Espaços Vetoriais

Espaço das Matrizes

Álgebra Linear

Mariana Silveira - Cristian Coletti

Universidade Federal do ABC

Exemplo: Matrizes

Uma **matriz** é uma sequência dupla de elementos dispostos em linhas e colunas formando uma tabela.

Exemplo: No final do quadrimestre um professor coloca as notas dos seus alunos em uma planilha

	P_1	P_2	*Teste*
Aluno 1	$10,0$	$8,5$	$10,0$
Aluno 2	$9,5$	$9,5$	$0,0$
Aluno 3	$8,0$	$10,0$	$10,0$

Abstraindo o significado das linhas e colunas, obtemos:

$$\begin{array}{ccc} 10,0 & 8,5 & 10,0 \\ 9,5 & 9,5 & 0,0 \\ 8,0 & 10,0 & 10,0 \end{array} \leftarrow \text{matriz com 3 linhas e 3 colunas.}$$

Exemplo: Matrizes

Uma **matriz** é uma sequência dupla de elementos dispostos em linhas e colunas formando uma tabela.

Exemplo: No final do quadrimestre um professor coloca as notas dos seus alunos em uma planilha

	P_1	P_2	*Teste*
Aluno 1	$10,0$	$8,5$	$10,0$
Aluno 2	$9,5$	$9,5$	$0,0$
Aluno 3	$8,0$	$10,0$	$10,0$

Abstraindo o significado das linhas e colunas, obtemos:

$$\begin{matrix} 10,0 & 8,5 & 10,0 \\ 9,5 & 9,5 & 0,0 \\ 8,0 & 10,0 & 10,0 \end{matrix} \quad \leftarrow \text{matriz com 3 linhas e 3 colunas.}$$

Exemplo: Matrizes

Uma **matriz** é uma sequência dupla de elementos dispostos em linhas e colunas formando uma tabela.

Exemplo: No final do quadrimestre um professor coloca as notas dos seus alunos em uma planilha

	P_1	P_2	$Teste$
Aluno 1	$10,0$	$8,5$	$10,0$
Aluno 2	$9,5$	$9,5$	$0,0$
Aluno 3	$8,0$	$10,0$	$10,0$

Abstraindo o significado das linhas e colunas, obtemos:

$$\begin{array}{ccc} 10,0 & 8,5 & 10,0 \\ 9,5 & 9,5 & 0,0 \\ 8,0 & 10,0 & 10,0 \end{array} \quad \leftarrow \text{matriz com 3 linhas e 3 colunas.}$$

Exemplo: Matrizes

- Os elementos de uma matriz podem ser números, funções, outras matrizes, etc. Vamos trabalhar com matrizes cujas entradas são números reais.

Representação

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m\times n}$$

n. de colunas

n. de linhas

termo geral da matriz

- Cada $a_{ij} \in \mathbb{R}$ é um **termo da matriz.**
- O conjunto das matrizes com m linhas, n colunas e termos reais é denotado por $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Quando $m = n$, denotamos também por $M_n(\mathbb{R})$.

Obs: Podemos usar também as notações

$$(a_{ij})_{m\times n} \quad ou \quad ||a_{ij}||_{m\times n}$$

Exemplo: Matrizes

- Os elementos de uma matriz podem ser números, funções, outras matrizes, etc. Vamos trabalhar com matrizes cujas entradas são números reais.

Representação

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m\times n}$$

n. de colunas

n. de linhas

termo geral
da matriz

- Cada $a_{ij} \in \mathbb{R}$ é um **termo da matriz.**
- O conjunto das matrizes com m linhas, n colunas e termos reais é denotado por $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Quando $m = n$, denotamos também por $M_n(\mathbb{R})$.

Obs: Podemos usar também as notações

$$(a_{ij})_{m\times n} \quad ou \quad ||a_{ij}||_{m\times n}$$

Exemplo: Matrizes

- Os elementos de uma matriz podem ser números, funções, outras matrizes, etc. Vamos trabalhar com matrizes cujas entradas são números reais.

Representação

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m\times n}$$

n. de colunas

n. de linhas

termo geral da matriz

- Cada $a_{ij} \in \mathbb{R}$ é um **termo da matriz.**
- O conjunto das matrizes com m linhas, n colunas e termos reais é denotado por $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Quando $m = n$, denotamos também por $M_n(\mathbb{R})$.

