Espaços Vetoriais

Subespaços Vetoriais

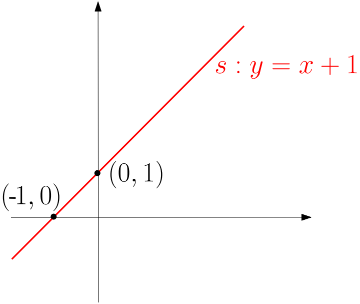
Álgebra Linear

Mariana Silveira - Cristian Coletti

Universidade Federal do ABC

Exemplo

Consideremos $(s, +, .)$ com as operações usuais do $\mathbb{R}^2$.

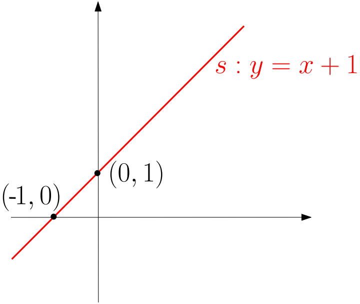


- $(-1, 0) \in s$, $(0, 1) \in s$, mas $(-1, 0) + (0, 1) = (-1, 1) \notin s$.
- $(0, 1) \in s$, mas $2.(0, 1) = (0, 2) \notin s$.

- As operações $+$ e $.$ não são operações em s. Nesse caso, dizemos que s não é **fechado para a adição** usual de $\mathbb{R}^2$ e também não é **fechado para a multiplicação por escalar** usual de $\mathbb{R}^2$.
- $(s, +, .)$ não é um espaço vetorial.

Exemplo

Consideremos $(s, +, .)$ com as operações usuais do $\mathbb{R}^2$.

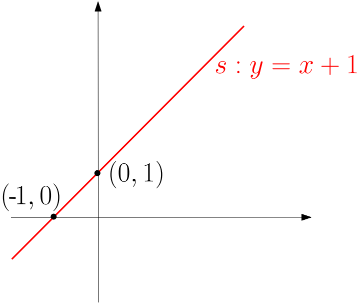


- $(-1, 0) \in s$, $(0, 1) \in s$, mas $(-1, 0) + (0, 1) = (-1, 1) \notin s$.
- $(0, 1) \in s$, mas $2.(0, 1) = (0, 2) \notin s$.

- As operações $+$ e $.$ não são operações em s. Nesse caso, dizemos que s não é **fechado para a adição** usual de $\mathbb{R}^2$ e também não é **fechado para a multiplicação por escalar** usual de $\mathbb{R}^2$.
- $(s, +, .)$ não é um espaço vetorial.

Exemplo

Consideremos $(s, +, .)$ com as operações usuais do $\mathbb{R}^2$.

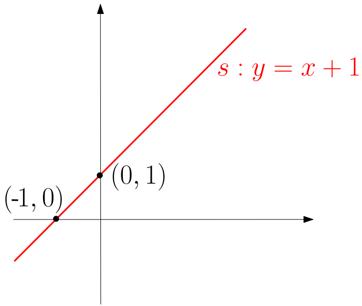


- $(-1, 0) \in s$, $(0, 1) \in s$, mas $(-1, 0) + (0, 1) = (-1, 1) \notin s$.
- $(0, 1) \in s$, mas $2.(0, 1) = (0, 2) \notin s$.

- As operações $+$ e $.$ não são operações em s. Nesse caso, dizemos que s não é **fechado para a adição** usual de $\mathbb{R}^2$ e também não é **fechado para a multiplicação por escalar** usual de $\mathbb{R}^2$.
- $(s, +, .)$ não é um espaço vetorial.

Exemplo

Consideremos $(s, +, .)$ com as operações usuais do $\mathbb{R}^2$.

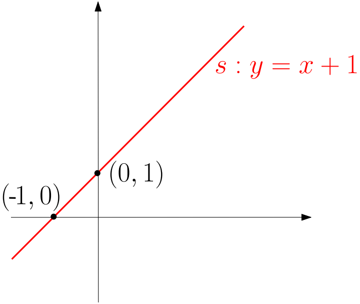


- $(-1, 0) \in s$, $(0, 1) \in s$, mas $(-1, 0) + (0, 1) = (-1, 1) \notin s$.
- $(0, 1) \in s$, mas $2.(0, 1) = (0, 2) \notin s$.

- As operações $+$ e $.$ não são operações em s. Nesse caso, dizemos que s não é **fechado para a adição** usual de $\mathbb{R}^2$ e também não é **fechado para a multiplicação por escalar** usual de $\mathbb{R}^2$.
- $(s, +, .)$ não é um espaço vetorial.

Exemplo

Consideremos $(s, +, .)$ com as operações usuais do $\mathbb{R}^2$.

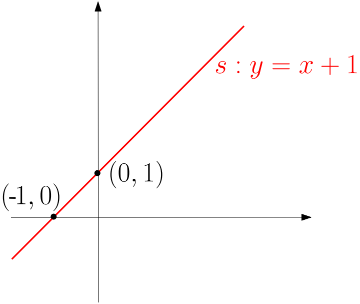


- $(-1, 0) \in s$, $(0, 1) \in s$, mas $(-1, 0) + (0, 1) = (-1, 1) \notin s$.
- $(0, 1) \in s$, mas $2.(0, 1) = (0, 2) \notin s$.

- As operações $+$ e $.$ não são operações em s. Nesse caso, dizemos que s não é **fechado para a adição** usual de $\mathbb{R}^2$ e também não é **fechado para a multiplicação por escalar** usual de $\mathbb{R}^2$.
- $(s, +, .)$ não é um espaço vetorial.

Exemplo

Consideremos $(s, +, .)$ com as operações usuais do $\mathbb{R}^2$.

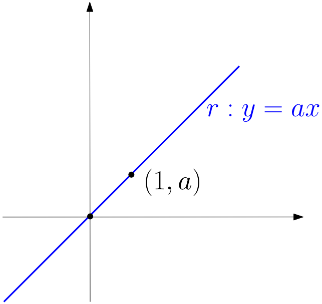


- $(-1, 0) \in s$, $(0, 1) \in s$, mas $(-1, 0) + (0, 1) = (-1, 1) \notin s$.
- $(0, 1) \in s$, mas $2.(0, 1) = (0, 2) \notin s$.

- As operações $+$ e $.$ não são operações em s. Nesse caso, dizemos que s não é **fechado para a adição** usual de $\mathbb{R}^2$ e também não é **fechado para a multiplicação por escalar** usual de $\mathbb{R}^2$.
- $(s, +, .)$ não é um espaço vetorial.

Exemplo

Consideremos $(r, +, .)$ com as operações usuais do $\mathbb{R}^2$.



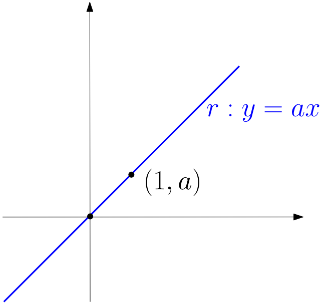
- $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in r \Rightarrow (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in r$?
  Como $(x_1, y_1) \in r$, $y_1 = ax_1$.
  Como $(x_2, y_2) \in r$, $y_2 = ax_2$. Logo
  $a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2 = y_1 + y_2 \leftarrow$ sim!
- $\alpha \in \mathbb{R}, (x_1, y_1) \in r \Rightarrow (\alpha x_1, \alpha y_1) \in r$?
  Como $(x_1, y_1) \in r$, $y_1 = ax_1$. Logo
  $a(\alpha x_1) = \alpha(ax_1) = y_1 \leftarrow$ sim!

- As operações $+$ e $.$ usuais de $\mathbb{R}^2$ são operações em r, ou seja, r é fechado para a adição e para a multiplicação por escalar usuais de $\mathbb{R}^2$.
- Note que valem A_1, A_2, M_1, M_2, M_3, M_4.Valem também A_3, A_4.

$(r, +, .)$ é espaço vetorial.

Exemplo

Consideremos $(r, +, .)$ com as operações usuais do $\mathbb{R}^2$.

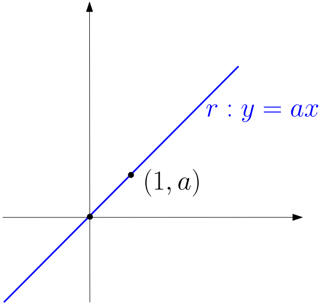


- $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in r \Rightarrow (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in r$?
  Como $(x_1, y_1) \in r$, $y_1 = ax_1$.
  Como $(x_2, y_2) \in r$, $y_2 = ax_2$. Logo
  $a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2 = y_1 + y_2 \leftarrow$ sim!
- $\alpha \in \mathbb{R}, (x_1, y_1) \in r \Rightarrow (\alpha x_1, \alpha y_1) \in r$?
  Como $(x_1, y_1) \in r$, $y_1 = ax_1$. Logo
  $a(\alpha x_1) = \alpha(ax_1) = y_1 \leftarrow$ sim!
- As operações $+$ e $.$ usuais de $\mathbb{R}^2$ são operações em r, ou seja, r é fechado para a adição e para a multiplicação por escalar usuais de $\mathbb{R}^2$.
- Note que valem A_1, A_2, M_1, M_2, M_3, M_4. Valem também A_3, A_4.

$(r, +, .)$ é espaço vetorial.

Exemplo

Consideremos $(r, +, .)$ com as operações usuais do $\mathbb{R}^2$.



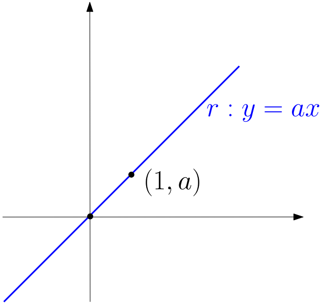
- $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in r \Rightarrow (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in r$?
  Como $(x_1, y_1) \in r$, $y_1 = ax_1$.
  Como $(x_2, y_2) \in r$, $y_2 = ax_2$. Logo
  $a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2 = y_1 + y_2 \leftarrow$ sim!
- $\alpha \in \mathbb{R}, (x_1, y_1) \in r \Rightarrow (\alpha x_1, \alpha y_1) \in r$?
  Como $(x_1, y_1) \in r$, $y_1 = ax_1$. Logo
  $a(\alpha x_1) = \alpha(ax_1) = y_1 \leftarrow$ sim!

