Espaços Vetoriais

Exemplos e Propriedades

Álgebra Linear

Mariana Silveira - Cristian Coletti

Universidade Federal do ABC

Exemplo

Consideremos $\mathbb{R}^2 = \{(a_1, a_2), a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2\}$.

Adição: Dados $u = (a_1, a_2), v = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, $u + v = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ (usual de $\mathbb{R}^2$)

Multiplicação por Escalar: Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha * u := (\alpha a_1, 0)$.

- Vimos que $(\mathbb{R}^2, +)$ satisfaz as propriedades A_1, A_2, A_3, A_4.

M_1- **Associativa**: $\alpha * (\beta * u) = (\alpha\beta) * u, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in \mathbb{R}^2$. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\alpha * (\beta * u) &= \alpha * (\beta * (a_1, a_2)) \\
\text{def de } * \rightarrow \quad &= \alpha * (\beta a_1, 0) \\
\text{def de } * \rightarrow \quad &= (\alpha(\beta a_1), 0) \\
\text{A1 em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow \quad &= ((\alpha\beta) a_1, 0) \\
\text{def de } * \rightarrow \quad &= (\alpha\beta) * (a_1, a_2) = (\alpha\beta) * u.
\end{aligned}$$

Exemplo

Consideremos $\mathbb{R}^2 = \{(a_1, a_2), a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2\}$.

Adição: Dados $u = (a_1, a_2), v = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, $u + v = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ (usual de $\mathbb{R}^2$)

Multiplicação por Escalar: Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha * u := (\alpha a_1, 0)$.

- Vimos que $(\mathbb{R}^2, +)$ satisfaz as propriedades A_1, A_2, A_3, A_4.

$M_1 -$ **Associativa:** $\alpha * (\beta * u) = (\alpha\beta) * u, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in \mathbb{R}^2$. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rl}
\alpha * (\beta * u) & = \alpha * (\beta * (a_1, a_2)) \\
\text{def de } * \rightarrow & = \alpha * (\beta a_1, 0) \\
\text{def de } * \rightarrow & = (\alpha(\beta a_1), 0) \\
\text{A1 em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow & = ((\alpha\beta) a_1, 0) \\
\text{def de } * \rightarrow & = (\alpha\beta) * (a_1, a_2) = (\alpha\beta) * u.
\end{array}$$

Exemplo

Consideremos $\mathbb{R}^2 = \{(a_1, a_2), a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2\}$.

Adição: Dados $u = (a_1, a_2), v = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, $u + v = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ (usual de $\mathbb{R}^2$)

Multiplicação por Escalar: Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha * u := (\alpha a_1, 0)$.

- Vimos que $(\mathbb{R}^2, +)$ satisfaz as propriedades A_1, A_2, A_3, A_4.

$M_1 -$ **Associativa:** $\alpha * (\beta * u) = (\alpha\beta) * u, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in \mathbb{R}^2$. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\alpha * (\beta * u) &= \alpha * (\beta * (a_1, a_2)) \\
\text{def de } * \longrightarrow \quad &= \alpha * (\beta a_1, 0) \\
\text{def de } * \longrightarrow \quad &= (\alpha(\beta a_1), 0) \\
\text{A1 em } (\mathbb{R}, .) \longrightarrow \quad &= ((\alpha\beta) a_1, 0) \\
\text{def de } * \longrightarrow \quad &= (\alpha\beta) * (a_1, a_2) = (\alpha\beta) * u.
\end{aligned}$$

Exemplo

Consideremos $\mathbb{R}^2 = \{(a_1, a_2), a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2\}$.

Adição: Dados $u = (a_1, a_2), v = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, $u + v = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ (usual de $\mathbb{R}^2$)

Multiplicação por Escalar: Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha * u := (\alpha a_1, 0)$.

- Vimos que $(\mathbb{R}^2, +)$ satisfaz as propriedades A_1, A_2, A_3, A_4.

$M_1 -$ **Associativa:** $\alpha * (\beta * u) = (\alpha\beta) * u, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in \mathbb{R}^2$. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$
\begin{aligned}
\alpha * (\beta * u) &= \alpha * (\beta * (a_1, a_2)) \\
\text{def de } * \rightarrow \quad &= \alpha * (\beta a_1, 0) \\
\text{def de } * \rightarrow \quad &= (\alpha(\beta a_1), 0) \\
\text{A1 em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow \quad &= ((\alpha\beta) a_1, 0) \\
\text{def de } * \rightarrow \quad &= (\alpha\beta) * (a_1, a_2) = (\alpha\beta) * u.
\end{aligned}
$$

Exemplo

Consideremos $\mathbb{R}^2 = \{(a_1, a_2), a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2\}$.

Adição: Dados $u = (a_1, a_2), v = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, $u + v = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ (usual de $\mathbb{R}^2$)

Multiplicação por Escalar: Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha * u := (\alpha a_1, 0)$.

- Vimos que $(\mathbb{R}^2, +)$ satisfaz as propriedades A_1, A_2, A_3, A_4.

$M_1 -$ **Associativa**: $\alpha * (\beta * u) = (\alpha\beta) * u, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in \mathbb{R}^2$. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\alpha * (\beta * u) &= \alpha * (\beta * (a_1, a_2)) \\
\text{def de } * \rightarrow \quad &= \alpha * (\beta a_1, 0) \\
\text{def de } * \rightarrow \quad &= (\alpha(\beta a_1), 0) \\
\text{A1 em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow \quad &= ((\alpha\beta) a_1, 0) \\
\text{def de } * \rightarrow \quad &= (\alpha\beta) * (a_1, a_2) = (\alpha\beta) * u.
\end{aligned}$$

Exemplo

Consideremos $\mathbb{R}^2 = \{(a_1, a_2), a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2\}$.

Adição: Dados $u = (a_1, a_2), v = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, $u + v = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ (usual de $\mathbb{R}^2$)

Multiplicação por Escalar: Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha * u := (\alpha a_1, 0)$.

- Vimos que $(\mathbb{R}^2, +)$ satisfaz as propriedades A_1, A_2, A_3, A_4.

$M_1 -$ **Associativa**: $\alpha * (\beta * u) = (\alpha\beta) * u, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in \mathbb{R}^2$. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$
\begin{aligned}
\alpha * (\beta * u) &= \alpha * (\beta * (a_1, a_2)) \\
\text{def de } * \rightarrow &= \alpha * (\beta a_1, 0) \\
\text{def de } * \rightarrow &= (\alpha(\beta a_1), 0) \\
\text{A1 em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow &= ((\alpha\beta) a_1, 0) \\
\text{def de } * \rightarrow &= (\alpha\beta) * (a_1, a_2) = (\alpha\beta) * u.
\end{aligned}
$$

Exemplo

Consideremos $\mathbb{R}^2 = \{(a_1, a_2), a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2\}$.

Adição: Dados $u = (a_1, a_2), v = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, $u + v = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ (usual de $\mathbb{R}^2$)

Multiplicação por Escalar: Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha * u := (\alpha a_1, 0)$.

- Vimos que $(\mathbb{R}^2, +)$ satisfaz as propriedades A_1, A_2, A_3, A_4.

$M_1 -$ **Associativa**: $\alpha * (\beta * u) = (\alpha\beta) * u, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in \mathbb{R}^2$. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$
\begin{aligned}
\alpha * (\beta * u) &= \alpha * (\beta * (a_1, a_2)) \\
\text{def de } * \longrightarrow &= \alpha * (\beta a_1, 0) \\
\text{def de } * \longrightarrow &= (\alpha(\beta a_1), 0) \\
\text{A1 em } (\mathbb{R}, .) \longrightarrow &= ((\alpha\beta) a_1, 0) \\
\text{def de } * \longrightarrow &= (\alpha\beta) * (a_1, a_2) = (\alpha\beta) * u.
\end{aligned}
$$

Exemplo

Consideremos $\mathbb{R}^2 = \{(a_1, a_2), a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2\}$.

Adição: Dados $u = (a_1, a_2), v = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, $u + v = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ (usual de $\mathbb{R}^2$)

Multiplicação por Escalar: Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha * u := (\alpha a_1, 0)$.

- Vimos que $(\mathbb{R}^2, +)$ satisfaz as propriedades A_1, A_2, A_3, A_4.

$M_1 -$ **Associativa**: $\alpha * (\beta * u) = (\alpha\beta) * u, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in \mathbb{R}^2$. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$
\begin{aligned}
\alpha * (\beta * u) &= \alpha * (\beta * (a_1, a_2)) \\
\text{def de } * \rightarrow \quad &= \alpha * (\beta a_1, 0) \\
\text{def de } * \rightarrow \quad &= (\alpha(\beta a_1), 0) \\
\text{A1 em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow \quad &= ((\alpha\beta) a_1, 0) \\
\text{def de } * \rightarrow \quad &= (\alpha\beta) * (a_1, a_2) = (\alpha\beta) * u.
\end{aligned}
$$

Exemplo

Consideremos $\mathbb{R}^2 = \{(a_1, a_2), a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2\}$.

Adição: Dados $u = (a_1, a_2), v = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, $u + v = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ (usual de $\mathbb{R}^2$)

Multiplicação por Escalar: Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha * u := (\alpha a_1, 0)$.

- Vimos que $(\mathbb{R}^2, +)$ satisfaz as propriedades A_1, A_2, A_3, A_4.

M_1 – **Associativa**: $\alpha * (\beta * u) = (\alpha\beta) * u, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in \mathbb{R}^2$. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\alpha * (\beta * u) &= \alpha * (\beta * (a_1, a_2)) \\
\text{def de } * \rightarrow \quad &= \alpha * (\beta a_1, 0) \\
\text{def de } * \rightarrow \quad &= (\alpha(\beta a_1), 0) \\
\text{A1 em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow \quad &= ((\alpha\beta) a_1, 0) \\
\text{def de } * \rightarrow \quad &= (\alpha\beta) * (a_1, a_2) = (\alpha\beta) * u.
\end{aligned}$$

Exemplo

Consideremos $\mathbb{R}^2 = \{(a_1, a_2), a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2\}$.

Adição: Dados $u = (a_1, a_2), v = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, $u + v = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ (usual de $\mathbb{R}^2$)

Multiplicação por Escalar: Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha * u := (\alpha a_1, 0)$.