Obs: Podemos usar também as notações

$$(a_{ij})_{m\times n} \quad \text{ou} \quad ||a_{ij}||_{m\times n}$$

Exemplo: Matrizes

- Os elementos de uma matriz podem ser números, funções, outras matrizes, etc. Vamos trabalhar com matrizes cujas entradas são números reais.

Representação

$$\underbrace{A_{m\times n}}_{m = \text{n. de linhas},\ n = \text{n. de colunas}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \underbrace{[a_{ij}]_{m\times n}}_{\text{termo geral da matriz}}$$

- Cada $a_{ij} \in \mathbb{R}$ é um **termo da matriz.**
- O conjunto das matrizes com m linhas, n colunas e termos reais é denotado por $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Quando $m = n$, denotamos também por $M_n(\mathbb{R})$.

Obs: Podemos usar também as notações

$$(a_{ij})_{m\times n} \quad ou \quad ||a_{ij}||_{m\times n}$$

Nomenclatura

Seja $A_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n}$.

1. Quando $m = n$ dizemos que A é uma **matriz quadrada**.

diagonal

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \leftarrow i < j$$

$i > j$

2. Seja A uma matriz quadrada.
   2.1 Se $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$, dizemos que A é uma **matriz triangular superior**.
   2.2 Se $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$, dizemos que A é uma **matriz triangular inferior**.
   2.3 Se $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$, dizemos que A é uma **matriz diagonal**.

3. A matriz quadrada Id_n tal que $a_{ij} = 0$ sempre que $i \neq j$ e $a_{ii} = 1$ para $i = 1, \ldots, n$ é chamada **matriz identidade** de ordem n.

Nomenclatura

Seja $A_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n}$.

1. Quando $m = n$ dizemos que A é uma **matriz quadrada**.

diagonal

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \leftarrow i < j$$

$$\uparrow$$
$$i > j$$

2. Seja A uma matriz quadrada.
   2.1 Se $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$, dizemos que A é uma **matriz triangular superior**.
   2.2 Se $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$, dizemos que A é uma **matriz triangular inferior**.
   2.3 Se $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$, dizemos que A é uma **matriz diagonal**.

3. A matriz quadrada Id_n tal que $a_{ij} = 0$ sempre que $i \neq j$ e $a_{ii} = 1$ para $i = 1, \ldots, n$ é chamada **matriz identidade** de ordem n.

Nomenclatura

Seja $A_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n}$.

1. Quando $m = n$ dizemos que A é uma **matriz quadrada.**

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

diagonal

$i < j$

$i > j$

2. Seja A uma matriz quadrada.
   2.1 Se $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$, dizemos que A é uma **matriz triangular superior**.
   2.2 Se $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$, dizemos que A é uma **matriz triangular inferior**.
   2.3 Se $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$, dizemos que A é uma **matriz diagonal**.
3. A matriz quadrada Id_n tal que $a_{ij} = 0$ sempre que $i \neq j$ e $a_{ii} = 1$ para $i = 1, \ldots, n$ é chamada **matriz identidade** de ordem n.

Nomenclatura

4. Seja A uma matriz quadrada.
   4.1 Se $a_{ij} = a_{ji}$ para quaisquer $i, j = 1, \ldots, n$, dizemos que A é uma **matriz simétrica**.
   4.2 Se $a_{ij} = -a_{ji}$ para para quaisquer $i, j = 1, \ldots, n$, dizemos que A é uma **matriz anti-simétrica**.

5. 5.1 Quando $m = 1$, dizemos que A é uma **matriz linha**.
   5.2 Quando $n = 1$, dizemos que A é uma **matriz coluna**.
   5.3 Quando $m = n = 1$, A se identifica com o elemento a_{11}.

6. A matriz $m \times n$ em que todos os termos são iguais a zero é chamada **matriz nula** $m \times n$. Notação: $O_{m\times n}$.

- Duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ são iguais se $a_{ij} = b_{ij}$ para quaisquer $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Nomenclatura

4. Seja A uma matriz quadrada.
   4.1 Se $a_{ij} = a_{ji}$ para quaisquer $i, j = 1, \ldots, n$, dizemos que A é uma **matriz simétrica**.
   4.2 Se $a_{ij} = -a_{ji}$ para para quaisquer $i, j = 1, \ldots, n$, dizemos que A é uma **matriz anti-simétrica**.

5. 5.1 Quando $m = 1$, dizemos que A é uma **matriz linha**.
   5.2 Quando $n = 1$, dizemos que A é uma **matriz coluna**.
   5.3 Quando $m = n = 1$, A se identifica com o elemento a_{11}.

6. A matriz $m \times n$ em que todos os termos são iguais a zero é chamada **matriz nula** $m \times n$. Notação: $O_{m \times n}$.

- Duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ são iguais se $a_{ij} = b_{ij}$ para quaisquer $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Nomenclatura

4. Seja A uma matriz quadrada.
   4.1 Se $a_{ij} = a_{ji}$ para quaisquer $i, j = 1, \dots, n$, dizemos que A é uma **matriz simétrica**.
   4.2 Se $a_{ij} = -a_{ji}$ para para quaisquer $i, j = 1, \dots, n$, dizemos que A é uma **matriz anti-simétrica**.

5. 5.1 Quando $m = 1$, dizemos que A é uma **matriz linha**.
   5.2 Quando $n = 1$, dizemos que A é uma **matriz coluna**.
   5.3 Quando $m = n = 1$, A se identifica com o elemento a_{11}.

6. A matriz $m \times n$ em que todos os termos são iguais a zero é chamada **matriz nula** $m \times n$. Notação: $O_{m\times n}$.

- Duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ são iguais se $a_{ij} = b_{ij}$ para quaisquer $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Nomenclatura

4. Seja A uma matriz quadrada.
    4.1 Se $a_{ij} = a_{ji}$ para quaisquer $i, j = 1, \ldots, n$, dizemos que A é uma **matriz simétrica**.
    4.2 Se $a_{ij} = -a_{ji}$ para para quaisquer $i, j = 1, \ldots, n$, dizemos que A é uma **matriz anti-simétrica**.

5.
    5.1 Quando $m = 1$, dizemos que A é uma **matriz linha**.
    5.2 Quando $n = 1$, dizemos que A é uma **matriz coluna**.
    5.3 Quando $m = n = 1$, A se identifica com o elemento a_{11}.

6. A matriz $m \times n$ em que todos os termos são iguais a zero é chamada **matriz nula** $m \times n$. Notação: $O_{m\times n}$.

- Duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ são iguais se $a_{ij} = b_{ij}$ para quaisquer $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Adição de matrizes

Dados $A = [a_{ij}]_{m \times n}, B = [b_{ij}]_{m \times n} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, a **matriz soma** de A com B é a matriz $m \times n$

$$A + B := [a_{ij} + b_{ij}]$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

- A adição de matrizes é uma operação binária em $M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Adição de matrizes

Dados $A = [a_{ij}]_{m \times n}, B = [b_{ij}]_{m \times n} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, a **matriz soma** de A com B é a matriz $m \times n$

$$A + B := [a_{ij} + b_{ij}]$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

- A adição de matrizes é uma operação binária em $M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Adição de Matrizes

A_1- **Associativa**: $(A+B)+C = A+(B+C), \;\; \forall A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Sejam $A=[a_{ij}]_{m\times n}, B=[b_{ij}]_{m\times n}, C=[c_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
(A+B)+C &= ([a_{ij}]+[b_{ij}])+[c_{ij}] \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= [a_{ij}+b_{ij}]+[c_{ij}] \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= [(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}] \\
\text{A1 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= [a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})] \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= [a_{ij}]+[b_{ij}+c_{ij}] \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= [a_{ij}]+([b_{ij}]+[c_{ij}]) = A+(B+C).
\end{aligned}$$

A_2- **Comutativa**: $A+B = B+A, \;\; \forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

A_3- **Elemento Neutro**: existe $O = O_{m\times n}$ tal que $A+O = O+A = A, \; \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

A_4- **Elemento Inverso**: para todo $A=[a_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ existe

$-A := [-a_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A+(-A) = -A+A = O, \;\; \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Adição de Matrizes