- As operações $+$ e $.$ usuais de $\mathbb{R}^2$ são operações em r, ou seja, r é fechado para a adição e para a multiplicação por escalar usuais de $\mathbb{R}^2$.
- Note que valem A_1, A_2, M_1, M_2, M_3, M_4. Valem também A_3, A_4.

$(r, +, .)$ é espaço vetorial.

Exemplo

Consideremos $(r, +, .)$ com as operações usuais do $\mathbb{R}^2$.

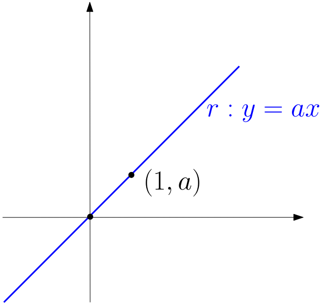


- $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in r \Rightarrow (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in r$?
  Como $(x_1, y_1) \in r$, $y_1 = ax_1$.
  Como $(x_2, y_2) \in r$, $y_2 = ax_2$. Logo
  $a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2 = y_1 + y_2$ $\leftarrow$ sim!
- $\alpha \in \mathbb{R}, (x_1, y_1) \in r \Rightarrow (\alpha x_1, \alpha y_1) \in r$?
  Como $(x_1, y_1) \in r$, $y_1 = ax_1$. Logo
  $a(\alpha x_1) = \alpha(ax_1) = y_1$ $\leftarrow$ sim!
- As operações $+$ e $.$ usuais de $\mathbb{R}^2$ são operações em r, ou seja, r é fechado para a adição e para a multiplicação por escalar usuais de $\mathbb{R}^2$.
- Note que valem A_1, A_2, M_1, M_2, M_3, M_4. Valem também A_3, A_4.

$(r, +, .)$ é espaço vetorial.

Exemplo

Consideremos $(r, +, .)$ com as operações usuais do $\mathbb{R}^2$.



- $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in r \Rightarrow (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in r$?

  Como $(x_1, y_1) \in r$, $y_1 = ax_1$.

  Como $(x_2, y_2) \in r$, $y_2 = ax_2$. Logo

  $a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2 = y_1 + y_2 \leftarrow$ sim!

- $\alpha \in \mathbb{R}, (x_1, y_1) \in r \Rightarrow (\alpha x_1, \alpha y_1) \in r$?

  Como $(x_1, y_1) \in r$, $y_1 = ax_1$. Logo

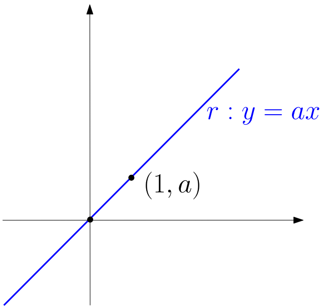
  $a(\alpha x_1) = \alpha(ax_1) = y_1 \leftarrow$ sim!

- As operações $+$ e $.$ usuais de $\mathbb{R}^2$ são operações em r, ou seja, r é fechado para a adição e para a multiplicação por escalar usuais de $\mathbb{R}^2$.
- Note que valem A_1, A_2, M_1, M_2, M_3, M_4. Valem também A_3, A_4.

$(r, +, .)$ é espaço vetorial.

Exemplo

Consideremos $(r, +, .)$ com as operações usuais do $\mathbb{R}^2$.



- $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in r \Rightarrow (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in r$?

  Como $(x_1, y_1) \in r$, $y_1 = ax_1$.

  Como $(x_2, y_2) \in r$, $y_2 = ax_2$. Logo

  $a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2 = y_1 + y_2$ $\leftarrow$ sim!

- $\alpha \in \mathbb{R}, (x_1, y_1) \in r \Rightarrow (\alpha x_1, \alpha y_1) \in r$?

  Como $(x_1, y_1) \in r$, $y_1 = ax_1$. Logo

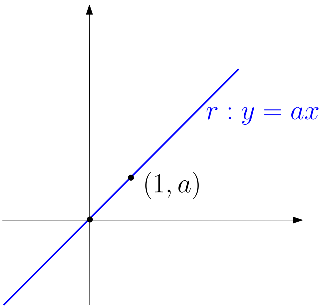
  $a(\alpha x_1) = \alpha(ax_1) = y_1$ $\leftarrow$ sim!

- As operações $+$ e $.$ usuais de $\mathbb{R}^2$ são operações em r, ou seja, r é fechado para a adição e para a multiplicação por escalar usuais de $\mathbb{R}^2$.
- Note que valem A_1, A_2, M_1, M_2, M_3, M_4. Valem também A_3, A_4.

$(r, +, .)$ é espaço vetorial.

Exemplo

Consideremos $(r, +, .)$ com as operações usuais do $\mathbb{R}^2$.

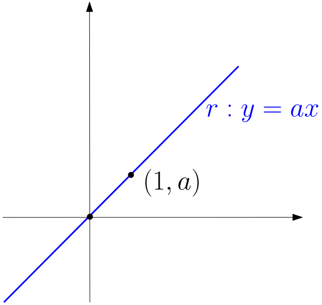


- $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in r \Rightarrow (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in r$?
  Como $(x_1, y_1) \in r$, $y_1 = ax_1$.
  Como $(x_2, y_2) \in r$, $y_2 = ax_2$. Logo
  $a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2 = y_1 + y_2 \leftarrow$ sim!
- $\alpha \in \mathbb{R}, (x_1, y_1) \in r \Rightarrow (\alpha x_1, \alpha y_1) \in r$?
  Como $(x_1, y_1) \in r$, $y_1 = ax_1$. Logo
  $a(\alpha x_1) = \alpha(ax_1) = y_1 \leftarrow$ sim!
- As operações $+$ e $.$ usuais de $\mathbb{R}^2$ são operações em r, ou seja, r é fechado para a adição e para a multiplicação por escalar usuais de $\mathbb{R}^2$.
- Note que valem A_1, A_2, M_1, M_2, M_3, M_4.Valem também A_3, A_4.

$(r, +, .)$ é espaço vetorial.

Exemplo

Consideremos $(r, +, .)$ com as operações usuais do $\mathbb{R}^2$.



- $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in r \Rightarrow (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in r$?

  Como $(x_1, y_1) \in r$, $y_1 = ax_1$.

  Como $(x_2, y_2) \in r$, $y_2 = ax_2$. Logo

  $a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2 = y_1 + y_2$ $\leftarrow$ sim!

- $\alpha \in \mathbb{R}, (x_1, y_1) \in r \Rightarrow (\alpha x_1, \alpha y_1) \in r$?

  Como $(x_1, y_1) \in r$, $y_1 = ax_1$. Logo

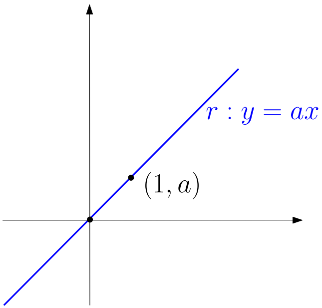
  $a(\alpha x_1) = \alpha(ax_1) = y_1$ $\leftarrow$ sim!

- As operações $+$ e . usuais de $\mathbb{R}^2$ são operações em r, ou seja, r é fechado para a adição e para a multiplicação por escalar usuais de $\mathbb{R}^2$.
- Note que valem A_1, A_2, M_1, M_2, M_3, M_4. Valem também A_3, A_4.

$(r, +, .)$ é espaço vetorial.

Exemplo

Consideremos $(r, +, .)$ com as operações usuais do $\mathbb{R}^2$.

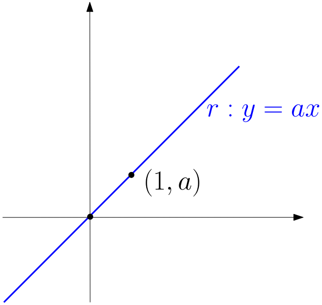


- $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in r \Rightarrow (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in r$?
  Como $(x_1, y_1) \in r$, $y_1 = ax_1$.
  Como $(x_2, y_2) \in r$, $y_2 = ax_2$. Logo
  $a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2 = y_1 + y_2 \leftarrow$ sim!
- $\alpha \in \mathbb{R}, (x_1, y_1) \in r \Rightarrow (\alpha x_1, \alpha y_1) \in r$?
  Como $(x_1, y_1) \in r$, $y_1 = ax_1$. Logo
  $a(\alpha x_1) = \alpha(ax_1) = y_1 \leftarrow$ sim!
- As operações $+$ e $.$ usuais de $\mathbb{R}^2$ são operações em r, ou seja, r é fechado para a adição e para a multiplicação por escalar usuais de $\mathbb{R}^2$.
- Note que valem A_1, A_2, M_1, M_2, M_3, M_4. Valem também A_3, A_4.

$(r, +, .)$ é espaço vetorial.

Exemplo

Consideremos $(r, +, .)$ com as operações usuais do $\mathbb{R}^2$.



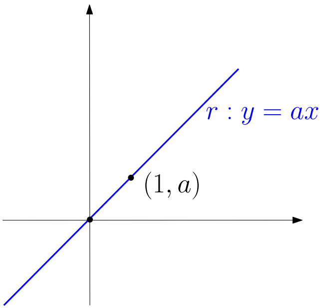
- $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in r \Rightarrow (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in r$?
  Como $(x_1, y_1) \in r$, $y_1 = ax_1$.
  Como $(x_2, y_2) \in r$, $y_2 = ax_2$. Logo
  $a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2 = y_1 + y_2 \leftarrow$ sim!
- $\alpha \in \mathbb{R}, (x_1, y_1) \in r \Rightarrow (\alpha x_1, \alpha y_1) \in r$?
  Como $(x_1, y_1) \in r$, $y_1 = ax_1$. Logo
  $a(\alpha x_1) = \alpha(ax_1) = y_1 \leftarrow$ sim!

- As operações $+$ e $.$ usuais de $\mathbb{R}^2$ são operações em r, ou seja, r é fechado para a adição e para a multiplicação por escalar usuais de $\mathbb{R}^2$.
- Note que valem A_1, A_2, M_1, M_2, M_3, M_4.Valem também A_3, A_4.

$(r, +, .)$ é espaço vetorial.

Exemplo

Consideremos $(r, +, .)$ com as operações usuais do $\mathbb{R}^2$.