- Vimos que $(\mathbb{R}^2, +)$ satisfaz as propriedades A_1, A_2, A_3, A_4.

$M_1 -$ **Associativa**: $\alpha * (\beta * u) = (\alpha\beta) * u, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in \mathbb{R}^2$. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\alpha * (\beta * u) &= \alpha * (\beta * (a_1, a_2)) \\
\text{def de } * \rightarrow \quad &= \alpha * (\beta a_1, 0) \\
\text{def de } * \rightarrow \quad &= (\alpha(\beta a_1), 0) \\
\text{A1 em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow \quad &= ((\alpha\beta) a_1, 0) \\
\text{def de } * \rightarrow \quad &= (\alpha\beta) * (a_1, a_2) = (\alpha\beta) * u.
\end{aligned}$$

Exemplo

- $(\mathbb{R}^2, +, *)$ satisfaz as propriedades M_1, M_2, M_3.

M_4- **Identidade**: $1 * u = u, \ \forall u \in \mathbb{R}^2$. Seja $u = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} 1 * u &= 1 * (a_1, a_2) \\ \text{def de } * \longrightarrow \quad &= (1.a_1, 0) \\ &= (a_1, 0) \neq u. \end{aligned}$$

- $(\mathbb{R}^2, +, *)$ não satisfaz a propriedade M_4, logo $(\mathbb{R}^2, +, *)$ não é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Exemplo

- $(\mathbb{R}^2, +, *)$ satisfaz as propriedades M_1, M_2, M_3.

M_4- **Identidade**: $1 * u = u, \;\; \forall u \in \mathbb{R}^2$. Seja $u = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} 1 * u &= 1 * (a_1, a_2) \\ \text{def de } * \rightarrow \quad &= (1.a_1, 0) \\ &= (a_1, 0) \neq u. \end{aligned}$$

- $(\mathbb{R}^2, +, *)$ não satisfaz a propriedade M_4, logo $(\mathbb{R}^2, +, *)$ não é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Exemplo

- $(\mathbb{R}^2, +, *)$ satisfaz as propriedades M_1, M_2, M_3.

M_4- **Identidade**: $1 * u = u, \ \forall u \in \mathbb{R}^2$. Seja $u = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$
\begin{aligned}
1 * u &= 1 * (a_1, a_2) \\
\text{def de } * \longrightarrow \quad &= (1.a_1, 0) \\
&= (a_1, 0) \neq u.
\end{aligned}
$$

- $(\mathbb{R}^2, +, *)$ não satisfaz a propriedade M_4, logo $(\mathbb{R}^2, +, *)$ não é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Exemplo

- $(\mathbb{R}^2, +, *)$ satisfaz as propriedades M_1, M_2, M_3.

M_4- **Identidade**: $1 * u = u, \;\; \forall u \in \mathbb{R}^2$. Seja $u = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} 1 * u &= 1 * (a_1, a_2) \\ \text{def de } * \longrightarrow \quad &= (1.a_1, 0) \\ &= (a_1, 0) \neq u. \end{aligned}$$

- $(\mathbb{R}^2, +, *)$ não satisfaz a propriedade M_4, logo $(\mathbb{R}^2, +, *)$ não é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Exemplo

- $(\mathbb{R}^2, +, *)$ satisfaz as propriedades M_1, M_2, M_3.

M_4- **Identidade**: $1 * u = u, \ \forall u \in \mathbb{R}^2$. Seja $u = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} 1 * u &= 1 * (a_1, a_2) \\ \text{def de } * \longrightarrow \quad &= (1.a_1, 0) \\ &= (a_1, 0) \neq u. \end{aligned}$$

- $(\mathbb{R}^2, +, *)$ não satisfaz a propriedade M_4, logo $(\mathbb{R}^2, +, *)$ não é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Exemplo: Espaço das Funções

Consideremos $F(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.

Adição: Dados $f, g \in F(\mathbb{R})$, a operação $(f, g) \mapsto f + g$, onde

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

é uma operação binária em $F(\mathbb{R})$ satisfazendo:

A_1- **Associativa**: $(f+g)+h = f+(g+h), \ \forall f, g, h \in F(\mathbb{R})$.

Sejam $f, g, h \in F(\mathbb{R})$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}
((f+g)+h)(x) &\overset{\text{def de } +}{=} (f+g)(x) + h(x) \\
\text{def de } + \to \quad &= (f(x)+g(x)) + h(x) \\
\text{A1 em } \mathbb{R} \to \quad &= f(x) + (g(x)+h(x)) \\
\text{def de } + \to \quad &= f(x) + (g+h)(x) \\
\text{def de } + \to \quad &= (f+(g+h))(x)
\end{aligned}$$

Exemplo: Espaço das Funções

Consideremos $F(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.

Adição: Dados $f, g \in F(\mathbb{R})$, a operação $(f, g) \mapsto f + g$, onde

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

é uma operação binária em $F(\mathbb{R})$ satisfazendo:

$A_1 -$ **Associativa**: $(f+g)+h = f+(g+h), \ \ \forall f, g, h \in F(\mathbb{R})$.

Sejam $f, g, h \in F(\mathbb{R})$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}
((f+g)+h)(x) &\overset{\text{def de } +}{\overset{\downarrow}{=}} (f+g)(x) + h(x) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= (f(x)+g(x)) + h(x) \\
\text{A1 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= f(x) + (g(x)+h(x)) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= f(x) + (g+h)(x) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= (f+(g+h))(x)
\end{aligned}$$

Exemplo: Espaço das Funções

Consideremos $F(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.

Adição: Dados $f, g \in F(\mathbb{R})$, a operação $(f, g) \mapsto f + g$, onde

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

é uma operação binária em $F(\mathbb{R})$ satisfazendo:

A_1- **Associativa**: $(f + g) + h = f + (g + h), \;\; \forall f, g, h \in F(\mathbb{R})$.

Sejam $f, g, h \in F(\mathbb{R})$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}
((f+g)+h)(x) &\overset{\text{def de } +}{\overset{\downarrow}{=}} (f+g)(x) + h(x) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= (f(x)+g(x)) + h(x) \\
\text{A1 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= f(x) + (g(x)+h(x)) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= f(x) + (g+h)(x) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= (f+(g+h))(x)
\end{aligned}$$

Exemplo: Espaço das Funções

Consideremos $F(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.

Adição: Dados $f, g \in F(\mathbb{R})$, a operação $(f, g) \mapsto f + g$, onde

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

é uma operação binária em $F(\mathbb{R})$ satisfazendo:

$A_1 -$ **Associativa**: $(f+g)+h = f+(g+h), \ \forall f, g, h \in F(\mathbb{R})$.

Sejam $f, g, h \in F(\mathbb{R})$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}
((f+g)+h)(x) &\overset{\text{def de } +}{\overset{\downarrow}{=}} (f+g)(x) + h(x) \\
\text{def de } + \longrightarrow \quad &= (f(x)+g(x)) + h(x) \\
\text{A1 em } \mathbb{R} \longrightarrow \quad &= f(x) + (g(x)+h(x)) \\
\text{def de } + \longrightarrow \quad &= f(x) + (g+h)(x) \\
\text{def de } + \longrightarrow \quad &= (f+(g+h))(x)
\end{aligned}$$

Exemplo: Espaço das Funções

Consideremos $F(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.

Adição: Dados $f, g \in F(\mathbb{R})$, a operação $(f, g) \mapsto f + g$, onde

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

é uma operação binária em $F(\mathbb{R})$ satisfazendo:

$A_1 -$ **Associativa**: $(f+g)+h = f+(g+h), \ \forall f, g, h \in F(\mathbb{R})$.

Sejam $f, g, h \in F(\mathbb{R})$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}
((f+g)+h)(x) &\overset{\text{def de } +}{=} (f+g)(x) + h(x) \\
\text{def de } + \to \quad &= (f(x)+g(x)) + h(x) \\
\text{A1 em } \mathbb{R} \to \quad &= f(x) + (g(x)+h(x)) \\
\text{def de } + \to \quad &= f(x) + (g+h)(x) \\
\text{def de } + \to \quad &= (f+(g+h))(x)
\end{aligned}$$

Exemplo: Espaço das Funções

Consideremos $F(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.

Adição: Dados $f, g \in F(\mathbb{R})$, a operação $(f, g) \mapsto f + g$, onde

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

é uma operação binária em $F(\mathbb{R})$ satisfazendo:

$A_1 -$ **Associativa**: $(f+g)+h = f+(g+h), \ \forall f, g, h \in F(\mathbb{R})$.

Sejam $f, g, h \in F(\mathbb{R})$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}
((f+g)+h)(x) &\overset{\text{def de } +}{\overset{\downarrow}{=}} (f+g)(x) + h(x) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= (f(x)+g(x)) + h(x) \\
\text{A1 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= f(x) + (g(x)+h(x)) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= f(x) + (g+h)(x) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= (f+(g+h))(x)
\end{aligned}$$

Exemplo: Espaço das Funções

Consideremos $F(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.

Adição: Dados $f, g \in F(\mathbb{R})$, a operação $(f, g) \mapsto f + g$, onde

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

é uma operação binária em $F(\mathbb{R})$ satisfazendo:

$A_1 -$ **Associativa**: $(f+g)+h = f+(g+h), \ \forall f, g, h \in F(\mathbb{R})$.

Sejam $f, g, h \in F(\mathbb{R})$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}
((f+g)+h)(x) &\overset{\text{def de } +}{=} (f+g)(x) + h(x) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= (f(x)+g(x)) + h(x) \\
\text{A1 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= f(x) + (g(x)+h(x)) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= f(x) + (g+h)(x) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= (f+(g+h))(x)
\end{aligned}$$

Exemplo: Espaço das Funções

Consideremos $F(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.

Adição: Dados $f, g \in F(\mathbb{R})$, a operação $(f, g) \mapsto f + g$, onde

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

é uma operação binária em $F(\mathbb{R})$ satisfazendo:

$A_1 -$ **Associativa**: $(f + g) + h = f + (g + h), \ \forall f, g, h \in F(\mathbb{R})$.