A_1- **Associativa**: $(A+B)+C = A+(B+C), \ \ \forall A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Sejam $A=[a_{ij}]_{m\times n}, B=[b_{ij}]_{m\times n}, C=[c_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
(A+B)+C &= ([a_{ij}]+[b_{ij}])+[c_{ij}] \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= [a_{ij}+b_{ij}]+[c_{ij}] \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= [(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}] \\
\text{A1 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= [a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})] \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= [a_{ij}]+[b_{ij}+c_{ij}] \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= [a_{ij}]+([b_{ij}]+[c_{ij}]) = A+(B+C).
\end{aligned}$$

A_2- **Comutativa**: $A+B = B+A, \ \ \forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

A_3- **Elemento Neutro**: existe $O = O_{m\times n}$ tal que $A+O = O+A = A, \ \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

A_4- **Elemento Inverso**: para todo $A=[a_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ existe

$-A := [-a_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A+(-A) = -A+A = O, \ \ \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Adição de Matrizes

A_1- **Associativa**: $(A+B)+C = A+(B+C), \;\; \forall A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Sejam $A = [a_{ij}]_{m\times n}, B = [b_{ij}]_{m\times n}, C = [c_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$$
\begin{aligned}
(A+B)+C &= ([a_{ij}]+[b_{ij}])+[c_{ij}] \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= [a_{ij}+b_{ij}]+[c_{ij}] \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= [(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}] \\
\text{A1 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= [a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})] \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= [a_{ij}]+[b_{ij}+c_{ij}] \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= [a_{ij}]+([b_{ij}]+[c_{ij}]) = A+(B+C).
\end{aligned}
$$

A_2- **Comutativa**: $A+B = B+A, \;\; \forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

A_3- **Elemento Neutro**: existe $O = O_{m\times n}$ tal que $A+O = O+A = A, \; \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

A_4- **Elemento Inverso**: para todo $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ existe

$-A := [-a_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A+(-A) = -A+A = O, \;\; \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Adição de Matrizes

A_1- **Associativa**: $(A+B)+C = A+(B+C), \ \forall A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Sejam $A=[a_{ij}]_{m\times n}, B=[b_{ij}]_{m\times n}, C=[c_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
(A+B)+C &= ([a_{ij}]+[b_{ij}])+[c_{ij}] \\
\text{def de } + \rightarrow &= [a_{ij}+b_{ij}]+[c_{ij}] \\
\text{def de } + \rightarrow &= [(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}] \\
\text{A1 em } \mathbb{R} \rightarrow &= [a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})] \\
\text{def de } + \rightarrow &= [a_{ij}]+[b_{ij}+c_{ij}] \\
\text{def de } + \rightarrow &= [a_{ij}]+([b_{ij}]+[c_{ij}]) = A+(B+C).
\end{aligned}$$

A_2- **Comutativa**: $A+B=B+A, \ \forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

A_3- **Elemento Neutro**: existe $O = O_{m\times n}$ tal que $A+O = O+A = A, \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

A_4- **Elemento Inverso**: para todo $A=[a_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ existe

$-A := [-a_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A+(-A) = -A+A = O, \ \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Adição de Matrizes

A_1- **Associativa**: $(A+B)+C = A+(B+C), \ \ \forall A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Sejam $A=[a_{ij}]_{m\times n}, B=[b_{ij}]_{m\times n}, C=[c_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
(A+B)+C &= ([a_{ij}]+[b_{ij}])+[c_{ij}] \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= [a_{ij}+b_{ij}]+[c_{ij}] \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= [(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}] \\
\text{A1 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= [a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})] \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= [a_{ij}]+[b_{ij}+c_{ij}] \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= [a_{ij}]+([b_{ij}]+[c_{ij}]) = A+(B+C).
\end{aligned}$$

A_2- **Comutativa**: $A+B=B+A, \ \ \forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

A_3- **Elemento Neutro**: existe $O=O_{m\times n}$ tal que $A+O=O+A=A, \ \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

A_4- **Elemento Inverso**: para todo $A=[a_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ existe

$-A := [-a_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A+(-A) = -A+A = O, \ \ \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Adição de Matrizes