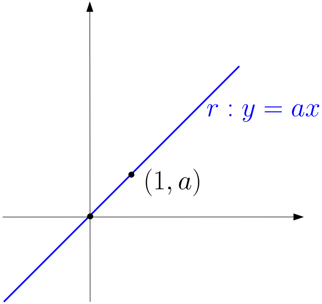
- $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in r \Rightarrow (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in r$?
  Como $(x_1, y_1) \in r$, $y_1 = ax_1$.
  Como $(x_2, y_2) \in r$, $y_2 = ax_2$. Logo
  $a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2 = y_1 + y_2 \leftarrow$ sim!
- $\alpha \in \mathbb{R}, (x_1, y_1) \in r \Rightarrow (\alpha x_1, \alpha y_1) \in r$?
  Como $(x_1, y_1) \in r$, $y_1 = ax_1$. Logo
  $a(\alpha x_1) = \alpha(ax_1) = y_1 \leftarrow$ sim!

- As operações $+$ e $.$ usuais de $\mathbb{R}^2$ são operações em r, ou seja, r é fechado para a adição e para a multiplicação por escalar usuais de $\mathbb{R}^2$.
- Note que valem A_1, A_2, M_1, M_2, M_3, M_4. Valem também A_3, A_4.

$(r, +, .)$ é espaço vetorial.

Exemplo

Consideremos $(r, +, .)$ com as operações usuais do $\mathbb{R}^2$.

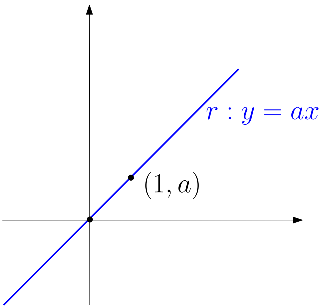


- $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in r \Rightarrow (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in r$?
  Como $(x_1, y_1) \in r$, $y_1 = ax_1$.
  Como $(x_2, y_2) \in r$, $y_2 = ax_2$. Logo
  $a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2 = y_1 + y_2 \leftarrow$ sim!
- $\alpha \in \mathbb{R}, (x_1, y_1) \in r \Rightarrow (\alpha x_1, \alpha y_1) \in r$?
  Como $(x_1, y_1) \in r$, $y_1 = ax_1$. Logo
  $a(\alpha x_1) = \alpha(ax_1) = y_1 \leftarrow$ sim!
- As operações $+$ e $.$ usuais de $\mathbb{R}^2$ são operações em r, ou seja, r é fechado para a adição e para a multiplicação por escalar usuais de $\mathbb{R}^2$.
- Note que valem A_1, A_2, M_1, M_2, M_3, M_4.Valem também A_3, A_4.

$(r, +, .)$ é espaço vetorial.

Exemplo

Consideremos $(r, +, .)$ com as operações usuais do $\mathbb{R}^2$.



- $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in r \Rightarrow (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in r$?
  Como $(x_1, y_1) \in r$, $y_1 = ax_1$.
  Como $(x_2, y_2) \in r$, $y_2 = ax_2$. Logo
  $a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2 = y_1 + y_2 \leftarrow$ sim!
- $\alpha \in \mathbb{R}, (x_1, y_1) \in r \Rightarrow (\alpha x_1, \alpha y_1) \in r$?
  Como $(x_1, y_1) \in r$, $y_1 = ax_1$. Logo
  $a(\alpha x_1) = \alpha(ax_1) = y_1 \leftarrow$ sim!

- As operações $+$ e $.$ usuais de $\mathbb{R}^2$ são operações em r, ou seja, r é fechado para a adição e para a multiplicação por escalar usuais de $\mathbb{R}^2$.
- Note que valem A_1, A_2, M_1, M_2, M_3, M_4.Valem também A_3, A_4.

$(r, +, .)$ é espaço vetorial.

Subespaços Vetoriais

Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e $W \subset V$. Dizemos que W é um **subespaço vetorial de** V se W, com as operações $+$ e . de V, é um espaço vetorial. Mais especificamente, as restrições das operações de V a W

$$+|_{W\times W} : W \times W \to W, \qquad .|_{\mathbb{R}\times W} : \mathbb{R} \times W \to W$$

são operações em W e satisfazem as propriedades A_1, A_2, A_3, A_4 e M_1, M_2, M_3, M_4.

Exemplos:

1. r é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.
2. s não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

Subespaços Vetoriais

Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e $W \subset V$. Dizemos que W é um **subespaço vetorial de** V se W, com as operações $+$ e . de V, é um espaço vetorial. Mais especificamente, as restrições das operações de V a W

$$+|_{W\times W} : W \times W \to W, \qquad .|_{\mathbb{R}\times W} : \mathbb{R} \times W \to W$$

são operações em W e satisfazem as propriedades A_1, A_2, A_3, A_4 e M_1, M_2, M_3, M_4.

Exemplos:

1. r é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.
2. s não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

Subespaços Vetoriais

Proposição: Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e $W \subset V$. W é um subespaço vetorial de V se, e somente se, valem as seguintes propriedades:

sv_1. $W \neq \emptyset$;

sv_2. (W é fechado para $+$) se $u, v \in W$ então $u + v \in W$;

sv_3. (W é fechado para .) se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in W$ então $\alpha.u \in W$.

Prova:($\Rightarrow$) É obvia.

($\Leftarrow$) Por sv_2 e sv_3 temos que as operações de V, quando restritas a W, são operações bem definidas em W. As propriedades A_1, A_2 e M_1, M_2, M_3, M_4 valem, pois valem para quaisquer elementos de V.

A_3 – $0 \in W$. Por sv_3 tomando $\alpha = 0$ temos que $0.u \in W$, ou seja, $0 \in W$.

A_4 – Dado $u \in W$, temos que $-u \in W$. De fato, tome $\alpha = -1$. Por sv_3 temos que $-1.u \in W$, ou seja, $-u \in W$. $\square$

Subespaços Vetoriais

Proposição: Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e $W \subset V$. W é um subespaço vetorial de V se, e somente se, valem as seguintes propriedades:

sv_1. $W \neq \emptyset$;

sv_2. (W é fechado para $+$) se $u, v \in W$ então $u + v \in W$;

sv_3. (W é fechado para .) se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in W$ então $\alpha.u \in W$.

Prova:($\Rightarrow$) É obvia.

($\Leftarrow$) Por sv_2 e sv_3 temos que as operações de V, quando restritas a W, são operações bem definidas em W. As propriedades A_1, A_2 e M_1, M_2, M_3, M_4 valem, pois valem para quaisquer elementos de V.

$A_3 - 0 \in W$. Por sv_3 tomando $\alpha = 0$ temos que $0.u \in W$, ou seja, $0 \in W$.

$A_4 -$ Dado $u \in W$, temos que $-u \in W$. De fato, tome $\alpha = -1$. Por sv_3 temos que $-1.u \in W$, ou seja, $-u \in W$. □

Subespaços Vetoriais

Proposição: Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e $W \subset V$. W é um subespaço vetorial de V se, e somente se, valem as seguintes propriedades:

sv_1. $W \neq \emptyset$;

sv_2. (W é fechado para $+$) se $u, v \in W$ então $u + v \in W$;

sv_3. (W é fechado para .) se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in W$ então $\alpha.u \in W$.

Prova:($\Rightarrow$) É obvia.

($\Leftarrow$) Por sv_2 e sv_3 temos que as operações de V, quando restritas a W, são operações bem definidas em W. As propriedades A_1, A_2 e M_1, M_2, M_3, M_4 valem, pois valem para quaisquer elementos de V.

$A_3 -$ $0 \in W$. Por sv_3 tomando $\alpha = 0$ temos que $0.u \in W$, ou seja, $0 \in W$.

$A_4 -$ Dado $u \in W$, temos que $-u \in W$. De fato, tome $\alpha = -1$. Por sv_3 temos que $-1.u \in W$, ou seja, $-u \in W$. $\square$

Subespaços Vetoriais

Proposição: Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e $W \subset V$. W é um subespaço vetorial de V se, e somente se, valem as seguintes propriedades:

sv_1. $W \neq \emptyset$;

sv_2. (W é fechado para $+$) se $u, v \in W$ então $u + v \in W$;

sv_3. (W é fechado para .) se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in W$ então $\alpha.u \in W$.

Prova:($\Rightarrow$) É obvia.

($\Leftarrow$) Por sv_2 e sv_3 temos que as operações de V, quando restritas a W, são operações bem definidas em W. As propriedades A_1, A_2 e M_1, M_2, M_3, M_4 valem, pois valem para quaisquer elementos de V.

$A_3 -$ $0 \in W$. Por sv_3 tomando $\alpha = 0$ temos que $0.u \in W$, ou seja, $0 \in W$.

$A_4 -$ Dado $u \in W$, temos que $-u \in W$. De fato, tome $\alpha = -1$. Por sv_3 temos que $-1.u \in W$, ou seja, $-u \in W$. $\square$

Subespaços Vetoriais

Proposição: Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e $W \subset V$. W é um subespaço vetorial de V se, e somente se, valem as seguintes propriedades:

sv_1. $W \neq \emptyset$;

sv_2. (W é fechado para $+$) se $u, v \in W$ então $u + v \in W$;

sv_3. (W é fechado para .) se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in W$ então $\alpha.u \in W$.

Prova:($\Rightarrow$) É obvia.

($\Leftarrow$) Por sv_2 e sv_3 temos que as operações de V, quando restritas a W, são operações bem definidas em W. As propriedades A_1, A_2 e M_1, M_2, M_3, M_4 valem, pois valem para quaisquer elementos de V.

A_3- $0 \in W$. Por sv_3 tomando $\alpha = 0$ temos que $0.u \in W$, ou seja, $0 \in W$.

A_4- Dado $u \in W$, temos que $-u \in W$. De fato, tome $\alpha = -1$. Por sv_3 temos que $-1.u \in W$, ou seja, $-u \in W$. $\square$

Subespaços Vetoriais

Proposição: Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e $W \subset V$. W é um subespaço vetorial de V se, e somente se, valem as seguintes propriedades:

sv_1. $W \neq \emptyset$;

sv_2. (W é fechado para $+$) se $u, v \in W$ então $u + v \in W$;

sv_3. (W é fechado para .) se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in W$ então $\alpha.u \in W$.

Prova:($\Rightarrow$) É obvia.

($\Leftarrow$) Por sv_2 e sv_3 temos que as operações de V, quando restritas a W, são operações bem definidas em W. As propriedades A_1, A_2 e M_1, M_2, M_3, M_4 valem, pois valem para quaisquer elementos de V.