Sejam $f, g, h \in F(\mathbb{R})$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}
((f+g)+h)(x) &\overset{\substack{\text{def de } + \\ \downarrow}}{=} (f+g)(x) + h(x) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= (f(x)+g(x)) + h(x) \\
\text{A1 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= f(x) + (g(x)+h(x)) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= f(x) + (g+h)(x) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= (f+(g+h))(x)
\end{aligned}$$

Exemplo: Espaço das Funções

A_2- **Comutativa**: $f+g=g+f,\ \forall f,g\in F(\mathbb{R})$. Sejam $f,g\in F(\mathbb{R})$. Para todo $x\in\mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}
(f+g)(x) &\overset{\text{def de }+}{=} f(x)+g(x)\\
\text{A2 em }\mathbb{R}\longrightarrow &= g(x)+f(x)\\
\text{def de }+\longrightarrow &= (g+f)(x).
\end{aligned}$$

A_3- **Elemento Neutro**: existe $\theta\in F(\mathbb{R})$ tal que $f+\theta=\theta+f=f,\ \forall f\in F(\mathbb{R})$. Considere $\theta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $\theta(x)=0$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Seja $f\in F(\mathbb{R})$. Para todo $x\in\mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}
(f+\theta)(x) &\overset{\text{def de }+}{=} f(x)+\theta(x)\\
\text{def de }\theta\longrightarrow &= f(x)+0\\
\text{A3 em }\mathbb{R}\longrightarrow &= f(x).
\end{aligned}$$

Analogamente, $\theta+f=f,\ \forall f\in F(\mathbb{R})$.

Exemplo: Espaço das Funções

A_2- **Comutativa**: $f+g=g+f,\ \forall f,g\in F(\mathbb{R})$. Sejam $f,g\in F(\mathbb{R})$. Para todo $x\in\mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &\overset{\text{def de }+}{\overset{\downarrow}{=}} f(x)+g(x)\\ \text{A2 em }\mathbb{R}\longrightarrow\quad &= g(x)+f(x)\\ \text{def de }+\longrightarrow\quad &= (g+f)(x).\end{aligned}$$

A_3- **Elemento Neutro**: existe $\theta\in F(\mathbb{R})$ tal que $f+\theta=\theta+f=f,\ \forall f\in F(\mathbb{R})$.

Considere $\theta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $\theta(x)=0$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Seja $f\in F(\mathbb{R})$. Para todo $x\in\mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}(f+\theta)(x) &\overset{\text{def de }+}{\overset{\downarrow}{=}} f(x)+\theta(x)\\ \text{def de }\theta\longrightarrow\quad &= f(x)+0\\ \text{A3 em }\mathbb{R}\longrightarrow\quad &= f(x).\end{aligned}$$

Analogamente, $\theta+f=f,\ \forall f\in F(\mathbb{R})$.

Exemplo: Espaço das Funções

A_2- **Comutativa**: $f+g=g+f, \ \forall f,g\in F(\mathbb{R})$. Sejam $f,g\in F(\mathbb{R})$. Para todo $x\in\mathbb{R}$ temos

$$
\begin{aligned}
(f+g)(x) &\overset{\substack{\text{def de } + \\ \downarrow}}{=} f(x)+g(x) \\
\text{A2 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= g(x)+f(x) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= (g+f)(x).
\end{aligned}
$$

A_3- **Elemento Neutro**: existe $\theta\in F(\mathbb{R})$ tal que $f+\theta=\theta+f=f, \ \forall f\in F(\mathbb{R})$. Considere $\theta:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ dada por $\theta(x)=0$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Seja $f\in F(\mathbb{R})$. Para todo $x\in\mathbb{R}$ temos

$$
\begin{aligned}
(f+\theta)(x) &\overset{\substack{\text{def de } + \\ \downarrow}}{=} f(x)+\theta(x) \\
\text{def de } \theta \rightarrow \quad &= f(x)+0 \\
\text{A3 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= f(x).
\end{aligned}
$$

Analogamente, $\theta+f=f, \ \forall f\in F(\mathbb{R})$.

Exemplo: Espaço das Funções

A_2- **Comutativa**: $f+g=g+f, \ \forall f,g \in F(\mathbb{R})$. Sejam $f,g \in F(\mathbb{R})$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &\overset{\text{def de }+}{=} f(x)+g(x) \\ \text{A2 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= g(x)+f(x) \\ \text{def de } + \rightarrow \quad &= (g+f)(x). \end{aligned}$$

A_3- **Elemento Neutro**: existe $\theta \in F(\mathbb{R})$ tal que $f+\theta=\theta+f=f, \ \forall f \in F(\mathbb{R})$. Considere $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\theta(x)=0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Seja $f \in F(\mathbb{R})$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} (f+\theta)(x) &\overset{\text{def de }+}{=} f(x)+\theta(x) \\ \text{def de } \theta \rightarrow \quad &= f(x)+0 \\ \text{A3 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= f(x). \end{aligned}$$

Analogamente, $\theta+f=f, \ \forall f \in F(\mathbb{R})$.

Exemplo: Espaço das Funções

A_2- **Comutativa**: $f+g=g+f, \ \forall f,g \in F(\mathbb{R})$. Sejam $f,g \in F(\mathbb{R})$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &\overset{\text{def de }+}{\overset{\downarrow}{=}} f(x)+g(x) \\ \text{A2 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= g(x)+f(x) \\ \text{def de } + \rightarrow \quad &= (g+f)(x). \end{aligned}$$

A_3- **Elemento Neutro**: existe $\theta \in F(\mathbb{R})$ tal que $f+\theta=\theta+f=f, \ \forall f \in F(\mathbb{R})$.

Considere $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\theta(x)=0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Seja $f \in F(\mathbb{R})$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} (f+\theta)(x) &\overset{\text{def de }+}{\overset{\downarrow}{=}} f(x)+\theta(x) \\ \text{def de } \theta \rightarrow \quad &= f(x)+0 \\ \text{A3 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= f(x). \end{aligned}$$

Analogamente, $\theta+f=f, \ \forall f \in F(\mathbb{R})$.

Exemplo: Espaço das Funções

A_2- **Comutativa**: $f+g=g+f,\ \forall f,g\in F(\mathbb{R})$. Sejam $f,g\in F(\mathbb{R})$. Para todo $x\in\mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &\overset{\substack{\text{def de } +\\ \downarrow}}{=} f(x)+g(x)\\ \text{A2 em } \mathbb{R} \rightarrow\quad &= g(x)+f(x)\\ \text{def de } + \rightarrow\quad &= (g+f)(x).\end{aligned}$$

A_3- **Elemento Neutro**: existe $\theta\in F(\mathbb{R})$ tal que $f+\theta=\theta+f=f,\ \forall f\in F(\mathbb{R})$. Considere $\theta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $\theta(x)=0$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Seja $f\in F(\mathbb{R})$. Para todo $x\in\mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}(f+\theta)(x) &\overset{\substack{\text{def de } +\\ \downarrow}}{=} f(x)+\theta(x)\\ \text{def de } \theta \rightarrow\quad &= f(x)+0\\ \text{A3 em } \mathbb{R} \rightarrow\quad &= f(x).\end{aligned}$$

Analogamente, $\theta+f=f,\ \forall f\in F(\mathbb{R})$.

Exemplo: Espaço das Funções

A_2- **Comutativa**: $f+g=g+f,\ \ \forall f,g\in F(\mathbb{R})$. Sejam $f,g\in F(\mathbb{R})$. Para todo $x\in\mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}
(f+g)(x) &\overset{\text{def de } +}{\overset{\downarrow}{=}} f(x)+g(x)\\
\text{A2 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= g(x)+f(x)\\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= (g+f)(x).
\end{aligned}$$

A_3- **Elemento Neutro**: existe $\theta\in F(\mathbb{R})$ tal que $f+\theta=\theta+f=f,\ \ \forall f\in F(\mathbb{R})$. Considere $\theta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $\theta(x)=0$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Seja $f\in F(\mathbb{R})$. Para todo $x\in\mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}
(f+\theta)(x) &\overset{\text{def de } +}{\overset{\downarrow}{=}} f(x)+\theta(x)\\
\text{def de } \theta \rightarrow \quad &= f(x)+0\\
\text{A3 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= f(x).
\end{aligned}$$

Analogamente, $\theta+f=f,\ \ \forall f\in F(\mathbb{R})$.

Exemplo: Espaço das Funções

A_2- **Comutativa**: $f+g=g+f, \ \ \forall f,g \in F(\mathbb{R})$. Sejam $f,g\in F(\mathbb{R})$. Para todo $x\in\mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &\overset{\text{def de } +}{=} f(x)+g(x) \\ \text{A2 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= g(x)+f(x) \\ \text{def de } + \rightarrow \quad &= (g+f)(x). \end{aligned}$$

A_3- **Elemento Neutro**: existe $\theta\in F(\mathbb{R})$ tal que $f+\theta=\theta+f=f, \ \ \forall f\in F(\mathbb{R})$. Considere $\theta:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ dada por $\theta(x)=0$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Seja $f\in F(\mathbb{R})$. Para todo $x\in\mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} (f+\theta)(x) &\overset{\text{def de } +}{=} f(x)+\theta(x) \\ \text{def de } \theta \rightarrow \quad &= f(x)+0 \\ \text{A3 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= f(x). \end{aligned}$$

Analogamente, $\theta+f=f, \ \ \forall f\in F(\mathbb{R})$.

Exemplo: Espaço das Funções

A_2- **Comutativa**: $f+g=g+f, \ \forall f,g \in F(\mathbb{R})$. Sejam $f,g \in F(\mathbb{R})$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &\overset{\overset{\text{def de } +}{\downarrow}}{=} f(x)+g(x) \\ \text{A2 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= g(x)+f(x) \\ \text{def de } + \rightarrow \quad &= (g+f)(x). \end{aligned}$$

A_3- **Elemento Neutro**: existe $\theta \in F(\mathbb{R})$ tal que $f+\theta=\theta+f=f, \ \forall f \in F(\mathbb{R})$. Considere $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\theta(x)=0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Seja $f \in F(\mathbb{R})$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} (f+\theta)(x) &\overset{\overset{\text{def de } +}{\downarrow}}{=} f(x)+\theta(x) \\ \text{def de } \theta \rightarrow \quad &= f(x)+0 \\ \text{A3 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= f(x). \end{aligned}$$

Analogamente, $\theta+f=f, \ \forall f \in F(\mathbb{R})$.