$A_1 -$ **Associativa**: $(A+B)+C = A+(B+C), \ \ \forall A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Sejam $A = [a_{ij}]_{m\times n}, B = [b_{ij}]_{m\times n}, C = [c_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
(A+B)+C &= ([a_{ij}]+[b_{ij}])+[c_{ij}] \\
\text{def de } + \rightarrow &= [a_{ij}+b_{ij}]+[c_{ij}] \\
\text{def de } + \rightarrow &= [(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}] \\
\text{A1 em } \mathbb{R} \rightarrow &= [a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})] \\
\text{def de } + \rightarrow &= [a_{ij}]+[b_{ij}+c_{ij}] \\
\text{def de } + \rightarrow &= [a_{ij}]+([b_{ij}]+[c_{ij}]) = A+(B+C).
\end{aligned}$$

$A_2 -$ **Comutativa**: $A+B = B+A, \ \ \forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$A_3 -$ **Elemento Neutro**: existe $O = O_{m\times n}$ tal que $A+O = O+A = A, \ \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$A_4 -$ **Elemento Inverso**: para todo $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ existe

$-A := [-a_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A+(-A) = -A+A = O, \ \ \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Adição de Matrizes

$A_1 -$ **Associativa**: $(A+B)+C = A+(B+C), \ \ \forall A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Sejam $A = [a_{ij}]_{m\times n}, B = [b_{ij}]_{m\times n}, C = [c_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$$
\begin{aligned}
(A+B)+C &= ([a_{ij}]+[b_{ij}])+[c_{ij}] \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= [a_{ij}+b_{ij}]+[c_{ij}] \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= [(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}] \\
\text{A1 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= [a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})] \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= [a_{ij}]+[b_{ij}+c_{ij}] \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= [a_{ij}]+([b_{ij}]+[c_{ij}]) = A+(B+C).
\end{aligned}
$$

$A_2 -$ **Comutativa**: $A+B = B+A, \ \ \forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$A_3 -$ **Elemento Neutro**: existe $O = O_{m\times n}$ tal que $A+O = O+A = A, \ \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$A_4 -$ **Elemento Inverso**: para todo $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ existe

$-A := [-a_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A+(-A) = -A+A = O, \ \ \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Adição de Matrizes

A_1- **Associativa**: $(A+B)+C = A+(B+C), \ \forall A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Sejam $A = [a_{ij}]_{m\times n}, B = [b_{ij}]_{m\times n}, C = [c_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
(A+B)+C &= ([a_{ij}]+[b_{ij}])+[c_{ij}] \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= [a_{ij}+b_{ij}]+[c_{ij}] \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= [(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}] \\
\text{A1 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= [a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})] \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= [a_{ij}]+[b_{ij}+c_{ij}] \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= [a_{ij}]+([b_{ij}]+[c_{ij}]) = A+(B+C).
\end{aligned}$$

A_2- **Comutativa**: $A+B = B+A, \ \forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

A_3- **Elemento Neutro**: existe $O = O_{m\times n}$ tal que $A+O = O+A = A, \ \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

A_4- **Elemento Inverso**: para todo $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ existe

$-A := [-a_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A+(-A) = -A+A = O, \ \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Adição de Matrizes

A_1- **Associativa**: $(A+B)+C = A+(B+C), \;\; \forall A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Sejam $A=[a_{ij}]_{m\times n}, B=[b_{ij}]_{m\times n}, C=[c_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$$
\begin{aligned}
(A+B)+C &= ([a_{ij}]+[b_{ij}])+[c_{ij}] \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= [a_{ij}+b_{ij}]+[c_{ij}] \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= [(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}] \\
\text{A1 em } \mathbb{R} \rightarrow \quad &= [a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})] \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= [a_{ij}]+[b_{ij}+c_{ij}] \\
\text{def de } + \rightarrow \quad &= [a_{ij}]+([b_{ij}]+[c_{ij}]) = A+(B+C).
\end{aligned}
$$

A_2- **Comutativa**: $A+B = B+A, \;\; \forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

A_3- **Elemento Neutro**: existe $O = O_{m\times n}$ tal que $A+O = O+A = A, \; \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

A_4- **Elemento Inverso**: para todo $A=[a_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ existe

$-A := [-a_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A+(-A) = -A+A = O, \;\; \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Adição de Matrizes