A_3- $0 \in W$. Por sv_3 tomando $\alpha = 0$ temos que $0.u \in W$, ou seja, $0 \in W$.

A_4- Dado $u \in W$, temos que $-u \in W$. De fato, tome $\alpha = -1$. Por sv_3 temos que $-1.u \in W$, ou seja, $-u \in W$. $\square$

Exemplos

1. $V = \mathbb{R}^n$ com adição e multiplicação por escalar usuais.

   $W = \{(0, a_2, \ldots, a_n),\ a_i \in \mathbb{R}, i = 2, \ldots, n\}$

sv_1. $W \neq \emptyset$, pois $(0, 0, \ldots, 0) \in W$.

sv_2. W é fechado para $+$: Sejam $u = (0, a_2, \ldots, a_n), v = (0, b_2, \ldots, b_n) \in W$.

Então

$$u + v = (0, a_2, \ldots, a_n) + (0, b_2, \ldots, b_n) = (0, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) \in W$$

sv_3. W é fechado para $.$: Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u = (0, a_2, \ldots, a_n) \in W$. Então

$$\alpha.u = \alpha.(0, a_2, \ldots, a_n) = (0, \alpha.a_2, \ldots, \alpha.a_n) \in W$$

Obs 1: Poderiamos colocar 0 em qualquer coordenada. Poderiamos também colocar em duas, três ou mais coordenadas.

Obs 2: Quando $V = \mathbb{R}^3$, W é o plano yz. Os eixos coordenados, os planos coordenados são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$.

Exemplos

1. $V = \mathbb{R}^n$ com adição e multiplicação por escalar usuais.

   $W = \{(0, a_2, \ldots, a_n),\ a_i \in \mathbb{R}, i = 2, \ldots, n\}$

sv_1. $W \neq \emptyset$, pois $(0, 0, \ldots, 0) \in W$.

sv_2. W é fechado para $+$: Sejam $u = (0, a_2, \ldots, a_n), v = (0, b_2, \ldots, b_n) \in W$. Então

$$u + v = (0, a_2, \ldots, a_n) + (0, b_2, \ldots, b_n) = (0, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) \in W$$

sv_3. W é fechado para $.$: Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u = (0, a_2, \ldots, a_n) \in W$. Então

$$\alpha.u = \alpha.(0, a_2, \ldots, a_n) = (0, \alpha.a_2, \ldots, \alpha.a_n) \in W$$

Obs 1: Poderiamos colocar 0 em qualquer coordenada. Poderiamos também colocar em duas, três ou mais coordenadas.

Obs 2: Quando $V = \mathbb{R}^3$, W é o plano yz. Os eixos coordenados, os planos coordenados são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$.

Exemplos

1. $V = \mathbb{R}^n$ com adição e multiplicação por escalar usuais.

   $W = \{(0, a_2, \ldots, a_n),\ a_i \in \mathbb{R}, i = 2, \ldots, n\}$

sv_1. $W \neq \emptyset$, pois $(0, 0, \ldots, 0) \in W$.

sv_2. W é fechado para $+$: Sejam $u = (0, a_2, \ldots, a_n), v = (0, b_2, \ldots, b_n) \in W$.

Então

$$u + v = (0, a_2, \ldots, a_n) + (0, b_2, \ldots, b_n) = (0, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) \in W$$

sv_3. W é fechado para .: Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u = (0, a_2, \ldots, a_n) \in W$. Então

$$\alpha.u = \alpha.(0, a_2, \ldots, a_n) = (0, \alpha.a_2, \ldots, \alpha.a_n) \in W$$

Obs 1: Poderíamos colocar 0 em qualquer coordenada. Poderíamos também colocar em duas, três ou mais coordenadas.

Obs 2: Quando $V = \mathbb{R}^3$, W é o plano yz. Os eixos coordenados, os planos coordenados são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$.

Exemplos

1. $V = \mathbb{R}^n$ com adição e multiplicação por escalar usuais.

   $W = \{(0, a_2, \ldots, a_n),\ a_i \in \mathbb{R}, i = 2, \ldots, n\}$

sv_1. $W \neq \emptyset$, pois $(0, 0, \ldots, 0) \in W$.

sv_2. W é fechado para $+$: Sejam $u = (0, a_2, \ldots, a_n), v = (0, b_2, \ldots, b_n) \in W$.

Então

$$u + v = (0, a_2, \ldots, a_n) + (0, b_2, \ldots, b_n) = (0, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) \in W$$

sv_3. W é fechado para .: Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u = (0, a_2, \ldots, a_n) \in W$. Então

$$\alpha.u = \alpha.(0, a_2, \ldots, a_n) = (0, \alpha.a_2, \ldots, \alpha.a_n) \in W$$

Obs 1: Poderiamos colocar 0 em qualquer coordenada. Poderiamos também colocar em duas, três ou mais coordenadas.

Obs 2: Quando $V = \mathbb{R}^3$, W é o plano yz. Os eixos coordenados, os planos coordenados são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$.

Exemplos

1. $V = \mathbb{R}^n$ com adição e multiplicação por escalar usuais.

   $W = \{(0, a_2, \dots, a_n),\ a_i \in \mathbb{R}, i = 2, \dots, n\}$

sv_1. $W \neq \emptyset$, pois $(0, 0, \dots, 0) \in W$.

sv_2. W é fechado para $+$: Sejam $u = (0, a_2, \dots, a_n), v = (0, b_2, \dots, b_n) \in W$.

Então

$$u + v = (0, a_2, \dots, a_n) + (0, b_2, \dots, b_n) = (0, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) \in W$$

sv_3. W é fechado para .: Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u = (0, a_2, \dots, a_n) \in W$. Então

$$\alpha.u = \alpha.(0, a_2, \dots, a_n) = (0, \alpha.a_2, \dots, \alpha.a_n) \in W$$

Obs 1: Poderiamos colocar 0 em qualquer coordenada. Poderiamos também colocar em duas, três ou mais coordenadas.

Obs 2: Quando $V = \mathbb{R}^3$, W é o plano yz. Os eixos coordenados, os planos coordenados são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$.

Exemplos

1. $V = \mathbb{R}^n$ com adição e multiplicação por escalar usuais.

   $W = \{(0, a_2, \ldots, a_n),\ a_i \in \mathbb{R}, i = 2, \ldots, n\}$

sv_1. $W \neq \emptyset$, pois $(0, 0, \ldots, 0) \in W$.

sv_2. W é fechado para $+$: Sejam $u = (0, a_2, \ldots, a_n), v = (0, b_2, \ldots, b_n) \in W$.

Então

$$u + v = (0, a_2, \ldots, a_n) + (0, b_2, \ldots, b_n) = (0, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) \in W$$

sv_3. W é fechado para .: Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u = (0, a_2, \ldots, a_n) \in W$. Então

$$\alpha.u = \alpha.(0, a_2, \ldots, a_n) = (0, \alpha.a_2, \ldots, \alpha.a_n) \in W$$

Obs 1: Poderiamos colocar 0 em qualquer coordenada. Poderiamos também colocar em duas, três ou mais coordenadas.

Obs 2: Quando $V = \mathbb{R}^3$, W é o plano yz. Os eixos coordenados, os planos coordenados são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$.

Exemplos

1. $V = \mathbb{R}^n$ com adição e multiplicação por escalar usuais.

   $W = \{(0, a_2, \ldots, a_n),\ a_i \in \mathbb{R}, i = 2, \ldots, n\}$

sv_1. $W \neq \emptyset$, pois $(0, 0, \ldots, 0) \in W$.

sv_2. W é fechado para $+$: Sejam $u = (0, a_2, \ldots, a_n), v = (0, b_2, \ldots, b_n) \in W$.

Então

$$u + v = (0, a_2, \ldots, a_n) + (0, b_2, \ldots, b_n) = (0, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) \in W$$

sv_3. W é fechado para .: Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u = (0, a_2, \ldots, a_n) \in W$. Então

$$\alpha.u = \alpha.(0, a_2, \ldots, a_n) = (0, \alpha.a_2, \ldots, \alpha.a_n) \in W$$

Obs 1: Poderiamos colocar 0 em qualquer coordenada. Poderiamos também colocar em duas, três ou mais coordenadas.

Obs 2: Quando $V = \mathbb{R}^3$, W é o plano yz. Os eixos coordenados, os planos coordenados são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$.

Exemplos

2. $V = \mathbb{R}^n$ com adição e multiplicação por escalar usuais.
   $W = \{(a_1, \ldots, a_n),\ a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n, a_1 \geq 0\}$

W não é subespaço vetorial de V, pois apesar de sv_1 e sv_2 estarem satisfeitas, sv_3 não está. De fato, tomando $\alpha < 0$

$sv_3.\ \underbrace{\alpha}_{<0}.(\underbrace{a_1}_{\geq 0}, \ldots, a_n) = (\underbrace{\alpha a_1}_{\leq 0}, \ldots, \alpha a_n) \notin W.$

Obs 1: Poderiamos trocar por ≥ 0 em qualquer coordenada. Poderiamos também colocar em duas, três ou mais coordenadas.

Obs 2: Semi-planos, semi-retas, semi-espaços não são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Exemplos

2. $V = \mathbb{R}^n$ com adição e multiplicação por escalar usuais.

$W = \{(a_1, \ldots, a_n),\ a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n, a_1 \geq 0\}$

W não é subespaço vetorial de V, pois apesar de sv_1 e sv_2 estarem satisfeitas, sv_3 não está. De fato, tomando $\alpha < 0$

sv_3. $\underbrace{\alpha}_{<0} . (\underbrace{a_1}_{\geq 0}, \ldots, a_n) = (\underbrace{\alpha a_1}_{\leq 0}, \ldots, \alpha a_n) \notin W$.

Obs 1: Poderiamos trocar por ≥ 0 em qualquer coordenada. Poderiamos também colocar em duas, três ou mais coordenadas.

Obs 2: Semi-planos, semi-retas, semi-espaços não são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Exemplos

2. $V = \mathbb{R}^n$ com adição e multiplicação por escalar usuais.

   $W = \{(a_1, \ldots, a_n),\; a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n, a_1 \geq 0\}$

W não é subespaço vetorial de V, pois apesar de sv_1 e sv_2 estarem satisfeitas, sv_3 não está. De fato, tomando $\alpha < 0$

$$sv_3.\ \underbrace{\alpha}_{<0}.(\underbrace{a_1}_{\geq 0}, \ldots, a_n) = (\underbrace{\alpha a_1}_{\leq 0}, \ldots, \alpha a_n) \notin W.$$

Obs 1: Poderiamos trocar por ≥ 0 em qualquer coordenada. Poderiamos também colocar em duas, três ou mais coordenadas.