Exemplo: Espaço das Funções

A_2- **Comutativa**: $f+g=g+f, \ \forall f,g \in F(\mathbb{R})$. Sejam $f,g \in F(\mathbb{R})$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$
\begin{aligned}
(f+g)(x) &\overset{\substack{\text{def de }+\\ \downarrow}}{=} f(x)+g(x) \\
\text{A2 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= g(x)+f(x) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= (g+f)(x).
\end{aligned}
$$

A_3- **Elemento Neutro**: existe $\theta \in F(\mathbb{R})$ tal que $f+\theta=\theta+f=f, \ \forall f \in F(\mathbb{R})$. Considere $\theta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $\theta(x)=0$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Seja $f \in F(\mathbb{R})$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$
\begin{aligned}
(f+\theta)(x) &\overset{\substack{\text{def de }+\\ \downarrow}}{=} f(x)+\theta(x) \\
\text{def de } \theta \rightarrow \quad &= f(x)+0 \\
\text{A3 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= f(x).
\end{aligned}
$$

Analogamente, $\theta+f=f, \ \forall f \in F(\mathbb{R})$.

Exemplo: Espaço das Funções

A_4- **Elemento Inverso**: para todo $f \in F(\mathbb{R})$ existe $(-f) \in F(\mathbb{R})$ tal que $f + (-f) = (-f) + f = \theta$. Dado $f \in F(\mathbb{R})$, seja $(-f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $(-f)(x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}
(f + (-f))(x) &\overset{\text{def de } +}{=} f(x) + (-f)(x) \\
\text{def de } (-f) \rightarrow \quad &= f(x) + (-f(x)) \\
\text{A4 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= 0 = \theta(x)
\end{aligned}$$

Analogamente, $(-f) + f = \theta$.

Portanto $(F(\mathbb{R}), +)$ é um grupo abeliano.

Exemplo: Espaço das Funções

A_4- **Elemento Inverso**: para todo $f \in F(\mathbb{R})$ existe $(-f) \in F(\mathbb{R})$ tal que $f + (-f) = (-f) + f = \theta$. Dado $f \in F(\mathbb{R})$, seja $(-f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $(-f)(x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$
\begin{aligned}
(f + (-f))(x) \quad & \overset{\substack{\text{def de } + \\ \downarrow}}{=} f(x) + (-f)(x) \\
\text{def de } (-f) \rightarrow \quad & = f(x) + (-f(x)) \\
\text{A4 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad & = 0 = \theta(x)
\end{aligned}
$$

Analogamente, $(-f) + f = \theta$.

Portanto $(F(\mathbb{R}), +)$ é um grupo abeliano.

Exemplo: Espaço das Funções

A_4- **Elemento Inverso**: para todo $f \in F(\mathbb{R})$ existe $(-f) \in F(\mathbb{R})$ tal que $f + (-f) = (-f) + f = \theta$. Dado $f \in F(\mathbb{R})$, seja $(-f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $(-f)(x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} (f + (-f))(x) \quad &\overset{\substack{\text{def de } + \\ \downarrow}}{=} f(x) + (-f)(x) \\ \text{def de } (-f) \rightarrow \quad &= f(x) + (-f(x)) \\ \text{A4 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= 0 = \theta(x) \end{aligned}$$

Analogamente, $(-f) + f = \theta$.

Portanto $(F(\mathbb{R}), +)$ é um grupo abeliano.

Exemplo: Espaço das Funções

A_4- **Elemento Inverso**: para todo $f \in F(\mathbb{R})$ existe $(-f) \in F(\mathbb{R})$ tal que $f + (-f) = (-f) + f = \theta$. Dado $f \in F(\mathbb{R})$, seja $(-f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $(-f)(x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$
\begin{aligned}
(f + (-f))(x) & \overset{\text{def de } + \atop \downarrow}{=} f(x) + (-f)(x) \\
\text{def de } (-f) \rightarrow \quad & = f(x) + (-f(x)) \\
\text{A4 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad & = 0 = \theta(x)
\end{aligned}
$$

Analogamente, $(-f) + f = \theta$.

Portanto $(F(\mathbb{R}), +)$ é um grupo abeliano.

Exemplo: Espaço das Funções

A_4- **Elemento Inverso**: para todo $f \in F(\mathbb{R})$ existe $(-f) \in F(\mathbb{R})$ tal que $f + (-f) = (-f) + f = \theta$. Dado $f \in F(\mathbb{R})$, seja $(-f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $(-f)(x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$
\begin{aligned}
(f + (-f))(x) &\overset{\substack{\text{def de } + \\ \downarrow}}{=} f(x) + (-f)(x) \\
\text{def de } (-f) \rightarrow \quad &= f(x) + (-f(x)) \\
\text{A4 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= 0 = \theta(x)
\end{aligned}
$$

Analogamente, $(-f) + f = \theta$.

Portanto $(F(\mathbb{R}), +)$ é um grupo abeliano.

Exemplo: Espaço das Funções

A_4- **Elemento Inverso**: para todo $f \in F(\mathbb{R})$ existe $(-f) \in F(\mathbb{R})$ tal que $f + (-f) = (-f) + f = \theta$. Dado $f \in F(\mathbb{R})$, seja $(-f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $(-f)(x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} (f + (-f))(x) &\overset{\substack{\text{def de } + \\ \downarrow}}{=} f(x) + (-f)(x) \\ \text{def de } (-f) \to \quad &= f(x) + (-f(x)) \\ \text{A4 em } \mathbb{R} \to \quad &= 0 = \theta(x) \end{aligned}$$

Analogamente, $(-f) + f = \theta$.

Portanto $(F(\mathbb{R}), +)$ é um grupo abeliano.

Exemplo: Espaço das Funções

Multiplicação por Escalar: Dados $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in F(\mathbb{R})$, a operação $(\alpha, f) \mapsto \alpha.f$, onde

$$(\alpha.f)(x) := \alpha f(x)$$

é uma operação satisfazendo:

$M_1 -$ **Associativa**: $\alpha.(\beta.f) = (\alpha\beta).f, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall f \in F(\mathbb{R})$.

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $f \in F(\mathbb{R})$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} (\alpha.(\beta.f))(x) &\overset{\substack{\text{def de .} \\ \downarrow}}{=} \alpha((\beta.f)(x)) \\ \text{def de .} \longrightarrow &= \alpha(\beta(f(x))) \\ \text{A1 em } (\mathbb{R}, .) \longrightarrow &= (\alpha\beta)f(x) \\ \text{def de .} \longrightarrow &= ((\alpha\beta).f)(x). \end{aligned}$$

Exemplo: Espaço das Funções

Multiplicação por Escalar: Dados $\alpha \in \mathbb{R}, f \in F(\mathbb{R})$, a operação $(\alpha, f) \mapsto \alpha.f$, onde

$$(\alpha.f)(x) := \alpha f(x)$$

é uma operação satisfazendo:

$M_1 -$ **Associativa**: $\alpha.(\beta.f) = (\alpha\beta).f, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall f \in F(\mathbb{R})$.

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $f \in F(\mathbb{R})$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}
(\alpha.(\beta.f))(x) &\overset{\text{def de .}}{\overset{\downarrow}{=}} \alpha((\beta.f)(x)) \\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= \alpha(\beta(f(x))) \\
\text{A1 em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow \quad &= (\alpha\beta)f(x) \\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= ((\alpha\beta).f)(x).
\end{aligned}$$

Exemplo: Espaço das Funções

Multiplicação por Escalar: Dados $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in F(\mathbb{R})$, a operação $(\alpha, f) \mapsto \alpha.f$, onde

$$(\alpha.f)(x) := \alpha f(x)$$

é uma operação satisfazendo:

$M_1 -$ **Associativa**: $\alpha.(\beta.f) = (\alpha\beta).f, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall f \in F(\mathbb{R})$.

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $f \in F(\mathbb{R})$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} (\alpha.(\beta.f))(x) &\overset{\substack{\text{def de .}\\ \downarrow}}{=} \alpha((\beta.f)(x)) \\ \text{def de .} \longrightarrow \quad &= \alpha(\beta(f(x))) \\ \text{A1 em } (\mathbb{R}, .) \longrightarrow \quad &= (\alpha\beta)f(x) \\ \text{def de .} \longrightarrow \quad &= ((\alpha\beta).f)(x). \end{aligned}$$

Exemplo: Espaço das Funções

Multiplicação por Escalar: Dados $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in F(\mathbb{R})$, a operação $(\alpha, f) \mapsto \alpha.f$, onde

$$(\alpha.f)(x) := \alpha f(x)$$

é uma operação satisfazendo:

$M_1 -$ **Associativa**: $\alpha.(\beta.f) = (\alpha\beta).f, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall f \in F(\mathbb{R})$.

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $f \in F(\mathbb{R})$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$
\begin{aligned}
(\alpha.(\beta.f))(x) &\overset{\text{def de .}}{\overset{\downarrow}{=}} \alpha((\beta.f)(x))\\
\text{def de .} \rightarrow \quad &= \alpha(\beta(f(x)))\\
\text{A1 em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow \quad &= (\alpha\beta)f(x)\\
\text{def de .} \rightarrow \quad &= ((\alpha\beta).f)(x).
\end{aligned}
$$

Exemplo: Espaço das Funções

Multiplicação por Escalar: Dados $\alpha \in \mathbb{R}, f \in F(\mathbb{R})$, a operação $(\alpha, f) \mapsto \alpha.f$, onde

$$(\alpha.f)(x) := \alpha f(x)$$

é uma operação satisfazendo:

$M_1 -$ **Associativa**: $\alpha.(\beta.f) = (\alpha\beta).f, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall f \in F(\mathbb{R})$.

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $f \in F(\mathbb{R})$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}
(\alpha.(\beta.f))(x) &\overset{\text{def de .}}{=} \alpha((\beta.f)(x)) \\
\text{def de .} \rightarrow \quad &= \alpha(\beta(f(x))) \\
\text{A1 em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow \quad &= (\alpha\beta)f(x) \\
\text{def de .} \rightarrow \quad &= ((\alpha\beta).f)(x).
\end{aligned}$$

Exemplo: Espaço das Funções

Multiplicação por Escalar: Dados $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in F(\mathbb{R})$, a operação $(\alpha, f) \mapsto \alpha.f$, onde

$$(\alpha.f)(x) := \alpha f(x)$$

é uma operação satisfazendo:

M_1- **Associativa**: $\alpha.(\beta.f) = (\alpha\beta).f, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall f \in F(\mathbb{R})$.

