$ para todo $a \in A$, então $e' * e = e$.

Segue que $e' = e$.

Propriedades

Seja $*$ uma operação binária em A.

- $*$ é **associativa** se $(a_1 * a_2) * a_3 = a_1 * (a_2 * a_3)$ $\forall a_1, a_2, a_3 \in A$.
- $*$ é **comutativa** se $a_1 * a_2 = a_2 * a_1$ $\forall a_1, a_2 \in A$.

Dizemos que $e \in A$ é um **elemento identidade** ou **elemento neutro** para $*$ em A se para todo $a \in A$

$$a * e = e * a = a.$$

Obs: Quando e existe, ele é único. Sejam $e, e' \in A$ elementos identidade para $*$.

Como $a * e = a$ para todo $a \in A$, então $e' * e = e'$.

Como $e' * a = a$ para todo $a \in A$, então $e' * e = e$.

Segue que $e' = e$.

Propriedades

Seja $*$ uma operação binária em A.

- $*$ é **associativa** se $(a_1 * a_2) * a_3 = a_1 * (a_2 * a_3)\ \forall a_1, a_2, a_3 \in A$.
- $*$ é **comutativa** se $a_1 * a_2 = a_2 * a_1\ \forall a_1, a_2 \in A$.

Dizemos que $e \in A$ é um **elemento identidade** ou **elemento neutro** para $*$ em A se para todo $a \in A$

$$a * e = e * a = a.$$

Obs: Quando e existe, ele é único. Sejam e, $e' \in A$ elementos identidade para $*$.
Como $a * e = a$ para todo $a \in A$, então $e' * e = e'$.
Como $e' * a = a$ para todo $a \in A$, então $e' * e = e$.
Segue que $e' = e$.

Propriedades

Seja $*$ uma operação binária em A.

- $*$ é **associativa** se $(a_1 * a_2) * a_3 = a_1 * (a_2 * a_3)\ \forall a_1, a_2, a_3 \in A$.
- $*$ é **comutativa** se $a_1 * a_2 = a_2 * a_1\ \forall a_1, a_2 \in A$.

Dizemos que $e \in A$ é um **elemento identidade** ou **elemento neutro** para $*$ em A se para todo $a \in A$

$$a * e = e * a = a.$$

Obs: Quando e existe, ele é único. Sejam e, $e' \in A$ elementos identidade para $*$.
Como $a * e = a$ para todo $a \in A$, então $e' * e = e'$.
Como $e' * a = a$ para todo $a \in A$, então $e' * e = e$.
Segue que $e' = e$.

Propriedades

Seja $*$ uma operação binária em A.

- $*$ é **associativa** se $(a_1 * a_2) * a_3 = a_1 * (a_2 * a_3)$ $\forall a_1, a_2, a_3 \in A$.
- $*$ é **comutativa** se $a_1 * a_2 = a_2 * a_1$ $\forall a_1, a_2 \in A$.

Dizemos que $e \in A$ é um **elemento identidade** ou **elemento neutro** para $*$ em A se para todo $a \in A$

$$a * e = e * a = a.$$

Obs: Quando e existe, ele é único. Sejam e, $e' \in A$ elementos identidade para $*$.
Como $a * e = a$ para todo $a \in A$, então $e' * e = e'$.
Como $e' * a = a$ para todo $a \in A$, então $e' * e = e$.
Segue que $e' = e$.

Propriedades

Seja $*$ uma operação binária em A.

- $*$ é **associativa** se $(a_1 * a_2) * a_3 = a_1 * (a_2 * a_3)$ $\forall a_1, a_2, a_3 \in A$.
- $*$ é **comutativa** se $a_1 * a_2 = a_2 * a_1$ $\forall a_1, a_2 \in A$.

Dizemos que $e \in A$ é um **elemento identidade** ou **elemento neutro** para $*$ em A se para todo $a \in A$

$$a * e = e * a = a.$$

Obs: Quando e existe, ele é único. Sejam e, $e' \in A$ elementos identidade para $*$.
Como $a * e = a$ para todo $a \in A$, então $e' * e = e'$.
Como $e' * a = a$ para todo $a \in A$, então $e' * e = e$.
Segue que $e' = e$.