Obs 2: Semi-planos, semi-retas, semi-espaços não são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Exemplos

2. $V = \mathbb{R}^n$ com adição e multiplicação por escalar usuais.

   $W = \{(a_1, \ldots, a_n),\ a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n, a_1 \geq 0\}$

W não é subespaço vetorial de V, pois apesar de sv_1 e sv_2 estarem satisfeitas, sv_3 não está. De fato, tomando $\alpha < 0$

$$sv_3.\ \underbrace{\alpha}_{<0}.(\underbrace{a_1}_{\geq 0}, \ldots, a_n) = (\underbrace{\alpha a_1}_{\leq 0}, \ldots, \alpha a_n) \notin W.$$

Obs 1: Poderiamos trocar por ≥ 0 em qualquer coordenada. Poderiamos também colocar em duas, três ou mais coordenadas.

Obs 2: Semi-planos, semi-retas, semi-espaços não são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Exemplos

3. $V = \mathbb{R}^2$ com adição e multiplicação por escalar usuais.

   $W = \{(x, x^2),\ x \in \mathbb{R}\}$ $\leftarrow$ Parábola

sv_1. $W \neq \emptyset$, pois $(0,0) \in W$.

sv_2. W não é fechado para $+$. De fato, tomando $u = (1,1), v = (2,4) \in W$,

$$u + v = (1,1) + (2,4) = (3,5) \notin W.$$

Portanto W não é um subespaço vetorial.

4. $V = M_n(\mathbb{R})$ com adição e multiplicação por escalar usuais.

   $W = \{[a_{ij}],\ a_{ij} \in \mathbb{R}, a_{ij} = 0 \text{ se } i > j\}$ conjunto das matrizes triangulares superiores.

- W é um subespaço vetorial.
- Analogamente, o conjunto das matrizes triangulares inferiores e o conjunto das matrizes diagonais também são subespaços vetoriais de $M_n(\mathbb{R})$.

Exemplos

3. $V = \mathbb{R}^2$ com adição e multiplicação por escalar usuais.

   $W = \{(x, x^2),\ x \in \mathbb{R}\}$ $\leftarrow$ Parábola

sv_1. $W \neq \emptyset$, pois $(0,0) \in W$.

sv_2. W não é fechado para $+$. De fato, tomando $u = (1,1), v = (2,4) \in W$,

$$u + v = (1,1) + (2,4) = (3,5) \notin W.$$

Portanto W não é um subespaço vetorial.

4. $V = M_n(\mathbb{R})$ com adição e multiplicação por escalar usuais.

   $W = \{[a_{ij}],\ a_{ij} \in \mathbb{R}, a_{ij} = 0 \text{ se } i > j\}$ conjunto das matrizes triangulares superiores.

- W é um subespaço vetorial.
- Analogamente, o conjunto das matrizes triangulares inferiores e o conjunto das matrizes diagonais também são subespaços vetoriais de $M_n(\mathbb{R})$.

Exemplos

3. $V = \mathbb{R}^2$ com adição e multiplicação por escalar usuais.

   $W = \{(x, x^2),\ x \in \mathbb{R}\}$ $\leftarrow$ Parábola

sv_1. $W \neq \emptyset$, pois $(0,0) \in W$.

sv_2. W não é fechado para $+$. De fato, tomando $u = (1,1), v = (2,4) \in W$,

$$u + v = (1,1) + (2,4) = (3,5) \notin W.$$

Portanto W não é um subespaço vetorial.

4. $V = M_n(\mathbb{R})$ com adição e multiplicação por escalar usuais.

   $W = \{[a_{ij}],\ a_{ij} \in \mathbb{R}, a_{ij} = 0 \text{ se } i > j\}$ conjunto das matrizes triangulares superiores.

   - W é um subespaço vetorial.
   - Analogamente, o conjunto das matrizes triangulares inferiores e o conjunto das matrizes diagonais também são subespaços vetoriais de $M_n(\mathbb{R})$.

Exemplos

3. $V = \mathbb{R}^2$ com adição e multiplicação por escalar usuais.

   $W = \{(x, x^2),\ x \in \mathbb{R}\}$ $\leftarrow$ Parábola

sv_1. $W \neq \emptyset$, pois $(0,0) \in W$.

sv_2. W não é fechado para $+$. De fato, tomando $u = (1,1), v = (2,4) \in W$,

$$u + v = (1,1) + (2,4) = (3,5) \notin W.$$

Portanto W não é um subespaço vetorial.

4. $V = M_n(\mathbb{R})$ com adição e multiplicação por escalar usuais.

   $W = \{[a_{ij}],\ a_{ij} \in \mathbb{R}, a_{ij} = 0 \text{ se } i > j\}$ conjunto das matrizes triangulares superiores.

- W é um subespaço vetorial.
- Analogamente, o conjunto das matrizes triangulares inferiores e o conjunto das matrizes diagonais também são subespaços vetoriais de $M_n(\mathbb{R})$.

Exemplos

3. $V = \mathbb{R}^2$ com adição e multiplicação por escalar usuais.

   $W = \{(x, x^2),\ x \in \mathbb{R}\}$ $\leftarrow$ Parábola

sv_1. $W \neq \emptyset$, pois $(0,0) \in W$.

sv_2. W não é fechado para $+$. De fato, tomando $u = (1,1), v = (2,4) \in W$,

$$u + v = (1,1) + (2,4) = (3,5) \notin W.$$

Portanto W não é um subespaço vetorial.

4. $V = M_n(\mathbb{R})$ com adição e multiplicação por escalar usuais.

   $W = \{[a_{ij}],\ a_{ij} \in \mathbb{R}, a_{ij} = 0 \text{ se } i > j\}$ conjunto das matrizes triangulares superiores.

- W é um subespaço vetorial.
- Analogamente, o conjunto das matrizes triangulares inferiores e o conjunto das matrizes diagonais também são subespaços vetoriais de $M_n(\mathbb{R})$.

Exemplos

3. $V = \mathbb{R}^2$ com adição e multiplicação por escalar usuais.

   $W = \{(x, x^2),\ x \in \mathbb{R}\}$ $\leftarrow$ Parábola

sv_1. $W \neq \emptyset$, pois $(0,0) \in W$.

sv_2. W não é fechado para $+$. De fato, tomando $u = (1,1), v = (2,4) \in W$,

$$u + v = (1,1) + (2,4) = (3,5) \notin W.$$

Portanto W não é um subespaço vetorial.

4. $V = M_n(\mathbb{R})$ com adição e multiplicação por escalar usuais.

   $W = \{[a_{ij}],\ a_{ij} \in \mathbb{R}, a_{ij} = 0 \text{ se } i > j\}$ conjunto das matrizes triangulares superiores.

   - W é um subespaço vetorial.
   - Analogamente, o conjunto das matrizes triangulares inferiores e o conjunto das matrizes diagonais também são subespaços vetoriais de $M_n(\mathbb{R})$.

Exemplos

3. $V = \mathbb{R}^2$ com adição e multiplicação por escalar usuais.

   $W = \{(x, x^2),\ x \in \mathbb{R}\}$ $\leftarrow$ Parábola

sv_1. $W \neq \emptyset$, pois $(0, 0) \in W$.

sv_2. W não é fechado para $+$. De fato, tomando $u = (1, 1), v = (2, 4) \in W$,

$$u + v = (1, 1) + (2, 4) = (3, 5) \notin W.$$

Portanto W não é um subespaço vetorial.

4. $V = M_n(\mathbb{R})$ com adição e multiplicação por escalar usuais.

   $W = \{[a_{ij}],\ a_{ij} \in \mathbb{R}, a_{ij} = 0 \text{ se } i > j\}$ conjunto das matrizes triangulares superiores.

- W é um subespaço vetorial.
- Analogamente, o conjunto das matrizes triangulares inferiores e o conjunto das matrizes diagonais também são subespaços vetoriais de $M_n(\mathbb{R})$.

Exemplos

3. $V = \mathbb{R}^2$ com adição e multiplicação por escalar usuais.

   $W = \{(x, x^2),\ x \in \mathbb{R}\}$ $\leftarrow$ Parábola

sv_1. $W \neq \emptyset$, pois $(0,0) \in W$.

sv_2. W não é fechado para $+$. De fato, tomando $u = (1,1), v = (2,4) \in W$,

$$u + v = (1,1) + (2,4) = (3,5) \notin W.$$

Portanto W não é um subespaço vetorial.

4. $V = M_n(\mathbb{R})$ com adição e multiplicação por escalar usuais.

   $W = \{[a_{ij}],\ a_{ij} \in \mathbb{R}, a_{ij} = 0 \text{ se } i > j\}$ conjunto das matrizes triangulares superiores.

- W é um subespaço vetorial.
- Analogamente, o conjunto das matrizes triangulares inferiores e o conjunto das matrizes diagonais também são subespaços vetoriais de $M_n(\mathbb{R})$.

Propriedades

1. Todo subespaço vetorial W de um espaço V contém o elemento neutro de V. De fato, tomando $\alpha = 0$ em sv_3 obtemos que $0 \in W$.

2. $\{0\}$ e V são sempre subespaços vetoriais de V. Esses dois subespaços são chamados subespaços triviais de V.

Exercício: Seja V um espaço vetorial e $u \in V$. Mostre que $W = \{\alpha.u, \alpha \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço vetorial de V.

Propriedades

1. Todo subespaço vetorial W de um espaço V contém o elemento neutro de V. De fato, tomando $\alpha = 0$ em sv_3 obtemos que $0 \in W$.
2. $\{0\}$ e V são sempre subespaços vetoriais de V. Esses dois subespaços são chamados subespaços triviais de V.

Exercício: Seja V um espaço vetorial e $u \in V$. Mostre que $W = \{\alpha.u, \alpha \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço vetorial de V.

Propriedades

1. Todo subespaço vetorial W de um espaço V contém o elemento neutro de V. De fato, tomando $\alpha = 0$ em sv_3 obtemos que $0 \in W$.

2. $\{0\}$ e V são sempre subespaços vetoriais de V. Esses dois subespaços são chamados subespaços triviais de V.

Exercício: Seja V um espaço vetorial e $u \in V$. Mostre que $W = \{\alpha.u, \alpha \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço vetorial de V.