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $f \in F(\mathbb{R})$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}
(\alpha.(\beta.f))(x) & \overset{\text{def de .}}{=} \alpha((\beta.f)(x)) \\
\text{def de .} \rightarrow \quad & = \alpha(\beta(f(x))) \\
\text{A1 em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow \quad & = (\alpha\beta)f(x) \\
\text{def de .} \rightarrow \quad & = ((\alpha\beta).f)(x).
\end{aligned}$$

Exemplo: Espaço das Funções

M_2- **Distributiva sobre a adição de escalares**: $(\alpha+\beta).f = \alpha.f + \beta.f, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall f \in F(\mathbb{R})$. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $f \in F(\mathbb{R})$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} ((\alpha+\beta).f)(x) &\overset{\text{def de .}}{=} (\alpha+\beta)f(x) \\ \text{distributiva em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow \quad &= \alpha f(x) + \beta f(x) \\ \text{def de . } \rightarrow \quad &= (\alpha.f)(x) + (\beta.f)(x) \\ \text{def de } + \rightarrow \quad &= ((\alpha.f) + (\beta.f))(x) \end{aligned}$$

M_3- **Distributiva sobre a adição de vetores**: $\alpha.(f+g) = \alpha.f + \alpha.g, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall f, g \in F(\mathbb{R})$. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f, g \in F(\mathbb{R})$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} (\alpha.(f+g))(x) &\overset{\text{def de .}}{=} \alpha((f+g)(x)) \\ \text{def de } + \rightarrow \quad &= \alpha(f(x) + g(x)) \\ \text{distributiva em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow \quad &= \alpha f(x) + \alpha g(x) \\ \text{def de . } \rightarrow \quad &= (\alpha.f)(x) + (\alpha.g)(x) = ((\alpha.f) + (\alpha.g))(x) \end{aligned}$$

Exemplo: Espaço das Funções

M_2- **Distributiva sobre a adição de escalares**: $(\alpha+\beta).f = \alpha.f + \beta.f, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall f \in F(\mathbb{R})$. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $f \in F(\mathbb{R})$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$
\begin{aligned}
((\alpha+\beta).f)(x) &\overset{\text{def de .}}{=} (\alpha+\beta)f(x) \\
\text{distributiva em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow \quad &= \alpha f(x) + \beta f(x) \\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= (\alpha.f)(x) + (\beta.f)(x) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= ((\alpha.f) + (\beta.f))(x)
\end{aligned}
$$

M_3- **Distributiva sobre a adição de vetores**: $\alpha.(f+g) = \alpha.f + \alpha.g, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall f, g \in F(\mathbb{R})$. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f, g \in F(\mathbb{R})$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$
\begin{aligned}
(\alpha.(f+g))(x) &\overset{\text{def de .}}{=} \alpha((f+g)(x)) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= \alpha(f(x)+g(x)) \\
\text{distributiva em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow \quad &= \alpha f(x) + \alpha g(x) \\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= (\alpha.f)(x) + (\alpha.g)(x) = ((\alpha.f) + (\alpha.g))(x)
\end{aligned}
$$

Exemplo: Espaço das Funções

M_2- **Distributiva sobre a adição de escalares**: $(\alpha+\beta).f = \alpha.f + \beta.f, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall f \in F(\mathbb{R})$. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $f \in F(\mathbb{R})$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}
((\alpha+\beta).f)(x) &\overset{\text{def de .}}{=} (\alpha+\beta)f(x) \\
\text{distributiva em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow \quad &= \alpha f(x) + \beta f(x) \\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= (\alpha.f)(x) + (\beta.f)(x) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= ((\alpha.f) + (\beta.f))(x)
\end{aligned}$$

M_3- **Distributiva sobre a adição de vetores**: $\alpha.(f+g) = \alpha.f + \alpha.g, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall f, g \in F(\mathbb{R})$. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f, g \in F(\mathbb{R})$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}
(\alpha.(f+g))(x) &\overset{\text{def de .}}{=} \alpha((f+g)(x)) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= \alpha(f(x) + g(x)) \\
\text{distributiva em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow \quad &= \alpha f(x) + \alpha g(x) \\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= (\alpha.f)(x) + (\alpha.g)(x) = ((\alpha.f) + (\alpha.g))(x)
\end{aligned}$$

Exemplo: Espaço das Funções

M_2- **Distributiva sobre a adição de escalares**: $(\alpha+\beta).f = \alpha.f + \beta.f, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall f \in F(\mathbb{R})$. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $f \in F(\mathbb{R})$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$
\begin{aligned}
((\alpha+\beta).f)(x) &\overset{\substack{\text{def de .}\\ \downarrow}}{=} (\alpha+\beta)f(x) \\
\text{distributiva em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow \quad &= \alpha f(x) + \beta f(x) \\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= (\alpha.f)(x) + (\beta.f)(x) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= ((\alpha.f) + (\beta.f))(x)
\end{aligned}
$$

M_3- **Distributiva sobre a adição de vetores**: $\alpha.(f+g) = \alpha.f + \alpha.g, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall f, g \in F(\mathbb{R})$. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f, g \in F(\mathbb{R})$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$
\begin{aligned}
(\alpha.(f+g))(x) &\overset{\substack{\text{def de .}\\ \downarrow}}{=} \alpha((f+g)(x)) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= \alpha(f(x)+g(x)) \\
\text{distributiva em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow \quad &= \alpha f(x) + \alpha g(x) \\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= (\alpha.f)(x) + (\alpha.g)(x) = ((\alpha.f) + (\alpha.g))(x)
\end{aligned}
$$

Exemplo: Espaço das Funções

M_2- **Distributiva sobre a adição de escalares**: $(\alpha+\beta).f = \alpha.f + \beta.f, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall f \in F(\mathbb{R})$. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $f \in F(\mathbb{R})$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}
((\alpha+\beta).f)(x) &\overset{\text{def de .}}{=} (\alpha+\beta)f(x) \\
\text{distributiva em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow \quad &= \alpha f(x) + \beta f(x) \\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= (\alpha.f)(x) + (\beta.f)(x) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= ((\alpha.f) + (\beta.f))(x)
\end{aligned}$$

M_3- **Distributiva sobre a adição de vetores**: $\alpha.(f+g) = \alpha.f + \alpha.g, \;\; \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall f, g \in F(\mathbb{R})$. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f, g \in F(\mathbb{R})$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}
(\alpha.(f+g))(x) &\overset{\text{def de .}}{=} \alpha((f+g)(x)) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= \alpha(f(x) + g(x)) \\
\text{distributiva em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow \quad &= \alpha f(x) + \alpha g(x) \\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= (\alpha.f)(x) + (\alpha.g)(x) = ((\alpha.f) + (\alpha.g))(x)
\end{aligned}$$

Exemplo: Espaço das Funções

M_2- **Distributiva sobre a adição de escalares**: $(\alpha+\beta).f = \alpha.f + \beta.f, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall f \in F(\mathbb{R})$. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $f \in F(\mathbb{R})$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}
((\alpha+\beta).f)(x) &\overset{\text{def de .}}{=} (\alpha+\beta)f(x) \\
\text{distributiva em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow \quad &= \alpha f(x) + \beta f(x) \\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= (\alpha.f)(x) + (\beta.f)(x) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= ((\alpha.f) + (\beta.f))(x)
\end{aligned}$$

M_3- **Distributiva sobre a adição de vetores**: $\alpha.(f+g) = \alpha.f + \alpha.g, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall f, g \in F(\mathbb{R})$. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f, g \in F(\mathbb{R})$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}
(\alpha.(f+g))(x) &\overset{\text{def de .}}{=} \alpha((f+g)(x)) \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= \alpha(f(x) + g(x)) \\
\text{distributiva em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow \quad &= \alpha f(x) + \alpha g(x) \\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= (\alpha.f)(x) + (\alpha.g)(x) = ((\alpha.f) + (\alpha.g))(x)
\end{aligned}$$

Exemplo: Espaço das Funções

M_2- **Distributiva sobre a adição de escalares**: $(\alpha+\beta).f=\alpha.f+\beta.f, \quad \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ e $\forall f\in F(\mathbb{R})$. Sejam $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ e $f\in F(\mathbb{R})$. Para todo $x\in\mathbb{R}$ temos

$$
\begin{aligned}
((\alpha+\beta).f)(x) &\overset{\substack{\text{def de .}\\ \downarrow}}{=} (\alpha+\beta)f(x)\\
\text{distributiva em } (\mathbb{R},.) \rightarrow \quad &= \alpha f(x)+\beta f(x)\\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= (\alpha.f)(x)+(\beta.f)(x)\\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= ((\alpha.f)+(\beta.f))(x)
\end{aligned}
$$

M_3- **Distributiva sobre a adição de vetores**: $\alpha.(f+g)=\alpha.f+\alpha.g, \ \forall\alpha\in\mathbb{R}$ e $\forall f,g\in F(\mathbb{R})$. Sejam $\alpha\in\mathbb{R}$ e $f,g\in F(\mathbb{R})$. Para todo $x\in\mathbb{R}$ temos

$$
\begin{aligned}
(\alpha.(f+g))(x) &\overset{\substack{\text{def de .}\\ \downarrow}}{=} \alpha((f+g)(x))\\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= \alpha(f(x)+g(x))\\
\text{distributiva em } (\mathbb{R},.) \rightarrow \quad &= \alpha f(x)+\alpha g(x)\\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= (\alpha.f)(x)+(\alpha.g)(x)=((\alpha.f)+(\alpha.g))(x)
\end{aligned}
$$

Exemplo: Espaço das Funções

M_2- **Distributiva sobre a adição de escalares**: $(\alpha+\beta).f = \alpha.f + \beta.f, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall f \in F(\mathbb{R})$. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $f \in F(\mathbb{R})$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} ((\alpha+\beta).f)(x) &\overset{\text{def de .}}{\overset{\downarrow}{=}} (\alpha+\beta)f(x) \\ \text{distributiva em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow \quad &= \alpha f(x) + \beta f(x) \\ \text{def de . } \rightarrow \quad &= (\alpha.f)(x) + (\beta.f)(x) \\ \text{def de } + \rightarrow \quad &= ((\alpha.f) + (\beta.f))(x) \end{aligned}$$