A_1- **Associativa**: $(A+B)+C = A+(B+C), \ \ \forall A,B,C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Sejam $A=[a_{ij}]_{m\times n}, B=[b_{ij}]_{m\times n}, C=[c_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$$
\begin{aligned}
(A+B)+C &= ([a_{ij}]+[b_{ij}])+[c_{ij}] \\
\text{def de } + \rightarrow &= [a_{ij}+b_{ij}]+[c_{ij}] \\
\text{def de } + \rightarrow &= [(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}] \\
\text{A1 em } \mathbb{R} \rightarrow &= [a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})] \\
\text{def de } + \rightarrow &= [a_{ij}]+[b_{ij}+c_{ij}] \\
\text{def de } + \rightarrow &= [a_{ij}]+([b_{ij}]+[c_{ij}]) = A+(B+C).
\end{aligned}
$$

A_2- **Comutativa**: $A+B=B+A, \ \ \forall A,B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

A_3- **Elemento Neutro**: existe $O=O_{m\times n}$ tal que $A+O=O+A=A, \ \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

A_4- **Elemento Inverso**: para todo $A=[a_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ existe $-A := [-a_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A+(-A) = -A+A = O, \ \ \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Multiplicação por escalar

Dados $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, a matriz multiplicação de α por A é a matriz $m \times n$

$$\alpha.A := [\alpha a_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$$

$$\alpha.A = \begin{bmatrix} \alpha.a_{11} & \alpha.a_{12} & \cdots & \alpha.a_{1n} \\ \alpha.a_{21} & \alpha.a_{22} & \cdots & \alpha.a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha.a_{m1} & \alpha.a_{m2} & \cdots & \alpha.a_{mn} \end{bmatrix}$$

Multiplicação por escalar

M_1- **Associativa**: $\alpha.(\beta.A) = (\alpha\beta).A, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
\alpha.(\beta.A) &= \alpha.(\beta.[a_{ij}]_{m\times n})) \\
\text{def de . } \rightarrow &= \alpha.[\beta a_{ij}]_{m\times n} \\
\text{def de . } \rightarrow &= [\alpha(\beta a_{ij})]_{m\times n} \\
\text{A1 em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow &= [(\alpha\beta)a_{ij}]_{m\times n} \\
\text{def de . } \rightarrow &= (\alpha\beta).[a_{ij}]_{m\times n} = (\alpha\beta).A.
\end{aligned}$$

M_2- **Distributiva sobre a adição de escalares**: $(\alpha+\beta).A = \alpha.A + \beta.A$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

M_3- **Distributiva sobre a adição de vetores**: $\alpha.(A+B) = \alpha.A + \alpha.B, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

M_4- **Identidade**: $1.A = A, \quad \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Multiplicação por escalar

$M_1 -$ **Associativa**: $\alpha.(\beta.A) = (\alpha\beta).A, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
\alpha.(\beta.A) &= \alpha.(\beta.[a_{ij}]_{m\times n}) \\
\text{def de .} \longrightarrow &= \alpha.[\beta a_{ij}]_{m\times n} \\
\text{def de .} \longrightarrow &= [\alpha(\beta a_{ij})]_{m\times n} \\
\text{A1 em } (\mathbb{R}, .) \longrightarrow &= [(\alpha\beta)a_{ij}]_{m\times n} \\
\text{def de .} \longrightarrow &= (\alpha\beta).[a_{ij}]_{m\times n} = (\alpha\beta).A.
\end{aligned}$$

$M_2 -$ **Distributiva sobre a adição de escalares**: $(\alpha+\beta).A = \alpha.A + \beta.A$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$M_3 -$ **Distributiva sobre a adição de vetores**: $\alpha.(A+B) = \alpha.A + \alpha.B, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$M_4 -$ **Identidade**: $1.A = A, \quad \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Multiplicação por escalar

M_1- **Associativa**: $\alpha.(\beta.A) = (\alpha\beta).A, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \alpha.(\beta.A) &= \alpha.(\beta.[a_{ij}]_{m\times n}) \\ \text{def de . } \rightarrow &= \alpha.[\beta a_{ij}]_{m\times n} \\ \text{def de . } \rightarrow &= [\alpha(\beta a_{ij})]_{m\times n} \\ \text{A1 em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow &= [(\alpha\beta) a_{ij}]_{m\times n} \\ \text{def de . } \rightarrow &= (\alpha\beta).[a_{ij}]_{m\times n} = (\alpha\beta).A. \end{aligned}$$