Exemplos

1. $V = \mathbb{R}^n$ com adição e multiplicação por escalar usuais.

   Seja $W \subset \mathbb{R}^n$ o conjunto das soluções do sistema linear homogêneo S.

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

sv_1. $W \neq \emptyset$, pois $(0, 0, \ldots, 0) \in W$.

sv_2. W é fechado para $+$: Sejam $u = (x_1, \ldots, x_n), v = (y_1, \ldots, y_n) \in W$. Quero mostrar que $u + v = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \in W$. Para cada $i = 1, \ldots, m$

$$a_{i1}(x_1 + y_1) + \cdots + a_{in}(x_n + y_n) =$$

$$\underbrace{a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n}_{=0,\text{ pois } u \in W} + \underbrace{a_{i1}y_1 + \cdots + a_{in}y_n}_{=0,\text{ pois } v \in W} = 0 + 0 = 0.$$

Exemplos

1. $V = \mathbb{R}^n$ com adição e multiplicação por escalar usuais.

   Seja $W \subset \mathbb{R}^n$ o conjunto das soluções do sistema linear homogêneo S.

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

sv_1. $W \neq \emptyset$, pois $(0, 0, \ldots, 0) \in W$.

sv_2. W é fechado para $+$: Sejam $u = (x_1, \ldots, x_n), v = (y_1, \ldots, y_n) \in W$. Quero mostrar que $u + v = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \in W$. Para cada $i = 1, \ldots, m$

$$a_{i1}(x_1 + y_1) + \cdots + a_{in}(x_n + y_n) =$$

$$\underbrace{a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n}_{=0,\text{ pois } u \in W} + \underbrace{a_{i1}y_1 + \cdots + a_{in}y_n}_{=0,\text{ pois } v \in W} = 0 + 0 = 0.$$

Exemplos

1. $V = \mathbb{R}^n$ com adição e multiplicação por escalar usuais.

   Seja $W \subset \mathbb{R}^n$ o conjunto das soluções do sistema linear homogêneo S.

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

sv_1. $W \neq \emptyset$, pois $(0, 0, \ldots, 0) \in W$.

sv_2. W é fechado para $+$: Sejam $u = (x_1, \ldots, x_n), v = (y_1, \ldots, y_n) \in W$. Quero mostrar que $u + v = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \in W$. Para cada $i = 1, \ldots, m$

$a_{i1}(x_1 + y_1) + \cdots + a_{in}(x_n + y_n) =$

$\underbrace{a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n}_{=0, \text{ pois } u \in W} + \underbrace{a_{i1}y_1 + \cdots + a_{in}y_n}_{=0, \text{ pois } v \in W} = 0 + 0 = 0.$

Exemplos

1. $V = \mathbb{R}^n$ com adição e multiplicação por escalar usuais.

   Seja $W \subset \mathbb{R}^n$ o conjunto das soluções do sistema linear homogêneo S.

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

sv_1. $W \neq \emptyset$, pois $(0, 0, \ldots, 0) \in W$.

sv_2. W é fechado para $+$: Sejam $u = (x_1, \ldots, x_n), v = (y_1, \ldots, y_n) \in W$. Quero mostrar que $u + v = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \in W$. Para cada $i = 1, \ldots, m$

$$a_{i1}(x_1 + y_1) + \cdots + a_{in}(x_n + y_n) =$$

$$\underbrace{a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n}_{=0,\text{ pois } u \in W} + \underbrace{a_{i1}y_1 + \cdots + a_{in}y_n}_{=0,\text{ pois } v \in W} = 0 + 0 = 0.$$

Exemplos

1. $V = \mathbb{R}^n$ com adição e multiplicação por escalar usuais.

   Seja $W \subset \mathbb{R}^n$ o conjunto das soluções do sistema linear homogêneo S.

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

sv_1. $W \neq \emptyset$, pois $(0, 0, \ldots, 0) \in W$.

sv_2. W é fechado para $+$: Sejam $u = (x_1, \ldots, x_n), v = (y_1, \ldots, y_n) \in W$. Quero mostrar que $u + v = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \in W$. Para cada $i = 1, \ldots, m$

$a_{i1}(x_1 + y_1) + \cdots + a_{in}(x_n + y_n) =$

$\underbrace{a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n}_{=0,\text{ pois } u \in W} + \underbrace{a_{i1}y_1 + \cdots + a_{in}y_n}_{=0,\text{ pois } v \in W} = 0 + 0 = 0.$

Exemplos

1. $V = \mathbb{R}^n$ com adição e multiplicação por escalar usuais.

   Seja $W \subset \mathbb{R}^n$ o conjunto das soluções do sistema linear homogêneo S.

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

sv_1. $W \neq \emptyset$, pois $(0, 0, \ldots, 0) \in W$.

sv_2. W é fechado para $+$: Sejam $u = (x_1, \ldots, x_n), v = (y_1, \ldots, y_n) \in W$. Quero mostrar que $u + v = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \in W$. Para cada $i = 1, \ldots, m$

$$a_{i1}(x_1 + y_1) + \cdots + a_{in}(x_n + y_n) =$$

$$\underbrace{a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n}_{=0,\text{ pois } u \in W} + \underbrace{a_{i1}y_1 + \cdots + a_{in}y_n}_{=0,\text{ pois } v \in W} = 0 + 0 = 0.$$

Exemplo

sv_3. W é fechado para .: Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u = (x_1, \ldots, x_n) \in W$. Quero mostrar que $\alpha.u = (\alpha.x_1, \ldots, \alpha.x_n) \in W$. Para cada $i = 1, \ldots, m$

$$a_{i1}(\alpha.x_1) + \cdots + a_{in}(\alpha.x_n) = \alpha.\underbrace{(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n)}_{=0,\text{ pois } u \in W} = \alpha.0 = 0.$$

Portanto W é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

O conjunto das soluções de um sistema linear homogêneo é um espaço vetorial.

Pergunta: E se S não fosse homogêneo?

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Exemplo

sv_3. W é fechado para .: Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u = (x_1, \dots, x_n) \in W$. Quero mostrar que $\alpha.u = (\alpha.x_1, \dots, \alpha.x_n) \in W$. Para cada $i = 1, \dots, m$

$$a_{i1}(\alpha.x_1) + \cdots + a_{in}(\alpha.x_n) = \alpha.\underbrace{(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n)}_{=0, \text{ pois } u \in W} = \alpha.0 = 0.$$

Portanto W é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

O conjunto das soluções de um sistema linear homogêneo é um espaço vetorial.

Pergunta: E se S não fosse homogêneo?

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Exemplo

sv_3. W é fechado para .: Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u = (x_1, \ldots, x_n) \in W$. Quero mostrar que $\alpha.u = (\alpha.x_1, \ldots, \alpha.x_n) \in W$. Para cada $i = 1, \ldots, m$

$$a_{i1}(\alpha.x_1) + \cdots + a_{in}(\alpha.x_n) = \alpha.\underbrace{(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n)}_{=0, \text{ pois } u \in W} = \alpha.0 = 0.$$

Portanto W é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

O conjunto das soluções de um sistema linear homogêneo é um espaço vetorial.

Pergunta: E se S não fosse homogêneo?

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Exemplo

sv_3. W é fechado para .: Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u = (x_1, \ldots, x_n) \in W$. Quero mostrar que $\alpha.u = (\alpha.x_1, \ldots, \alpha.x_n) \in W$. Para cada $i = 1, \ldots, m$

$$a_{i1}(\alpha.x_1) + \cdots + a_{in}(\alpha.x_n) = \alpha.\underbrace{(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n)}_{=0, \text{ pois } u \in W} = \alpha.0 = 0.$$

Portanto W é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

O conjunto das soluções de um sistema linear homogêneo é um espaço vetorial.

Pergunta: E se S não fosse homogêneo?

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Exemplo

sv_3. W é fechado para .: Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u = (x_1, \ldots, x_n) \in W$. Quero mostrar que $\alpha.u = (\alpha.x_1, \ldots, \alpha.x_n) \in W$. Para cada $i = 1, \ldots, m$

$$a_{i1}(\alpha.x_1) + \cdots + a_{in}(\alpha.x_n) = \alpha.(\underbrace{a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n}_{=0,\text{ pois } u \in W}) = \alpha.0 = 0.$$

Portanto W é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

O conjunto das soluções de um sistema linear homogêneo é um espaço vetorial.

Pergunta: E se S não fosse homogêneo?

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Exemplo

sv_3. W é fechado para .: Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u = (x_1, \ldots, x_n) \in W$. Quero mostrar que $\alpha.u = (\alpha.x_1, \ldots, \alpha.x_n) \in W$. Para cada $i = 1, \ldots, m$

$$a_{i1}(\alpha.x_1) + \cdots + a_{in}(\alpha.x_n) = \alpha.(\underbrace{a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n}_{=0,\text{ pois } u \in W}) = \alpha.0 = 0.$$

Portanto W é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

O conjunto das soluções de um sistema linear homogêneo é um espaço vetorial.

Pergunta: E se S não fosse homogêneo?

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Espaço dos Polinônios

Uma função $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em $F(\mathbb{R})$ que pode ser escrita na forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

onde $a_i \in \mathbb{R}$ para $i = 0, \ldots, n$ e $a_n \neq 0$ é chamada **polinômio de grau** n com coeficientes em $\mathbb{R}$.

Notação: O conjunto de todos os polinômios com coeficientes em $\mathbb{R}$ é denotado por $P(\mathbb{R})$. Denotamos por $P_n(\mathbb{R})$ conjunto de todos os polinômios com coeficientes em $\mathbb{R}$ de grau $\leq n$.

Exemplo: $p(x) = x^4 + 4x + 2$

é um polinômio de grau 4.

Espaço dos Polinônios

Uma função $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em $F(\mathbb{R})$ que pode ser escrita na forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

onde $a_i \in \mathbb{R}$ para $i = 0, \dots, n$ e $a_n \neq 0$ é chamada **polinômio de grau** n com coeficientes em $\mathbb{R}$.

Notação: O conjunto de todos os polinômios com coeficientes em $\mathbb{R}$ é denotado por $P(\mathbb{R})$. Denotamos por $P_n(\mathbb{R})$ conjunto de todos os polinômios com coeficientes em $\mathbb{R}$ de grau $\leq n$.

Exemplo: $p(x) = x^4 + 4x + 2$

é um polinômio de grau 4.