M_3- **Distributiva sobre a adição de vetores**: $\alpha.(f+g) = \alpha.f + \alpha.g, \; \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall f, g \in F(\mathbb{R})$. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f, g \in F(\mathbb{R})$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} (\alpha.(f+g))(x) &\overset{\text{def de .}}{\overset{\downarrow}{=}} \alpha((f+g)(x)) \\ \text{def de } + \rightarrow \quad &= \alpha(f(x) + g(x)) \\ \text{distributiva em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow \quad &= \alpha f(x) + \alpha g(x) \\ \text{def de . } \rightarrow \quad &= (\alpha.f)(x) + (\alpha.g)(x) = ((\alpha.f) + (\alpha.g))(x) \end{aligned}$$

Exemplo: Espaço das Funções

M_2- **Distributiva sobre a adição de escalares**: $(\alpha+\beta).f = \alpha.f + \beta.f, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall f \in F(\mathbb{R})$. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $f \in F(\mathbb{R})$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$
\begin{aligned}
((\alpha+\beta).f)(x) &\overset{\substack{\text{def de .}\\ \downarrow}}{=} (\alpha+\beta)f(x)\\
\text{distributiva em } (\mathbb{R},.) \rightarrow \quad &= \alpha f(x) + \beta f(x)\\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= (\alpha.f)(x) + (\beta.f)(x)\\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= ((\alpha.f) + (\beta.f))(x)
\end{aligned}
$$

M_3- **Distributiva sobre a adição de vetores**: $\alpha.(f+g) = \alpha.f + \alpha.g, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall f, g \in F(\mathbb{R})$. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f, g \in F(\mathbb{R})$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$
\begin{aligned}
(\alpha.(f+g))(x) &\overset{\substack{\text{def de .}\\ \downarrow}}{=} \alpha((f+g)(x))\\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= \alpha(f(x) + g(x))\\
\text{distributiva em } (\mathbb{R},.) \rightarrow \quad &= \alpha f(x) + \alpha g(x)\\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= (\alpha.f)(x) + (\alpha.g)(x) = ((\alpha.f) + (\alpha.g))(x)
\end{aligned}
$$

Exemplo: Espaço das Funções

$M_4 -$ **Identidade**: $1.f = f, \ \forall f \in F(\mathbb{R})$. Seja $f \in F(\mathbb{R})$.

$$(1.f)(x) \overset{\text{def de .}}{=} 1.f(x)$$

$$\text{1 é identidade em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow \quad = f(x).$$

- $(F(\mathbb{R}), +, .)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Obs 1: As operações $+$ e . em $F(\mathbb{R})$ definidas neste exemplo são chamadas operações usuais em $F(\mathbb{R})$.

Obs 2: Quando as operações $+$ e . de um espaço vetorial $(V, +, .)$ estão claras do contexto, dizemos apenas que V é um espaço vetorial.

Obs 3: A não ser que mencionemos o contrário, as operações consideradas em um conjunto serão as suas operações usuais.

Exemplo: Espaço das Funções

M_4- **Identidade**: $1.f = f, \ \forall f \in F(\mathbb{R})$. Seja $f \in F(\mathbb{R})$.

$$
\begin{aligned}
(1.f)(x) &\overset{\text{def de .}}{=} 1.f(x) \\
\text{1 é identidade em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow \quad &= f(x).
\end{aligned}
$$

- $(F(\mathbb{R}), +, .)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Obs 1: As operações $+$ e $.$ em $F(\mathbb{R})$ definidas neste exemplo são chamadas operações usuais em $F(\mathbb{R})$.

Obs 2: Quando as operações $+$ e $.$ de um espaço vetorial $(V, +, .)$ estão claras do contexto, dizemos apenas que V é um espaço vetorial.

Obs 3: A não ser que mencionemos o contrário, as operações consideradas em um conjunto serão as suas operações usuais.

Exemplo: Espaço das Funções

M_4- **Identidade**: $1.f = f, \;\; \forall f \in F(\mathbb{R})$. Seja $f \in F(\mathbb{R})$.

$$(1.f)(x) \overset{\text{def de .}}{\overset{\downarrow}{=}} 1.f(x)$$

$$\text{1 é identidade em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow \quad = f(x).$$

- $(F(\mathbb{R}), +, .)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Obs 1: As operações $+$ e . em $F(\mathbb{R})$ definidas neste exemplo são chamadas operações usuais em $F(\mathbb{R})$.

Obs 2: Quando as operações $+$ e . de um espaço vetorial $(V, +, .)$ estão claras do contexto, dizemos apenas que V é um espaço vetorial.

Obs 3: A não ser que mencionemos o contrário, as operações consideradas em um conjunto serão as suas operações usuais.

Exemplo: Espaço das Funções

M_4- **Identidade**: $1.f = f, \ \forall f \in F(\mathbb{R})$. Seja $f \in F(\mathbb{R})$.

$$(1.f)(x) \overset{\text{def de .}}{\overset{\downarrow}{=}} 1.f(x)$$

$$\text{1 é identidade em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow \quad = f(x).$$

- $(F(\mathbb{R}), +, .)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Obs 1: As operações $+$ e . em $F(\mathbb{R})$ definidas neste exemplo são chamadas operações usuais em $F(\mathbb{R})$.

Obs 2: Quando as operações $+$ e . de um espaço vetorial $(V, +, .)$ estão claras do contexto, dizemos apenas que V é um espaço vetorial.

Obs 3: A não ser que mencionemos o contrário, as operações consideradas em um conjunto serão as suas operações usuais.

Exemplo: Espaço das Funções

M_4- **Identidade**: $1.f = f, \ \ \forall f \in F(\mathbb{R})$. Seja $f \in F(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} (1.f)(x) &\overset{\substack{\text{def de .}\\ \downarrow}}{=} 1.f(x) \\ \text{1 é identidade em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow \quad &= f(x). \end{aligned}$$

- $(F(\mathbb{R}), +, .)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Obs 1: As operações $+$ e . em $F(\mathbb{R})$ definidas neste exemplo são chamadas operações usuais em $F(\mathbb{R})$.

Obs 2: Quando as operações $+$ e . de um espaço vetorial $(V, +, .)$ estão claras do contexto, dizemos apenas que V é um espaço vetorial.

Obs 3: A não ser que mencionemos o contrário, as operações consideradas em um conjunto serão as suas operações usuais.

Exemplo: Espaço das Funções

M_4- **Identidade**: $1.f = f, \ \ \forall f \in F(\mathbb{R})$. Seja $f \in F(\mathbb{R})$.

$$
\begin{aligned}
(1.f)(x) &\overset{\text{def de .}}{\overset{\downarrow}{=}} 1.f(x) \\
\text{1 é identidade em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow \quad &= f(x).
\end{aligned}
$$

- $(F(\mathbb{R}), +, .)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Obs 1: As operações $+$ e . em $F(\mathbb{R})$ definidas neste exemplo são chamadas operações usuais em $F(\mathbb{R})$.

Obs 2: Quando as operações $+$ e . de um espaço vetorial $(V, +, .)$ estão claras do contexto, dizemos apenas que V é um espaço vetorial.

Obs 3: A não ser que mencionemos o contrário, as operações consideradas em um conjunto serão as suas operações usuais.

Exemplo: Espaço das Funções

M_4- **Identidade**: $1.f = f, \ \forall f \in F(\mathbb{R})$. Seja $f \in F(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} (1.f)(x) &\overset{\substack{\text{def de .} \\ \downarrow}}{=} 1.f(x) \\ \text{1 é identidade em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow \quad &= f(x). \end{aligned}$$

- $(F(\mathbb{R}), +, .)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Obs 1: As operações $+$ e . em $F(\mathbb{R})$ definidas neste exemplo são chamadas operações usuais em $F(\mathbb{R})$.

Obs 2: Quando as operações $+$ e . de um espaço vetorial $(V, +, .)$ estão claras do contexto, dizemos apenas que V é um espaço vetorial.

Obs 3: A não ser que mencionemos o contrário, as operações consideradas em um conjunto serão as suas operações usuais.

Exemplo: Espaço das Funções

M_4- **Identidade**: $1.f = f, \ \forall f \in F(\mathbb{R})$. Seja $f \in F(\mathbb{R})$.

$$(1.f)(x) \overset{\substack{\text{def de .} \\ \downarrow}}{=} 1.f(x)$$

$$\text{1 é identidade em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow \quad = f(x).$$

- $(F(\mathbb{R}), +, .)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Obs 1: As operações $+$ e . em $F(\mathbb{R})$ definidas neste exemplo são chamadas operações usuais em $F(\mathbb{R})$.

Obs 2: Quando as operações $+$ e . de um espaço vetorial $(V, +, .)$ estão claras do contexto, dizemos apenas que V é um espaço vetorial.

Obs 3: A não ser que mencionemos o contrário, as operações consideradas em um conjunto serão as suas operações usuais.

Propriedades

Seja $(V, +, .)$ um espaço vetorial real.

1. Dados $u, v, w \in V$, se $u + w = v + w$ então $u = v$.

   Prova:

$$
\begin{aligned}
u + w = v + w \quad & \overset{A4}{\Leftrightarrow} (u + w) + (-w) = (v + w) + (-w) \\
& \overset{A1}{\Leftrightarrow} u + (w + (-w)) = v + (w + (-w)) \\
& \overset{A4}{\Leftrightarrow} u + 0 = v + 0 \\
& \overset{A3}{\Leftrightarrow} u = v.
\end{aligned}
$$

$\square$

Obs 1: Se $u + w = w$, então $u = 0$, ou seja, 0 é único.

Obs 2: O vetor oposto de qualquer vetor de V é único.

Propriedades

Seja $(V, +, .)$ um espaço vetorial real.