Elemento inverso

Sejam $a_1, a_2 \in A$ e seja $e \in A$ o elemento identidade para $*$.

Dizemos que a_2 é o **elemento inverso** de a_1 com relação a $*$ se

$$a_1 * a_2 = a_2 * a_1 = e.$$

Notação: Denotamos por a^{-1} o elemento inverso de a.

Obs: Seja $*$ uma operação binária associativa e com elemento identidade e em em A. Dado $a \in A$, quando a^{-1} existe, ele é único.

Elemento inverso

Sejam $a_1, a_2 \in A$ e seja $e \in A$ o elemento identidade para $*$.

Dizemos que a_2 é o **elemento inverso** de a_1 com relação a $*$ se

$$a_1 * a_2 = a_2 * a_1 = e.$$

Notação: Denotamos por a^{-1} o elemento inverso de a.

Obs: Seja $*$ uma operação binária associativa e com elemento identidade e em em A. Dado $a \in A$, quando a^{-1} existe, ele é único.

Elemento inverso

Sejam $a_1, a_2 \in A$ e seja $e \in A$ o elemento identidade para $*$.

Dizemos que a_2 é o **elemento inverso** de a_1 com relação a $*$ se

$$a_1 * a_2 = a_2 * a_1 = e.$$

Notação: Denotamos por a^{-1} o elemento inverso de a.

Obs: Seja $*$ uma operação binária associativa e com elemento identidade e em em A. Dado $a \in A$, quando a^{-1} existe, ele é único.

Exemplos

1- $\mathbb{R}$ com a operação de adição "$+$".

- $+$ é associativa, comutativa.
- Seu elemento identidade é 0.
- Dado $a \in \mathbb{R}$, o elemento inverso de a com relação a "$+$" é $-a$.

2- $\mathbb{Q}$ com a operação de adição "$+$".

3- $\mathbb{C}$ com a operação de adição "$+$".

4- $\mathbb{Z}$ com a operação de adição "$+$".

5- $\mathbb{R}$ com a operação de multiplicação "$\cdot$".

- "$\cdot$" é associativa, comutativa.
- Seu elemento identidade é 1.
- Dado $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, o elemento inverso de a com relação a "$\cdot$" é $1/a$.

Exemplos

1- $\mathbb{R}$ com a operação de adição "$+$".

- $+$ é associativa, comutativa.
- Seu elemento identidade é 0.
- Dado $a \in \mathbb{R}$, o elemento inverso de a com relação a "$+$" é $-a$.

2- $\mathbb{Q}$ com a operação de adição "$+$".

3- $\mathbb{C}$ com a operação de adição "$+$".

4- $\mathbb{Z}$ com a operação de adição "$+$".

5- $\mathbb{R}$ com a operação de multiplicação "$\cdot$".

- "$\cdot$" é associativa, comutativa.
- Seu elemento identidade é 1.
- Dado $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, o elemento inverso de a com relação a "$\cdot$" é $1/a$.

Exemplos

1- $\mathbb{R}$ com a operação de adição "$+$".

- $+$ é associativa, comutativa.
- Seu elemento identidade é 0.
- Dado $a \in \mathbb{R}$, o elemento inverso de a com relação a "$+$" é $-a$.

2- $\mathbb{Q}$ com a operação de adição "$+$".

3- $\mathbb{C}$ com a operação de adição "$+$".

4- $\mathbb{Z}$ com a operação de adição "$+$".

5- $\mathbb{R}$ com a operação de multiplicação "$\cdot$".

- "$\cdot$" é associativa, comutativa.
- Seu elemento identidade é 1.
- Dado $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, o elemento inverso de a com relação a "$\cdot$" é $1/a$.

Exemplos

1- $\mathbb{R}$ com a operação de adição "$+$".

- $+$ é associativa, comutativa.
- Seu elemento identidade é 0.
- Dado $a \in \mathbb{R}$, o elemento inverso de a com relação a "$+$" é $-a$.

2- $\mathbb{Q}$ com a operação de adição "$+$".

3- $\mathbb{C}$ com a operação de adição "$+$".