Espaço dos Polinônios

Uma função $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em $F(\mathbb{R})$ que pode ser escrita na forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

onde $a_i \in \mathbb{R}$ para $i = 0, \ldots, n$ e $a_n \neq 0$ é chamada **polinômio de grau** n com coeficientes em $\mathbb{R}$.

Notação: O conjunto de todos os polinômios com coeficientes em $\mathbb{R}$ é denotado por $P(\mathbb{R})$. Denotamos por $P_n(\mathbb{R})$ conjunto de todos os polinômios com coeficientes em $\mathbb{R}$ de grau $\leq n$.

Exemplo: $p(x) = x^4 + 4x + 2$

é um polinômio de grau 4.

Espaço dos Polinônios

$P_n(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial.

Vamos mostrar que $P_n(\mathbb{R})$ é um subespaço vetorial de $F(\mathbb{R})$.

sv_1. $P_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, pois a função nula é um polinômio de grau 0.

sv_2. $P_n(\mathbb{R})$ é fechado para $+$: Sejam $p(x)$ um polinômio de grau r e $q(x)$ um polinômio de grau m. Se $m \leq r$

$$p(x) = a_r x^r + \cdots + a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$$
$$q(x) = 0x^r + \cdots + b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$$

$$(p+q)(x) = p(x) + q(x) =$$
$$= a_r x^r + \cdots + (a_m + b_m)x^m + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

Logo $p + q \in P_n(\mathbb{R})$.

Espaço dos Polinônios

$P_n(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial.

Vamos mostrar que $P_n(\mathbb{R})$ é um subespaço vetorial de $F(\mathbb{R})$.

sv_1. $P_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, pois a função nula é um polinômio de grau 0.

sv_2. $P_n(\mathbb{R})$ é fechado para $+$: Sejam $p(x)$ um polinômio de grau r e $q(x)$ um polinômio de grau m. Se $m \leq r$

$$p(x) = a_r x^r + \cdots + a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$$
$$q(x) = 0x^r + \cdots + b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$$

$$(p+q)(x) = p(x) + q(x) =$$
$$= a_r x^r + \cdots + (a_m + b_m)x^m + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

Logo $p + q \in P_n(\mathbb{R})$.

Espaço dos Polinônios

$P_n(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial.

Vamos mostrar que $P_n(\mathbb{R})$ é um subespaço vetorial de $F(\mathbb{R})$.

sv_1. $P_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, pois a função nula é um polinômio de grau 0.

sv_2. $P_n(\mathbb{R})$ é fechado para $+$: Sejam $p(x)$ um polinômio de grau r e $q(x)$ um polinômio de grau m. Se $m \leq r$

$$p(x) = a_r x^r + \cdots + a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$$
$$q(x) = 0x^r + \cdots + b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$$

$$(p+q)(x) = p(x) + q(x) =$$
$$= a_r x^r + \cdots + (a_m + b_m)x^m + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

Logo $p + q \in P_n(\mathbb{R})$.

Espaço dos Polinônios

$P_n(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial.

Vamos mostrar que $P_n(\mathbb{R})$ é um subespaço vetorial de $F(\mathbb{R})$.

sv_1. $P_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, pois a função nula é um polinômio de grau 0.

sv_2. $P_n(\mathbb{R})$ é fechado para $+$: Sejam $p(x)$ um polinômio de grau r e $q(x)$ um polinômio de grau m. Se $m \leq r$

$$p(x) = a_r x^r + \cdots + a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$$
$$q(x) = 0x^r + \cdots + b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$$

$$(p+q)(x) = p(x) + q(x) =$$
$$= a_r x^r + \cdots + (a_m + b_m)x^m + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

Logo $p + q \in P_n(\mathbb{R})$.

Espaço dos Polinônios

$P_n(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial.

Vamos mostrar que $P_n(\mathbb{R})$ é um subespaço vetorial de $F(\mathbb{R})$.

sv_1. $P_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, pois a função nula é um polinômio de grau 0.

sv_2. $P_n(\mathbb{R})$ é fechado para $+$: Sejam $p(x)$ um polinômio de grau r e $q(x)$ um polinômio de grau m. Se $m \leq r$

$$p(x) = a_r x^r + \cdots + a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$$
$$q(x) = 0x^r + \cdots + b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$$

$$(p+q)(x) = p(x) + q(x) =$$
$$= a_r x^r + \cdots + (a_m + b_m)x^m + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

Logo $p + q \in P_n(\mathbb{R})$.

Espaço dos Polinônios

$P_n(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial.

Vamos mostrar que $P_n(\mathbb{R})$ é um subespaço vetorial de $F(\mathbb{R})$.

sv_1. $P_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, pois a função nula é um polinômio de grau 0.

sv_2. $P_n(\mathbb{R})$ é fechado para $+$: Sejam $p(x)$ um polinômio de grau r e $q(x)$ um polinômio de grau m. Se $m \leq r$

$$p(x) = a_r x^r + \cdots + a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$$
$$q(x) = 0x^r + \cdots + b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$$

$$(p+q)(x) = p(x) + q(x) =$$
$$= a_r x^r + \cdots + (a_m + b_m)x^m + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

Logo $p + q \in P_n(\mathbb{R})$.

Espaço dos Polinônios

sv_3. $P_n(\mathbb{R})$ é fechado para .:

Sejam $p(x)$ um polinômio de grau r e $\alpha \in \mathbb{R}$.

$p(x) = a_r x^r + \cdots + a_1 x + a_0$

$(\alpha.p)(x) = \alpha.p(x) = (\alpha.a_r)x^r + \cdots + (\alpha.a_1)x + (\alpha.a_0)$

Logo $\alpha.p \in P_n(\mathbb{R})$. $\square$

Obs: É claro que a soma de dois polinômios é um polinômio e a multiplicação por escalar de um polinômio é um polinômio. Logo $P(\mathbb{R})$ é um subespaço de $F(\mathbb{R})$.

$P(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial

Espaço dos Polinônios

sv_3. $P_n(\mathbb{R})$ é fechado para .:

Sejam $p(x)$ um polinômio de grau r e $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$p(x) = a_r x^r + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$(\alpha.p)(x) = \alpha.p(x) = (\alpha.a_r)x^r + \cdots + (\alpha.a_1)x + (\alpha.a_0)$$

Logo $\alpha.p \in P_n(\mathbb{R})$. □

Obs: É claro que a soma de dois polinômios é um polinômio e a multiplicação por escalar de um polinômio é um polinômio. Logo $P(\mathbb{R})$ é um subespaço de $F(\mathbb{R})$.

$P(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial

Espaço dos Polinônios

sv_3. $P_n(\mathbb{R})$ é fechado para .:

Sejam $p(x)$ um polinômio de grau r e $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$p(x) = a_r x^r + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$(\alpha.p)(x) = \alpha.p(x) = (\alpha.a_r)x^r + \cdots + (\alpha.a_1)x + (\alpha.a_0)$$

Logo $\alpha.p \in P_n(\mathbb{R})$. □

Obs: É claro que a soma de dois polinômios é um polinômio e a multiplicação por escalar de um polinômio é um polinômio. Logo $P(\mathbb{R})$ é um subespaço de $F(\mathbb{R})$.

$P(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial

Espaço dos Polinônios

sv_3. $P_n(\mathbb{R})$ é fechado para .:

Sejam $p(x)$ um polinômio de grau r e $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$p(x) = a_r x^r + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$(\alpha.p)(x) = \alpha.p(x) = (\alpha.a_r)x^r + \cdots + (\alpha.a_1)x + (\alpha.a_0)$$

Logo $\alpha.p \in P_n(\mathbb{R})$. $\square$

Obs: É claro que a soma de dois polinômios é um polinômio e a multiplicação por escalar de um polinômio é um polinômio. Logo $P(\mathbb{R})$ é um subespaço de $F(\mathbb{R})$.

$P(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial

Espaço dos Polinônios

sv_3. $P_n(\mathbb{R})$ é fechado para .:

Sejam $p(x)$ um polinômio de grau r e $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$p(x) = a_r x^r + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$(\alpha.p)(x) = \alpha.p(x) = (\alpha.a_r)x^r + \cdots + (\alpha.a_1)x + (\alpha.a_0)$$

Logo $\alpha.p \in P_n(\mathbb{R})$. □

Obs: É claro que a soma de dois polinômios é um polinômio e a multiplicação por escalar de um polinômio é um polinômio. Logo $P(\mathbb{R})$ é um subespaço de $F(\mathbb{R})$.

$P(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial

Espaço dos Polinônios

sv_3. $P_n(\mathbb{R})$ é fechado para .:

Sejam $p(x)$ um polinômio de grau r e $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$p(x) = a_r x^r + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$(\alpha.p)(x) = \alpha.p(x) = (\alpha.a_r)x^r + \cdots + (\alpha.a_1)x + (\alpha.a_0)$$

Logo $\alpha.p \in P_n(\mathbb{R})$. $\square$

Obs: É claro que a soma de dois polinômios é um polinômio e a multiplicação por escalar de um polinômio é um polinômio. Logo $P(\mathbb{R})$ é um subespaço de $F(\mathbb{R})$.

$P(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial

Intersecção de Subespaços Vetoriais

Sejam V um espaço vetorial e W_1, W_2 dois subespaços de V.

$$W_1 \cap W_2 = \{u \in V \mid u \in W_1 \text{ e } u \in W_2\}$$

Teorema: $W_1 \cap W_2$ é um subespaço de V.

Prova:

sv_1. $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$. De fato, como $0 \in W_1$ e $0 \in W_2$, então $0 \in W_1 \cap W_2$.

sv_2. $W_1 \cap W_2$ é fechado para $+$. Sejam $u, v \in W_1 \cap W_2$.

Como $u, v \in W_1$, e W_1 é subespaço vetorial, então $u + v \in W_1$.

Como $u, v \in W_2$, e W_2 é subespaço vetorial, então $u + v \in W_2$.

Portanto $u + v \in W_1 \cap W_2$.

sv_3. $W_1 \cap W_2$ é fechado para $.$. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in W_1 \cap W_2$.

Como $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in W_1$, e W_1 é subespaço vetorial, então $\alpha.u \in W_1$.

Como $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in W_2$, e W_2 é subespaço vetorial, então $\alpha.u \in W_2$.

Portanto $\alpha.u \in W_1 \cap W_2$.