1. Dados $u, v, w \in V$, se $u + w = v + w$ então $u = v$.

   Prova:

$$
\begin{aligned}
u + w = v + w \quad & \overset{A4}{\Leftrightarrow} (u + w) + (-w) = (v + w) + (-w) \\
& \overset{A1}{\Leftrightarrow} u + (w + (-w)) = v + (w + (-w)) \\
& \overset{A4}{\Leftrightarrow} u + 0 = v + 0 \\
& \overset{A3}{\Leftrightarrow} u = v.
\end{aligned}
$$

$\square$

Obs 1: Se $u + w = w$, então $u = 0$, ou seja, 0 é único.

Obs 2: O vetor oposto de qualquer vetor de V é único.

Propriedades

Seja $(V, +, .)$ um espaço vetorial real.

1. Dados $u, v, w \in V$, se $u + w = v + w$ então $u = v$.

   Prova:

$$
\begin{aligned}
u + w = v + w \quad & \overset{A4}{\Leftrightarrow} (u + w) + (-w) = (v + w) + (-w) \\
& \overset{A1}{\Leftrightarrow} u + (w + (-w)) = v + (w + (-w)) \\
& \overset{A4}{\Leftrightarrow} u + 0 = v + 0 \\
& \overset{A3}{\Leftrightarrow} u = v.
\end{aligned}
$$

$\square$

Obs 1: Se $u + w = w$, então $u = 0$, ou seja, 0 é único.

Obs 2: O vetor oposto de qualquer vetor de V é único.

Propriedades

Seja $(V, +, .)$ um espaço vetorial real.

1. Dados $u, v, w \in V$, se $u + w = v + w$ então $u = v$.

   Prova:

$$
\begin{aligned}
u + w = v + w \quad & \overset{A4}{\Leftrightarrow} (u + w) + (-w) = (v + w) + (-w) \\
& \overset{A1}{\Leftrightarrow} u + (w + (-w)) = v + (w + (-w)) \\
& \overset{A4}{\Leftrightarrow} u + 0 = v + 0 \\
& \overset{A3}{\Leftrightarrow} u = v.
\end{aligned}
$$

$\square$

Obs 1: Se $u + w = w$, então $u = 0$, ou seja, 0 é único.

Obs 2: O vetor oposto de qualquer vetor de V é único.

Propriedades

Seja $(V, +, .)$ um espaço vetorial real.

1. Dados $u, v, w \in V$, se $u + w = v + w$ então $u = v$.

   Prova:

$$
\begin{aligned}
u + w = v + w \quad & \overset{A4}{\Leftrightarrow} (u + w) + (-w) = (v + w) + (-w) \\
& \overset{A1}{\Leftrightarrow} u + (w + (-w)) = v + (w + (-w)) \\
& \overset{A4}{\Leftrightarrow} u + 0 = v + 0 \\
& \overset{A3}{\Leftrightarrow} u = v.
\end{aligned}
$$

$\square$

Obs 1: Se $u + w = w$, então $u = 0$, ou seja, 0 é único.

Obs 2: O vetor oposto de qualquer vetor de V é único.

Propriedades

Seja $(V, +, .)$ um espaço vetorial real.

1. Dados $u, v, w \in V$, se $u + w = v + w$ então $u = v$.

   Prova:

$$
\begin{aligned}
u + w = v + w \quad & \overset{A4}{\Leftrightarrow} (u + w) + (-w) = (v + w) + (-w) \\
& \overset{A1}{\Leftrightarrow} u + (w + (-w)) = v + (w + (-w)) \\
& \overset{A4}{\Leftrightarrow} u + 0 = v + 0 \\
& \overset{A3}{\Leftrightarrow} u = v.
\end{aligned}
$$

$\square$

Obs 1: Se $u + w = w$, então $u = 0$, ou seja, 0 é único.

Obs 2: O vetor oposto de qualquer vetor de V é único.

Propriedades

Seja $(V, +, .)$ um espaço vetorial real.

1. Dados $u, v, w \in V$, se $u + w = v + w$ então $u = v$.

   Prova:

$$
\begin{aligned}
u + w = v + w \quad & \overset{\text{A4}}{\Leftrightarrow} (u + w) + (-w) = (v + w) + (-w) \\
& \overset{\text{A1}}{\Leftrightarrow} u + (w + (-w)) = v + (w + (-w)) \\
& \overset{\text{A4}}{\Leftrightarrow} u + 0 = v + 0 \\
& \overset{\text{A3}}{\Leftrightarrow} u = v.
\end{aligned}
$$

$\square$

Obs 1: Se $u + w = w$, então $u = 0$, ou seja, 0 é único.

Obs 2: O vetor oposto de qualquer vetor de V é único.

Propriedades

Seja $(V, +, .)$ um espaço vetorial real.

1. Dados $u, v, w \in V$, se $u + w = v + w$ então $u = v$.

   Prova:

$$
\begin{aligned}
u + w = v + w \quad & \overset{\overset{\text{A4}}{\downarrow}}{\Leftrightarrow} (u + w) + (-w) = (v + w) + (-w) \\
& \overset{\overset{\text{A1}}{\downarrow}}{\Leftrightarrow} u + (w + (-w)) = v + (w + (-w)) \\
& \overset{\overset{\text{A4}}{\downarrow}}{\Leftrightarrow} u + 0 = v + 0 \\
& \overset{\overset{\text{A3}}{\downarrow}}{\Leftrightarrow} u = v.
\end{aligned}
$$

$\square$

Obs 1: Se $u + w = w$, então $u = 0$, ou seja, 0 é único.

Obs 2: O vetor oposto de qualquer vetor de V é único.

Propriedades

Seja $(V, +, .)$ um espaço vetorial real.

1. Dados $u, v, w \in V$, se $u + w = v + w$ então $u = v$.

   Prova:

$$
\begin{aligned}
u + w = v + w \quad & \overset{\overset{\text{A4}}{\downarrow}}{\Leftrightarrow} (u + w) + (-w) = (v + w) + (-w) \\
& \overset{\overset{\text{A1}}{\downarrow}}{\Leftrightarrow} u + (w + (-w)) = v + (w + (-w)) \\
& \overset{\overset{\text{A4}}{\downarrow}}{\Leftrightarrow} u + 0 = v + 0 \\
& \overset{\overset{\text{A3}}{\downarrow}}{\Leftrightarrow} u = v.
\end{aligned}
$$

$\square$

Obs 1: Se $u + w = w$, então $u = 0$, ou seja, 0 é único.

Obs 2: O vetor oposto de qualquer vetor de V é único.

Propriedades

2. Dados $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \in V$, $\alpha.0 = 0$.

   Prova:

   $$\alpha.0 \overset{\overset{A3}{\downarrow}}{=} \alpha.(0+0) \overset{\overset{M3}{\downarrow}}{=} \alpha.0 + \alpha.0$$

   $$\alpha.0 = \alpha.0 + \alpha.0$$

   Segue da Propriedade (1) que $\alpha.0 = 0$.

   $\square$

3. Dados $0 \in \mathbb{R}$, $u \in V$, $0.u = 0$.

   Prova: Exercício.

Propriedades

2. Dados $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \in V$, $\alpha.0 = 0$.

   Prova:

   $$\alpha.0 \overset{A3}{=} \alpha.(0+0) \overset{M3}{=} \alpha.0 + \alpha.0$$

   $$\alpha.0 = \alpha.0 + \alpha.0$$

   Segue da Propriedade (1) que $\alpha.0 = 0$. $\square$

3. Dados $0 \in \mathbb{R}$, $u \in V$, $0.u = 0$.

   Prova: Exercício.

Propriedades

2. Dados $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \in V$, $\alpha.0 = 0$.

   Prova:

   $$\alpha.0 \overset{\overset{\text{A3}}{\downarrow}}{=} \alpha.(0+0) \overset{\overset{\text{M3}}{\downarrow}}{=} \alpha.0 + \alpha.0$$

   $$\alpha.0 = \alpha.0 + \alpha.0$$

   Segue da Propriedade (1) que $\alpha.0 = 0$.

   $\square$

3. Dados $0 \in \mathbb{R}$, $u \in V$, $0.u = 0$.

   Prova: Exercício.

Propriedades

2. Dados $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \in V$, $\alpha.0 = 0$.

   Prova:

   $$\alpha.0 \overset{\overset{A3}{\downarrow}}{=} \alpha.(0+0) \overset{\overset{M3}{\downarrow}}{=} \alpha.0 + \alpha.0$$

   $$\alpha.0 = \alpha.0 + \alpha.0$$

   Segue da Propriedade (1) que $\alpha.0 = 0$.

   $\square$

3. Dados $0 \in \mathbb{R}$, $u \in V$, $0.u = 0$.

   Prova: Exercício.

Propriedades

2. Dados $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \in V$, $\alpha.0 = 0$.

   Prova:

   $$\alpha.0 \overset{\substack{\text{A3}\\ \downarrow}}{=} \alpha.(0+0) \overset{\substack{\text{M3}\\ \downarrow}}{=} \alpha.0 + \alpha.0$$

   $$\alpha.0 = \alpha.0 + \alpha.0$$

   Segue da Propriedade (1) que $\alpha.0 = 0$.

   $\square$

3. Dados $0 \in \mathbb{R}$, $u \in V$, $0.u = 0$.

   Prova: Exercício.

Propriedades

2. Dados $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \in V$, $\alpha.0 = 0$.

   Prova:

   $$\alpha.0 \overset{\substack{A3\\ \downarrow}}{=} \alpha.(0+0) \overset{\substack{M3\\ \downarrow}}{=} \alpha.0 + \alpha.0$$

   $$\alpha.0 = \alpha.0 + \alpha.0$$

   Segue da Propriedade (1) que $\alpha.0 = 0$.

   $\square$

3. Dados $0 \in \mathbb{R}$, $u \in V$, $0.u = 0$.

   Prova: Exercício.

Propriedades

2. Dados $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \in V$, $\alpha.0 = 0$.

   Prova:

   $$\begin{aligned} \alpha.0 &\overset{\substack{\text{A3}\\ \downarrow}}{=} \alpha.(0+0) \overset{\substack{\text{M3}\\ \downarrow}}{=} \alpha.0 + \alpha.0 \\ \alpha.0 &= \alpha.0 + \alpha.0 \end{aligned}$$

   Segue da Propriedade (1) que $\alpha.0 = 0$.

   $\square$

3. Dados $0 \in \mathbb{R}$, $u \in V$, $0.u = 0$.

   Prova: Exercício.