4- $\mathbb{Z}$ com a operação de adição "$+$".

5- $\mathbb{R}$ com a operação de multiplicação "$.$".

- "$.$" é associativa, comutativa.
- Seu elemento identidade é 1.
- Dado $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, o elemento inverso de a com relação a "$.$" é $1/a$.

Exemplos

1- $\mathbb{R}$ com a operação de adição "$+$".

- $+$ é associativa, comutativa.
- Seu elemento identidade é 0.
- Dado $a \in \mathbb{R}$, o elemento inverso de a com relação a "$+$" é $-a$.

2- $\mathbb{Q}$ com a operação de adição "$+$".

3- $\mathbb{C}$ com a operação de adição "$+$".

4- $\mathbb{Z}$ com a operação de adição "$+$".

5- $\mathbb{R}$ com a operação de multiplicação ".".

- "." é associativa, comutativa.
- Seu elemento identidade é 1.
- Dado $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, o elemento inverso de a com relação a "." é $1/a$.

Exemplos

1- $\mathbb{R}$ com a operação de adição "$+$".

- $+$ é associativa, comutativa.
- Seu elemento identidade é 0.
- Dado $a \in \mathbb{R}$, o elemento inverso de a com relação a "$+$" é $-a$.

2- $\mathbb{Q}$ com a operação de adição "$+$".

3- $\mathbb{C}$ com a operação de adição "$+$".

4- $\mathbb{Z}$ com a operação de adição "$+$".

5- $\mathbb{R}$ com a operação de multiplicação ".".

- "." é associativa, comutativa.
- Seu elemento identidade é 1.
- Dado $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, o elemento inverso de a com relação a "." é $1/a$.

Exemplos

1- $\mathbb{R}$ com a operação de adição "$+$".

- $+$ é associativa, comutativa.
- Seu elemento identidade é 0.
- Dado $a \in \mathbb{R}$, o elemento inverso de a com relação a "$+$" é $-a$.

2- $\mathbb{Q}$ com a operação de adição "$+$".

3- $\mathbb{C}$ com a operação de adição "$+$".

4- $\mathbb{Z}$ com a operação de adição "$+$".

5- $\mathbb{R}$ com a operação de multiplicação ".".

- "." é associativa, comutativa.
- Seu elemento identidade é 1.
- Dado $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, o elemento inverso de a com relação a "." é $1/a$.

Exemplos

1- $\mathbb{R}$ com a operação de adição "$+$".

- $+$ é associativa, comutativa.
- Seu elemento identidade é 0.
- Dado $a \in \mathbb{R}$, o elemento inverso de a com relação a "$+$" é $-a$.

2- $\mathbb{Q}$ com a operação de adição "$+$".

3- $\mathbb{C}$ com a operação de adição "$+$".

4- $\mathbb{Z}$ com a operação de adição "$+$".

5- $\mathbb{R}$ com a operação de multiplicação "$.$".

- "$.$" é associativa, comutativa.
- Seu elemento identidade é 1.
- Dado $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, o elemento inverso de a com relação a "$.$" é $1/a$.

Exemplos

6- O conjunto $\mathbb{Z}$ com a operação de multiplicação ".".

- "." é associativa, comutativa.
- Seu elemento identidade é 1.
- Nenhum elemento em $\mathbb{Z} - \{1\}$ tem elemento inverso em $\mathbb{Z}$ com relação a ".".

7- $\mathbb{R}$ com a operação de subtração "$-$".

- "$-$" não é associativa, não é comutativa.
- Não tem elemento identidade.

  $a - e = a$

  $e - a = a$

8- A operação de subtração "$-$" não é uma operação binária em $\mathbb{N}$. Por exemplo, $3 - 4 \notin \mathbb{N}$.

Exemplos

6- O conjunto $\mathbb{Z}$ com a operação de multiplicação ".".

- "." é associativa, comutativa.
- Seu elemento identidade é 1.
- Nenhum elemento em $\mathbb{Z} - \{1\}$ tem elemento inverso em $\mathbb{Z}$ com relação a ".".

7- $\mathbb{R}$ com a operação de subtração "$-$".

- "$-$" não é associativa, não é comutativa.
- Não tem elemento identidade.