M_2- **Distributiva sobre a adição de escalares:** $(\alpha+\beta).A = \alpha.A + \beta.A$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

M_3- **Distributiva sobre a adição de vetores:** $\alpha.(A+B) = \alpha.A + \alpha.B, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

M_4- **Identidade:** $1.A = A, \quad \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Multiplicação por escalar

M_1- **Associativa**: $\alpha.(\beta.A)=(\alpha\beta).A, \quad \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ e $\forall A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Sejam $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ e $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$$
\begin{aligned}
\alpha.(\beta.A) &= \alpha.(\beta.[a_{ij}]_{m\times n}))\\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= \alpha.[\beta a_{ij}]_{m\times n}\\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= [\alpha(\beta a_{ij})]_{m\times n}\\
\text{A1 em } (\mathbb{R},.) \rightarrow \quad &= [(\alpha\beta)a_{ij}]_{m\times n}\\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= (\alpha\beta).[a_{ij}]_{m\times n}=(\alpha\beta).A.
\end{aligned}
$$

M_2- **Distributiva sobre a adição de escalares**: $(\alpha+\beta).A=\alpha.A+\beta.A$, $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ e $\forall A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

M_3- **Distributiva sobre a adição de vetores**: $\alpha.(A+B)=\alpha.A+\alpha.B, \ \forall\alpha\in\mathbb{R}$ e $\forall A,B\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

M_4- **Identidade**: $1.A=A, \ \forall A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Multiplicação por escalar

$M_1 -$ **Associativa**: $\alpha.(\beta.A) = (\alpha\beta).A, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
\alpha.(\beta.A) &= \alpha.(\beta.[a_{ij}]_{m\times n})) \\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= \alpha.[\beta a_{ij}]_{m\times n} \\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= [\alpha(\beta a_{ij})]_{m\times n} \\
\text{A1 em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow \quad &= [(\alpha\beta) a_{ij}]_{m\times n} \\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= (\alpha\beta).[a_{ij}]_{m\times n} = (\alpha\beta).A.
\end{aligned}$$

$M_2 -$ **Distributiva sobre a adição de escalares**: $(\alpha + \beta).A = \alpha.A + \beta.A$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$M_3 -$ **Distributiva sobre a adição de vetores**: $\alpha.(A + B) = \alpha.A + \alpha.B, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$M_4 -$ **Identidade**: $1.A = A, \quad \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Multiplicação por escalar

M_1- **Associativa**: $\alpha.(\beta.A) = (\alpha\beta).A, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
\alpha.(\beta.A) &= \alpha.(\beta.[a_{ij}]_{m\times n})) \\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= \alpha.[\beta a_{ij}]_{m\times n} \\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= [\alpha(\beta a_{ij})]_{m\times n} \\
\text{A1 em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow \quad &= [(\alpha\beta) a_{ij}]_{m\times n} \\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= (\alpha\beta).[a_{ij}]_{m\times n} = (\alpha\beta).A.
\end{aligned}$$

M_2- **Distributiva sobre a adição de escalares**: $(\alpha + \beta).A = \alpha.A + \beta.A$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

M_3- **Distributiva sobre a adição de vetores**: $\alpha.(A + B) = \alpha.A + \alpha.B, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

M_4- **Identidade**: $1.A = A, \quad \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Multiplicação por escalar

$M_1 -$ **Associativa**: $\alpha.(\beta.A) = (\alpha\beta).A, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
\alpha.(\beta.A) &= \alpha.(\beta.[a_{ij}]_{m\times n})) \\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= \alpha.[\beta a_{ij}]_{m\times n} \\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= [\alpha(\beta a_{ij})]_{m\times n} \\
\text{A1 em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow \quad &= [(\alpha\beta)a_{ij}]_{m\times n} \\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= (\alpha\beta).[a_{ij}]_{m\times n} = (\alpha\beta).A.
\end{aligned}$$