Propriedades

4. Dados $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in V$, $(-\alpha).u = \alpha.(-u) = -(\alpha.u)$. $\leftarrow$ vetor oposto de $\alpha.u$

Prova:

$$(-\alpha).u + (\alpha.u) \overset{\text{M2}}{=} (-\alpha + \alpha).u \overset{\text{Prop 2}}{=} 0$$

Como o vetor oposto é único, $(-\alpha).u = -(\alpha.u)$.

Analogamente $\alpha.(-u) = -(\alpha.u)$. ☐

Obs: $-1.u = -u$

5. Dados $u, v \in V$, existe um único $w \in V$ tal que $u + w = v$.

Prova:

Para mostrar a existência, tome $w = -u + v$. Então

$$u + w = u + (-u + v) \overset{\text{A1}}{=} (u + (-u)) + v \overset{\text{A4}}{=} 0 + v \overset{\text{A3}}{=} v.$$

A unicidade segue da Propriedade (1). ☐

Propriedades

4. Dados $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in V$, $(-\alpha).u = \alpha.(-u) = -(\alpha.u)$. $\leftarrow$ vetor oposto de $\alpha.u$

Prova:

$$(-\alpha).u + (\alpha.u) \overset{\text{M2}}{=} (-\alpha + \alpha).u \overset{\text{Prop 2}}{=} 0$$

Como o vetor oposto é único, $(-\alpha).u = -(\alpha.u)$.

Analogamente $\alpha.(-u) = -(\alpha.u)$. $\square$

Obs: $-1.u = -u$

5. Dados $u, v \in V$, existe um único $w \in V$ tal que $u + w = v$.

Prova:

Para mostrar a existência, tome $w = -u + v$. Então

$$u + w = u + (-u + v) \overset{\text{A1}}{=} (u + (-u)) + v \overset{\text{A4}}{=} 0 + v \overset{\text{A3}}{=} v.$$

A unicidade segue da Propriedade (1). $\square$

Propriedades

4. Dados $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in V$, $(-\alpha).u = \alpha.(-u) = -(\alpha.u)$. $\leftarrow$ vetor oposto de $\alpha.u$

Prova:

$$(-\alpha).u + (\alpha.u) \overset{\substack{\text{M2}\\ \downarrow}}{=} (-\alpha + \alpha).u \overset{\substack{\text{Prop 2}\\ \downarrow}}{=} 0$$

Como o vetor oposto é único, $(-\alpha).u = -(\alpha.u)$.

Analogamente $\alpha.(-u) = -(\alpha.u)$. $\square$

Obs: $-1.u = -u$

5. Dados $u, v \in V$, existe um único $w \in V$ tal que $u + w = v$.

Prova:

Para mostrar a existência, tome $w = -u + v$. Então

$$u + w = u + (-u + v) \overset{\substack{\text{A1}\\ \downarrow}}{=} (u + (-u)) + v \overset{\substack{\text{A4}\\ \downarrow}}{=} 0 + v \overset{\substack{\text{A3}\\ \downarrow}}{=} v.$$

A unicidade segue da Propriedade (1). $\square$

Propriedades

4. Dados $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in V$, $(-\alpha).u = \alpha.(-u) = -(\alpha.u)$. $\leftarrow$ vetor oposto de $\alpha.u$

   Prova:

   $$(-\alpha).u + (\alpha.u) \overset{\text{M2}}{\overset{\downarrow}{=}} (-\alpha + \alpha).u \overset{\text{Prop 2}}{\overset{\downarrow}{=}} 0$$

   Como o vetor oposto é único, $(-\alpha).u = -(\alpha.u)$.

   Analogamente $\alpha.(-u) = -(\alpha.u)$. $\square$

   Obs: $-1.u = -u$

5. Dados $u, v \in V$, existe um único $w \in V$ tal que $u + w = v$.

   Prova:

   Para mostrar a existência, tome $w = -u + v$. Então

   $$u + w = u + (-u + v) \overset{\text{A1}}{\overset{\downarrow}{=}} (u + (-u)) + v \overset{\text{A4}}{\overset{\downarrow}{=}} 0 + v \overset{\text{A3}}{\overset{\downarrow}{=}} v.$$

   A unicidade segue da Propriedade (1). $\square$

Propriedades

4. Dados $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in V$, $(-\alpha).u = \alpha.(-u) = -(\alpha.u)$. $\leftarrow$ vetor oposto de $\alpha.u$

Prova:

$$(-\alpha).u + (\alpha.u) \overset{\text{M2}}{=} (-\alpha + \alpha).u \overset{\text{Prop 2}}{=} 0$$

Como o vetor oposto é único, $(-\alpha).u = -(\alpha.u)$.

Analogamente $\alpha.(-u) = -(\alpha.u)$. $\square$

Obs: $-1.u = -u$

5. Dados $u, v \in V$, existe um único $w \in V$ tal que $u + w = v$.

Prova:

Para mostrar a existência, tome $w = -u + v$. Então

$$u + w = u + (-u + v) \overset{\text{A1}}{=} (u + (-u)) + v \overset{\text{A4}}{=} 0 + v \overset{\text{A3}}{=} v.$$

A unicidade segue da Propriedade (1). $\square$

Propriedades

4. Dados $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in V$, $(-\alpha).u = \alpha.(-u) = -(\alpha.u)$. $\leftarrow$ vetor oposto de $\alpha.u$

Prova:

$$(-\alpha).u + (\alpha.u) \stackrel{\text{M2}}{=} (-\alpha + \alpha).u \stackrel{\text{Prop 2}}{=} 0$$

Como o vetor oposto é único, $(-\alpha).u = -(\alpha.u)$.

Analogamente $\alpha.(-u) = -(\alpha.u)$. $\square$

Obs: $-1.u = -u$

5. Dados $u, v \in V$, existe um único $w \in V$ tal que $u + w = v$.

Prova:

Para mostrar a existência, tome $w = -u + v$. Então

$$u + w = u + (-u + v) \stackrel{\text{A1}}{=} (u + (-u)) + v \stackrel{\text{A4}}{=} 0 + v \stackrel{\text{A3}}{=} v.$$

A unicidade segue da Propriedade (1). $\square$

Propriedades

4. Dados $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in V$, $(-\alpha).u = \alpha.(-u) = -(\alpha.u)$. $\leftarrow$ vetor oposto de $\alpha.u$

Prova:

$$(-\alpha).u + (\alpha.u) \overset{\overset{\text{M2}}{\downarrow}}{=} (-\alpha + \alpha).u \overset{\overset{\text{Prop 2}}{\downarrow}}{=} 0$$

Como o vetor oposto é único, $(-\alpha).u = -(\alpha.u)$.

Analogamente $\alpha.(-u) = -(\alpha.u)$. $\square$

Obs: $-1.u = -u$

5. Dados $u, v \in V$, existe um único $w \in V$ tal que $u + w = v$.

Prova:

Para mostrar a existência, tome $w = -u + v$. Então

$$u + w = u + (-u + v) \overset{\overset{\text{A1}}{\downarrow}}{=} (u + (-u)) + v \overset{\overset{\text{A4}}{\downarrow}}{=} 0 + v \overset{\overset{\text{A3}}{\downarrow}}{=} v.$$

A unicidade segue da Propriedade (1). $\square$

Propriedades

4. Dados $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in V$, $(-\alpha).u = \alpha.(-u) = -(\alpha.u)$. $\leftarrow$ vetor oposto de $\alpha.u$

Prova:

$$(-\alpha).u + (\alpha.u) \overset{\substack{\text{M2}\\ \downarrow}}{=} (-\alpha + \alpha).u \overset{\substack{\text{Prop 2}\\ \downarrow}}{=} 0$$

Como o vetor oposto é único, $(-\alpha).u = -(\alpha.u)$.

Analogamente $\alpha.(-u) = -(\alpha.u)$. □

Obs: $-1.u = -u$

5. Dados $u, v \in V$, existe um único $w \in V$ tal que $u + w = v$.

Prova:

Para mostrar a existência, tome $w = -u + v$. Então

$$u + w = u + (-u + v) \overset{\substack{\text{A1}\\ \downarrow}}{=} (u + (-u)) + v \overset{\substack{\text{A4}\\ \downarrow}}{=} 0 + v \overset{\substack{\text{A3}\\ \downarrow}}{=} v.$$

A unicidade segue da Propriedade (1). □

Propriedades

4. Dados $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in V$, $(-\alpha).u = \alpha.(-u) = -(\alpha.u)$. ← vetor oposto de $\alpha.u$

   Prova:

   $$(-\alpha).u + (\alpha.u) \overset{\text{M2}}{=} (-\alpha + \alpha).u \overset{\text{Prop 2}}{=} 0$$

   Como o vetor oposto é único, $(-\alpha).u = -(\alpha.u)$.

   Analogamente $\alpha.(-u) = -(\alpha.u)$. $\square$

   Obs: $-1.u = -u$

5. Dados $u, v \in V$, existe um único $w \in V$ tal que $u + w = v$.

   Prova:

   Para mostrar a existência, tome $w = -u + v$. Então

   $$u + w = u + (-u + v) \overset{\text{A1}}{=} (u + (-u)) + v \overset{\text{A4}}{=} 0 + v \overset{\text{A3}}{=} v.$$

   A unicidade segue da Propriedade (1). $\square$

Propriedades

4. Dados $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in V$, $(-\alpha).u = \alpha.(-u) = -(\alpha.u)$. $\leftarrow$ vetor oposto de $\alpha.u$

   Prova:

   $$(-\alpha).u + (\alpha.u) \overset{\text{M2}}{=} (-\alpha + \alpha).u \overset{\text{Prop 2}}{=} 0$$

   Como o vetor oposto é único, $(-\alpha).u = -(\alpha.u)$.

   Analogamente $\alpha.(-u) = -(\alpha.u)$. $\square$

   Obs: $-1.u = -u$

5. Dados $u, v \in V$, existe um único $w \in V$ tal que $u + w = v$.

   Prova:

   Para mostrar a existência, tome $w = -u + v$. Então

   $$u + w = u + (-u + v) \overset{\text{A1}}{=} (u + (-u)) + v \overset{\text{A4}}{=} 0 + v \overset{\text{A3}}{=} v.$$

   A unicidade segue da Propriedade (1). $\square$