  $a - e = a$

  $e - a = a$

8- A operação de subtração "$-$" não é uma operação binária em $\mathbb{N}$. Por exemplo, $3 - 4 \notin \mathbb{N}$.

Exemplos

6- O conjunto $\mathbb{Z}$ com a operação de multiplicação “.”.

- “.” é associativa, comutativa.
- Seu elemento identidade é 1.
- Nenhum elemento em $\mathbb{Z} - \{1\}$ tem elemento inverso em $\mathbb{Z}$ com relação a “.”.

7- $\mathbb{R}$ com a operação de subtração “$-$”.

- “$-$” não é associativa, não é comutativa.
- Não tem elemento identidade.

$a - e = a$

$e - a = a$

8- A operação de subtração “$-$” não é uma operação binária em $\mathbb{N}$. Por exemplo, $3 - 4 \notin \mathbb{N}$.

Exemplos

6- O conjunto $\mathbb{Z}$ com a operação de multiplicação ".".

- "." é associativa, comutativa.
- Seu elemento identidade é 1.
- Nenhum elemento em $\mathbb{Z} - \{1\}$ tem elemento inverso em $\mathbb{Z}$ com relação a ".".

7- $\mathbb{R}$ com a operação de subtração "$-$".

- "$-$" não é associativa, não é comutativa.
- Não tem elemento identidade.

  $a - e = a$

  $e - a = a$

8- A operação de subtração "$-$" não é uma operação binária em $\mathbb{N}$. Por exemplo, $3 - 4 \notin \mathbb{N}$.

Exemplos

6- O conjunto $\mathbb{Z}$ com a operação de multiplicação ".".

- "." é associativa, comutativa.
- Seu elemento identidade é 1.
- Nenhum elemento em $\mathbb{Z} - \{1\}$ tem elemento inverso em $\mathbb{Z}$ com relação a ".".

7- $\mathbb{R}$ com a operação de subtração "$-$".

- "$-$" não é associativa, não é comutativa.
- Não tem elemento identidade.

$a - e = a$

$e - a = a$

8- A operação de subtração "$-$" não é uma operação binária em $\mathbb{N}$. Por exemplo, $3 - 4 \notin \mathbb{N}$.

Exemplos

6- O conjunto $\mathbb{Z}$ com a operação de multiplicação ".".

- "." é associativa, comutativa.
- Seu elemento identidade é 1.
- Nenhum elemento em $\mathbb{Z} - \{1\}$ tem elemento inverso em $\mathbb{Z}$ com relação a ".".

7- $\mathbb{R}$ com a operação de subtração "$-$".

- "$-$" não é associativa, não é comutativa.
- Não tem elemento identidade.

  $a - e = a$

  $e - a = a$

8- A operação de subtração "$-$" não é uma operação binária em $\mathbb{N}$. Por exemplo, $3 - 4 \notin \mathbb{N}$.

Grupos

Um **grupo** é um par $(G, *)$ em que G é um conjunto não vazio e $*$ é uma operação binária em G satisfazendo:

- $*$ é associativa.
- $*$ tem elemento identidade (elemento neutro).
- Todo elemento de G tem elemento inverso com relação a $*$.

Exemplos:

1- $\mathbb{R}$ com a operação de adição "$+$" é um grupo.

2- $\mathbb{R} - \{0\}$ com a operação de multiplicação "$.$" é um grupo.

Se a operação $*$ é comutativa dizemos que o grupo $(G, *)$ é **abeliano**.

Grupos

Um **grupo** é um par $(G, *)$ em que G é um conjunto não vazio e $*$ é uma operação binária em G satisfazendo:

- $*$ é associativa.
- $*$ tem elemento identidade (elemento neutro).
- Todo elemento de G tem elemento inverso com relação a $*$.

Exemplos:

1- $\mathbb{R}$ com a operação de adição "$+$" é um grupo.

2- $\mathbb{R} - \{0\}$ com a operação de multiplicação "." é um grupo.

Se a operação $*$ é comutativa dizemos que o grupo $(G, *)$ é **abeliano**.