$M_2 -$ **Distributiva sobre a adição de escalares**: $(\alpha + \beta).A = \alpha.A + \beta.A$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$M_3 -$ **Distributiva sobre a adição de vetores**: $\alpha.(A + B) = \alpha.A + \alpha.B, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$M_4 -$ **Identidade**: $1.A = A, \quad \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Multiplicação por escalar

M_1- **Associativa**: $\alpha.(\beta.A) = (\alpha\beta).A, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$$
\begin{aligned}
\alpha.(\beta.A) &= \alpha.(\beta.[a_{ij}]_{m\times n})) \\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= \alpha.[\beta a_{ij}]_{m\times n} \\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= [\alpha(\beta a_{ij})]_{m\times n} \\
\text{A1 em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow \quad &= [(\alpha\beta) a_{ij}]_{m\times n} \\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= (\alpha\beta).[a_{ij}]_{m\times n} = (\alpha\beta).A.
\end{aligned}
$$

M_2- **Distributiva sobre a adição de escalares**: $(\alpha + \beta).A = \alpha.A + \beta.A$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

M_3- **Distributiva sobre a adição de vetores**: $\alpha.(A + B) = \alpha.A + \alpha.B, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

M_4- **Identidade**: $1.A = A, \ \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Multiplicação por escalar

M_1- **Associativa**: $\alpha.(\beta.A) = (\alpha\beta).A, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
\alpha.(\beta.A) &= \alpha.(\beta.[a_{ij}]_{m\times n})) \\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= \alpha.[\beta a_{ij}]_{m\times n} \\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= [\alpha(\beta a_{ij})]_{m\times n} \\
\text{A1 em } (\mathbb{R}, .) \rightarrow \quad &= [(\alpha\beta)a_{ij}]_{m\times n} \\
\text{def de . } \rightarrow \quad &= (\alpha\beta).[a_{ij}]_{m\times n} = (\alpha\beta).A.
\end{aligned}$$

M_2- **Distributiva sobre a adição de escalares**: $(\alpha+\beta).A = \alpha.A + \beta.A$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

M_3- **Distributiva sobre a adição de vetores**: $\alpha.(A+B) = \alpha.A + \alpha.B, \; \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

M_4- **Identidade**: $1.A = A, \; \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Exemplo: Matrizes

- Como $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ satisfaz A_1, A_2, A_3, A_4, então $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +)$ é um grupo abeliano.

Como $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ satisfaz A_1, A_2, A_3, A_4, M_1, M_2, M_3, M_4 então $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +, .)$ é um espaço vetorial real.

Obs: As operações $+$ e . em $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ definidas nesse exemplo são chamadas operações usuais em $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Exemplo $M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ e $M_{1\times n}(\mathbb{R})$ são espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$.

Exemplo: Matrizes

- Como $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ satisfaz A_1, A_2, A_3, A_4, então $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +)$ é um grupo abeliano.

Como $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ satisfaz A_1, A_2, A_3, A_4, M_1, M_2, M_3, M_4 então $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +, .)$ é um espaço vetorial real.

Obs: As operações $+$ e $.$ em $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ definidas nesse exemplo são chamadas operações usuais em $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Exemplo $M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ e $M_{1\times n}(\mathbb{R})$ são espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$.

Exemplo: Matrizes

- Como $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ satisfaz A_1, A_2, A_3, A_4, então $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +)$ é um grupo abeliano.

Como $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ satisfaz A_1, A_2, A_3, A_4, M_1, M_2, M_3, M_4 então $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +, .)$ é um espaço vetorial real.

Obs: As operações $+$ e . em $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ definidas nesse exemplo são chamadas operações usuais em $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Exemplo $M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ e $M_{1\times n}(\mathbb{R})$ são espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$.

Exemplo: Matrizes

- Como $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ satisfaz A_1, A_2, A_3, A_4, então $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +)$ é um grupo abeliano.

Como $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ satisfaz A_1, A_2, A_3, A_4, M_1, M_2, M_3, M_4 então $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +, .)$ é um espaço vetorial real.

Obs: As operações $+$ e . em $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ definidas nesse exemplo são chamadas operações usuais em $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Exemplo $M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ e $M_{1\times n}(\mathbb{R})$ são espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$.