Grupos

Um **grupo** é um par $(G, *)$ em que G é um conjunto não vazio e $*$ é uma operação binária em G satisfazendo:

- $*$ é associativa.
- $*$ tem elemento identidade (elemento neutro).
- Todo elemento de G tem elemento inverso com relação a $*$.

Exemplos:

1- $\mathbb{R}$ com a operação de adição "$+$" é um grupo.

2- $\mathbb{R} - \{0\}$ com a operação de multiplicação "." é um grupo.

Se a operação $*$ é comutativa dizemos que o grupo $(G, *)$ é **abeliano**.

Grupos

Um **grupo** é um par $(G, *)$ em que G é um conjunto não vazio e $*$ é uma operação binária em G satisfazendo:

- $*$ é associativa.
- $*$ tem elemento identidade (elemento neutro).
- Todo elemento de G tem elemento inverso com relação a $*$.

Exemplos:

1- $\mathbb{R}$ com a operação de adição "$+$" é um grupo.

2- $\mathbb{R} - \{0\}$ com a operação de multiplicação "." é um grupo.

Se a operação $*$ é comutativa dizemos que o grupo $(G, *)$ é **abeliano**.

Corpo

Um **corpo** é uma tripla $(G, +, .)$ em que G é um conjunto não vazio e $+$ e . são operações binárias em G satisfazendo:

(i) $+$ e . são associativas,

(ii) $+$ e . são comutativas,

(iii) $+$ tem elemento elemento neutro, que denotamos por 0 e . tem elemento elemento neutro, que denotamos por 1.

(iv) Todo elemento de G tem inverso com relação à operação $+$ e todo elemento de $G - \{0\}$ tem inverso com relação à operação ..

(v) Vale a distributividade de . sobre $+$.

Exemplo: $\mathbb{R}$ com as operações de adição $+$ e multiplicação ..

Obs: $(G, +)$ e $(G - \{0\}, .)$ são grupos abelianos.

Corpo

Um **corpo** é uma tripla $(G, +, .)$ em que G é um conjunto não vazio e $+$ e $.$ são operações binárias em G satisfazendo:

(i) $+$ e $.$ são associativas,

(ii) $+$ e $.$ são comutativas,

(iii) $+$ tem elemento elemento neutro, que denotamos por 0 e $.$ tem elemento elemento neutro, que denotamos por 1.

(iv) Todo elemento de G tem inverso com relação à operação $+$ e todo elemento de $G - \{0\}$ tem inverso com relação à operação ..

(v) Vale a distributividade de $.$ sobre $+$.

Exemplo: $\mathbb{R}$ com as operações de adição $+$ e multiplicação ..

Obs: $(G, +)$ e $(G - \{0\}, .)$ são grupos abelianos.

Corpo

Um **corpo** é uma tripla $(G, +, .)$ em que G é um conjunto não vazio e $+$ e . são operações binárias em G satisfazendo:

(i) $+$ e . são associativas,

(ii) $+$ e . são comutativas,

(iii) $+$ tem elemento elemento neutro, que denotamos por 0 e . tem elemento elemento neutro, que denotamos por 1.

(iv) Todo elemento de G tem inverso com relação à operação $+$ e todo elemento de $G - \{0\}$ tem inverso com relação à operação ..

(v) Vale a distributividade de . sobre $+$.

Exemplo: $\mathbb{R}$ com as operações de adição $+$ e multiplicação ..

Obs: $(G, +)$ e $(G - \{0\}, .)$ são grupos abelianos.

Espaços Vetoriais

Conjuntos com duas operações de adição $+$ e multiplicação por escalar . que, apesar de ter elementos com natureza diferente, respeitam as mesmas 8 propriedades que $(\mathbb{R}^n, +, .)$ e $(\mathbb{S}, +, .)$ são chamados **Espaços Vetoriais.**

Obs: É possível estudar espaços vetoriais com escalares sobre qualquer corpo. Vamos estudar espaços vetoriais em que os escalares são números reais.

Espaços Vetoriais

Conjuntos com duas operações de adição $+$ e multiplicação por escalar . que, apesar de ter elementos com natureza diferente, respeitam as mesmas 8 propriedades que $(\mathbb{R}^n, +, .)$ e $(\mathbb{S}, +, .)$ são chamados **Espaços Vetoriais.**

Obs: É possível estudar espaços vetoriais com escalares sobre qualquer corpo. Vamos estudar espaços vetoriais em que os escalares são números reais.

Espaços Vetoriais

Um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ (real) é uma tripla $(V, +, .)$ em que:

- V é um conjunto não vazio.
- A adição

$$+ : \begin{array}{ccc} V \times V & \longrightarrow & V \\ (u, v) & \mapsto & u + v \end{array}$$

é uma operação binária em V satisfazendo:

$A_1 -$ **Associativa**: $(u + v) + w = u + (v + w), \ \forall u, v, w \in V$.

$A_2 -$ **Comutativa**: $u + v = v + u, \ \forall u, v \in V$.

$A_3 -$ **Elemento Neutro**: existe 0 tal que $u + 0 = 0 + u = u, \ \forall u \in V$. $\leftarrow$ vetor nulo

$A_4 -$ **Elemento Inverso**: para todo $u \in V$ existe $-u \in V$ tal que

$u + (-u) = -u + u = 0, \ \forall u \in V$. $\leftarrow$ vetor oposto

$(V, +)$ é um grupo abeliano.

Espaços Vetoriais

Um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ (real) é uma tripla $(V, +, .)$ em que:

- V é um conjunto não vazio.
- A adição

$$+ : \begin{array}{ccc} V \times V & \longrightarrow & V \\ (u, v) & \mapsto & u + v \end{array}$$

  é uma operação binária em V satisfazendo:

A_1- **Associativa**: $(u + v) + w = u + (v + w), \ \forall u, v, w \in V$.

A_2- **Comutativa**: $u + v = v + u, \ \forall u, v \in V$.

A_3- **Elemento Neutro**: existe 0 tal que $u + 0 = 0 + u = u, \ \forall u \in V$. $\leftarrow$ vetor nulo

A_4- **Elemento Inverso**: para todo $u \in V$ existe $-u \in V$ tal que $u + (-u) = -u + u = 0, \ \forall u \in V$. $\leftarrow$ vetor oposto

$(V, +)$ é um grupo abeliano.

Espaços Vetoriais

Um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ (real) é uma tripla $(V, +, .)$ em que:

- V é um conjunto não vazio.
- A adição

$$+ : \begin{array}{ccc} V \times V & \longrightarrow & V \\ (u, v) & \mapsto & u + v \end{array}$$

é uma operação binária em V satisfazendo:

A_1- **Associativa**: $(u + v) + w = u + (v + w), \ \forall u, v, w \in V$.

A_2- **Comutativa**: $u + v = v + u, \ \forall u, v \in V$.

A_3- **Elemento Neutro**: existe 0 tal que $u + 0 = 0 + u = u, \ \forall u \in V$. $\leftarrow$ vetor nulo

A_4- **Elemento Inverso**: para todo $u \in V$ existe $-u \in V$ tal que $u + (-u) = -u + u = 0, \ \forall u \in V$. $\leftarrow$ vetor oposto

$(V, +)$ é um grupo abeliano.

Espaços Vetoriais

Um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ (real) é uma tripla $(V, +, .)$ em que:

- V é um conjunto não vazio.
- A adição

$$+ : \begin{array}{ccc} V \times V & \longrightarrow & V \\ (u, v) & \mapsto & u + v \end{array}$$

  é uma operação binária em V satisfazendo:

A_1 – **Associativa**: $(u + v) + w = u + (v + w), \ \forall u, v, w \in V$.

A_2 – **Comutativa**: $u + v = v + u, \ \forall u, v \in V$.

A_3 – **Elemento Neutro**: existe 0 tal que $u + 0 = 0 + u = u, \ \forall u \in V$. $\leftarrow$ vetor nulo

A_4 – **Elemento Inverso**: para todo $u \in V$ existe $-u \in V$ tal que

$u + (-u) = -u + u = 0, \ \forall u \in V$. $\leftarrow$ vetor oposto

$(V, +)$ é um grupo abeliano.

Espaços Vetoriais

Um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ (real) é uma tripla $(V, +, .)$ em que:

- V é um conjunto não vazio.
- A adição

$$+ : \begin{array}{ccc} V \times V & \longrightarrow & V \\ (u, v) & \mapsto & u + v \end{array}$$

é uma operação binária em V satisfazendo:

$A_1 -$ **Associativa**: $(u + v) + w = u + (v + w), \ \forall u, v, w \in V$.

$A_2 -$ **Comutativa**: $u + v = v + u, \ \forall u, v \in V$.

$A_3 -$ **Elemento Neutro**: existe 0 tal que $u + 0 = 0 + u = u, \ \forall u \in V$. $\leftarrow$ vetor nulo

$A_4 -$ **Elemento Inverso**: para todo $u \in V$ existe $-u \in V$ tal que $u + (-u) = -u + u = 0, \ \forall u \in V$. $\leftarrow$ vetor oposto

$(V, +)$ é um grupo abeliano.

Espaços Vetoriais

- A multiplicação por escalar

$$\cdot : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times V & \longrightarrow & V \\ (\alpha, u) & \mapsto & \alpha.u \end{array}$$

é uma operação satisfazendo:

M_1- **Associativa**: $\alpha.(\beta.u) = (\alpha\beta).u, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in V$.

M_2- **Distributiva sobre a adição de escalares**: $(\alpha + \beta).u = \alpha.u + \beta.u$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in V$.

M_3- **Distributiva sobre a adição de vetores**: $\alpha.(u + v) = \alpha.u + \alpha.v, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall u, v \in V$.

M_4- **Identidade**: $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{ident. em } \mathbb{R}}}{1}.u = u, \quad \forall u \in V$.

Espaços Vetoriais

- A multiplicação por escalar

$$\cdot : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times V & \longrightarrow & V \\ (\alpha, u) & \mapsto & \alpha.u \end{array}$$

é uma operação satisfazendo:

$M_1 -$ **Associativa**: $\alpha.(\beta.u) = (\alpha\beta).u, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in V$.

$M_2 -$ **Distributiva sobre a adição de escalares**: $(\alpha + \beta).u = \alpha.u + \beta.u$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in V$.

$M_3 -$ **Distributiva sobre a adição de vetores**: $\alpha.(u + v) = \alpha.u + \alpha.v, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall u, v \in V$.

$M_4 -$ **Identidade**: $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{ident. em } \mathbb{R}}}{1}.u = u, \quad \forall u \in V$.

Espaços Vetoriais

- A multiplicação por escalar

$$\cdot : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times V & \longrightarrow & V \\ (\alpha, u) & \mapsto & \alpha.u \end{array}$$

é uma operação satisfazendo:

$M_1 -$ **Associativa**: $\alpha.(\beta.u) = (\alpha\beta).u, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in V$.

$M_2 -$ **Distributiva sobre a adição de escalares**: $(\alpha + \beta).u = \alpha.u + \beta.u$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in V$.

$M_3 -$ **Distributiva sobre a adição de vetores**: $\alpha.(u + v) = \alpha.u + \alpha.v, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall u, v \in V$.

$M_4 -$ **Identidade**: $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{ident. em } \mathbb{R}}}{1}.u = u, \quad \forall u \in V$.

Espaços Vetoriais

- A multiplicação por escalar

$$\cdot : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times V & \longrightarrow & V \\ (\alpha, u) & \mapsto & \alpha.u \end{array}$$

é uma operação satisfazendo:

M_1 – **Associativa**: $\alpha.(\beta.u) = (\alpha\beta).u, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in V$.

M_2 – **Distributiva sobre a adição de escalares**: $(\alpha + \beta).u = \alpha.u + \beta.u$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in V$.

M_3 – **Distributiva sobre a adição de vetores**: $\alpha.(u + v) = \alpha.u + \alpha.v, \ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall u, v \in V$.

M_4 – **Identidade**: $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{ident. em } \mathbb{R}}}{1}.u = u, \ \ \forall u \in V$.

Espaços Vetoriais

- Dados $u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos

$$u + v \in V \text{ e } \alpha.u \in V \leftarrow \text{As operações } + \text{ e } . \text{ estão bem definidas!}$$

- Não definimos multiplicação de vetores. (u^2 é quadrático e não linear!)
- Para mostrar que uma tripla é um espaço vetorial, precisamos mostrar que as operações $+$ e $.$ estão bem definidas em V e mostrar as propriedades A_1, A_2, A_3, A_4 e M_1, M_2, M_3, M_4.

Os elementos de V são chamados de **vetores.**

Exemplos:

$(\mathbb{R}^n, +, .)$ e $(\mathbb{S}, +, .)$ (Exemplo do Sistema massa-mola) são espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$.

Espaços Vetoriais

- Dados $u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos

$$u + v \in V \text{ e } \alpha.u \in V \leftarrow \text{As operações } + \text{ e . estão bem definidas!}$$

- Não definimos multiplicação de vetores. (u^2 é quadrático e não linear!)
- Para mostrar que uma tripla é um espaço vetorial, precisamos mostrar que as operações $+$ e . estão bem definidas em V e mostrar as propriedades A_1, A_2, A_3, A_4 e M_1, M_2, M_3, M_4.

Os elementos de V são chamados de **vetores.**

Exemplos:

$(\mathbb{R}^n, +, .)$ e $(\mathbb{S}, +, .)$ (Exemplo do Sistema massa-mola) são espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$.

Espaços Vetoriais

- Dados $u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos

$$u + v \in V \text{ e } \alpha . u \in V \leftarrow \text{As operações } + \text{ e . estão bem definidas!}$$

- Não definimos multiplicação de vetores. (u^2 é quadrático e não linear!)
- Para mostrar que uma tripla é um espaço vetorial, precisamos mostrar que as operações $+$ e . estão bem definidas em V e mostrar as propriedades A_1, A_2, A_3, A_4 e M_1, M_2, M_3, M_4.

Os elementos de V são chamados de **vetores.**

Exemplos:

$(\mathbb{R}^n, +, .)$ e $(\mathbb{S}, +, .)$ (Exemplo do Sistema massa-mola) são espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$.

Espaços Vetoriais

- Dados $u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos

$$u + v \in V \text{ e } \alpha.u \in V \leftarrow \text{ As operações } + \text{ e . estão bem definidas!}$$

- Não definimos multiplicação de vetores. (u^2 é quadrático e não linear!)
- Para mostrar que uma tripla é um espaço vetorial, precisamos mostrar que as operações $+$ e . estão bem definidas em V e mostrar as propriedades A_1, A_2, A_3, A_4 e M_1, M_2, M_3, M_4.

Os elementos de V são chamados de **vetores.**

Exemplos:

$(\mathbb{R}^n, +, .)$ e $(\mathbb{S}, +, .)$ (Exemplo do Sistema massa-mola) são espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$.

Espaços Vetoriais

- Dados $u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos

$$u + v \in V \text{ e } \alpha.u \in V \leftarrow \text{As operações } + \text{ e . estão bem definidas!}$$

- Não definimos multiplicação de vetores. (u^2 é quadrático e não linear!)
- Para mostrar que uma tripla é um espaço vetorial, precisamos mostrar que as operações $+$ e . estão bem definidas em V e mostrar as propriedades A_1, A_2, A_3, A_4 e M_1, M_2, M_3, M_4.

Os elementos de V são chamados de **vetores.**

Exemplos:

$(\mathbb{R}^n, +, .)$ e $(\mathbb{S}, +, .)$ (Exemplo do Sistema massa-mola) são espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$.

Espaços Vetoriais

- Dados $u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos

$$u + v \in V \text{ e } \alpha.u \in V \leftarrow \text{As operações } + \text{ e . estão bem definidas!}$$

- Não definimos multiplicação de vetores. (u^2 é quadrático e não linear!)
- Para mostrar que uma tripla é um espaço vetorial, precisamos mostrar que as operações $+$ e . estão bem definidas em V e mostrar as propriedades A_1, A_2, A_3, A_4 e M_1, M_2, M_3, M_4.

Os elementos de V são chamados de **vetores.**

Exemplos:

$(\mathbb{R}^n, +, .)$ e $(\mathbb{S}, +, .)$ (Exemplo do Sistema massa-mola) são espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$.