Intersecção de Subespaços Vetoriais

Sejam V um espaço vetorial e W_1, W_2 dois subespaços de V.

$$W_1 \cap W_2 = \{u \in V \mid u \in W_1 \text{ e } u \in W_2\}$$

Teorema: $W_1 \cap W_2$ é um subespaço de V.

Prova:

sv_1. $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$. De fato, como $0 \in W_1$ e $0 \in W_2$, então $0 \in W_1 \cap W_2$.

sv_2. $W_1 \cap W_2$ é fechado para $+$. Sejam $u, v \in W_1 \cap W_2$.

Como $u, v \in W_1$, e W_1 é subespaço vetorial, então $u + v \in W_1$.

Como $u, v \in W_2$, e W_2 é subespaço vetorial, então $u + v \in W_2$.

Portanto $u + v \in W_1 \cap W_2$.

sv_3. $W_1 \cap W_2$ é fechado para $.$. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in W_1 \cap W_2$.

Como $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in W_1$, e W_1 é subespaço vetorial, então $\alpha.u \in W_1$.

Como $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in W_2$, e W_2 é subespaço vetorial, então $\alpha.u \in W_2$.

Portanto $\alpha.u \in W_1 \cap W_2$.

Intersecção de Subespaços Vetoriais

Sejam V um espaço vetorial e W_1, W_2 dois subespaços de V.

$$W_1 \cap W_2 = \{u \in V \mid u \in W_1 \text{ e } u \in W_2\}$$

Teorema: $W_1 \cap W_2$ é um subespaço de V.

Prova:

sv_1. $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$. De fato, como $0 \in W_1$ e $0 \in W_2$, então $0 \in W_1 \cap W_2$.

sv_2. $W_1 \cap W_2$ é fechado para $+$. Sejam $u, v \in W_1 \cap W_2$.

Como $u, v \in W_1$, e W_1 é subespaço vetorial, então $u + v \in W_1$.

Como $u, v \in W_2$, e W_2 é subespaço vetorial, então $u + v \in W_2$.

Portanto $u + v \in W_1 \cap W_2$.

sv_3. $W_1 \cap W_2$ é fechado para $.$. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in W_1 \cap W_2$.

Como $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in W_1$, e W_1 é subespaço vetorial, então $\alpha.u \in W_1$.

Como $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in W_2$, e W_2 é subespaço vetorial, então $\alpha.u \in W_2$.

Portanto $\alpha.u \in W_1 \cap W_2$.

Intersecção de Subespaços Vetoriais

Sejam V um espaço vetorial e W_1, W_2 dois subespaços de V.

$$W_1 \cap W_2 = \{u \in V \mid u \in W_1 \text{ e } u \in W_2\}$$

Teorema: $W_1 \cap W_2$ é um subespaço de V.

Prova:

sv_1. $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$. De fato, como $0 \in W_1$ e $0 \in W_2$, então $0 \in W_1 \cap W_2$.

sv_2. $W_1 \cap W_2$ é fechado para $+$. Sejam $u, v \in W_1 \cap W_2$.

Como $u, v \in W_1$, e W_1 é subespaço vetorial, então $u + v \in W_1$.

Como $u, v \in W_2$, e W_2 é subespaço vetorial, então $u + v \in W_2$.

Portanto $u + v \in W_1 \cap W_2$.

sv_3. $W_1 \cap W_2$ é fechado para $\cdot$. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in W_1 \cap W_2$.

Como $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in W_1$, e W_1 é subespaço vetorial, então $\alpha . u \in W_1$.

Como $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in W_2$, e W_2 é subespaço vetorial, então $\alpha . u \in W_2$.

Portanto $\alpha . u \in W_1 \cap W_2$.

Intersecção de Subespaços Vetoriais

Sejam V um espaço vetorial e W_1, W_2 dois subespaços de V.

$$W_1 \cap W_2 = \{u \in V \mid u \in W_1 \text{ e } u \in W_2\}$$

Teorema: $W_1 \cap W_2$ é um subespaço de V.

Prova:

sv_1. $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$. De fato, como $0 \in W_1$ e $0 \in W_2$, então $0 \in W_1 \cap W_2$.

sv_2. $W_1 \cap W_2$ é fechado para $+$. Sejam $u, v \in W_1 \cap W_2$.

Como $u, v \in W_1$, e W_1 é subespaço vetorial, então $u + v \in W_1$.

Como $u, v \in W_2$, e W_2 é subespaço vetorial, então $u + v \in W_2$.

Portanto $u + v \in W_1 \cap W_2$.

sv_3. $W_1 \cap W_2$ é fechado para $\cdot$. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in W_1 \cap W_2$.

Como $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in W_1$, e W_1 é subespaço vetorial, então $\alpha.u \in W_1$.

Como $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in W_2$, e W_2 é subespaço vetorial, então $\alpha.u \in W_2$.

Portanto $\alpha.u \in W_1 \cap W_2$.

Intersecção de Subespaços Vetoriais

Sejam V um espaço vetorial e W_1, W_2 dois subespaços de V.

$$W_1 \cap W_2 = \{u \in V \mid u \in W_1 \text{ e } u \in W_2\}$$

Teorema: $W_1 \cap W_2$ é um subespaço de V.

Prova:

sv_1. $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$. De fato, como $0 \in W_1$ e $0 \in W_2$, então $0 \in W_1 \cap W_2$.

sv_2. $W_1 \cap W_2$ é fechado para $+$. Sejam $u, v \in W_1 \cap W_2$.

Como $u, v \in W_1$, e W_1 é subespaço vetorial, então $u + v \in W_1$.

Como $u, v \in W_2$, e W_2 é subespaço vetorial, então $u + v \in W_2$.

Portanto $u + v \in W_1 \cap W_2$.

sv_3. $W_1 \cap W_2$ é fechado para $\cdot$. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in W_1 \cap W_2$.

Como $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in W_1$, e W_1 é subespaço vetorial, então $\alpha.u \in W_1$.

Como $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in W_2$, e W_2 é subespaço vetorial, então $\alpha.u \in W_2$.

Portanto $\alpha.u \in W_1 \cap W_2$.

Intersecção de Subespaços Vetoriais

Sejam V um espaço vetorial e W_1, W_2 dois subespaços de V.

$$W_1 \cap W_2 = \{u \in V \mid u \in W_1 \text{ e } u \in W_2\}$$

Teorema: $W_1 \cap W_2$ é um subespaço de V.

Prova:

sv_1. $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$. De fato, como $0 \in W_1$ e $0 \in W_2$, então $0 \in W_1 \cap W_2$.

sv_2. $W_1 \cap W_2$ é fechado para $+$. Sejam $u, v \in W_1 \cap W_2$.

Como $u, v \in W_1$, e W_1 é subespaço vetorial, então $u + v \in W_1$.

Como $u, v \in W_2$, e W_2 é subespaço vetorial, então $u + v \in W_2$.

Portanto $u + v \in W_1 \cap W_2$.

sv_3. $W_1 \cap W_2$ é fechado para $\cdot$. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in W_1 \cap W_2$.

Como $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in W_1$, e W_1 é subespaço vetorial, então $\alpha . u \in W_1$.

Como $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in W_2$, e W_2 é subespaço vetorial, então $\alpha . u \in W_2$.

Portanto $\alpha . u \in W_1 \cap W_2$.

Intersecção de Subespaços Vetoriais

Sejam V um espaço vetorial e W_1, W_2 dois subespaços de V.

$$W_1 \cap W_2 = \{u \in V \mid u \in W_1 \text{ e } u \in W_2\}$$

Teorema: $W_1 \cap W_2$ é um subespaço de V.

Prova:

sv_1. $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$. De fato, como $0 \in W_1$ e $0 \in W_2$, então $0 \in W_1 \cap W_2$.

sv_2. $W_1 \cap W_2$ é fechado para $+$. Sejam $u, v \in W_1 \cap W_2$.

Como $u, v \in W_1$, e W_1 é subespaço vetorial, então $u + v \in W_1$.

Como $u, v \in W_2$, e W_2 é subespaço vetorial, então $u + v \in W_2$.

Portanto $u + v \in W_1 \cap W_2$.

sv_3. $W_1 \cap W_2$ é fechado para .. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in W_1 \cap W_2$.

Como $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in W_1$, e W_1 é subespaço vetorial, então $\alpha . u \in W_1$.

Como $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in W_2$, e W_2 é subespaço vetorial, então $\alpha . u \in W_2$.

Portanto $\alpha . u \in W_1 \cap W_2$.

Intersecção de Subespaços Vetoriais

Sejam V um espaço vetorial e W_1, W_2 dois subespaços de V.

$$W_1 \cap W_2 = \{u \in V \mid u \in W_1 \text{ e } u \in W_2\}$$

Teorema: $W_1 \cap W_2$ é um subespaço de V.

Prova:

sv_1. $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$. De fato, como $0 \in W_1$ e $0 \in W_2$, então $0 \in W_1 \cap W_2$.

sv_2. $W_1 \cap W_2$ é fechado para $+$. Sejam $u, v \in W_1 \cap W_2$.

Como $u, v \in W_1$, e W_1 é subespaço vetorial, então $u + v \in W_1$.

Como $u, v \in W_2$, e W_2 é subespaço vetorial, então $u + v \in W_2$.

Portanto $u + v \in W_1 \cap W_2$.

sv_3. $W_1 \cap W_2$ é fechado para .. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in W_1 \cap W_2$.

Como $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in W_1$, e W_1 é subespaço vetorial, então $\alpha.u \in W_1$.

Como $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in W_2$, e W_2 é subespaço vetorial, então $\alpha.u \in W_2$.

Portanto $\alpha.u \in W_1 \cap W_2$.

Intersecção de Subespaços Vetoriais

Sejam V um espaço vetorial e W_1, W_2 dois subespaços de V.

$$W_1 \cap W_2 = \{u \in V \mid u \in W_1 \text{ e } u \in W_2\}$$

Teorema: $W_1 \cap W_2$ é um subespaço de V.

Prova:

sv_1. $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$. De fato, como $0 \in W_1$ e $0 \in W_2$, então $0 \in W_1 \cap W_2$.

sv_2. $W_1 \cap W_2$ é fechado para $+$. Sejam $u, v \in W_1 \cap W_2$.

Como $u, v \in W_1$, e W_1 é subespaço vetorial, então $u + v \in W_1$.

Como $u, v \in W_2$, e W_2 é subespaço vetorial, então $u + v \in W_2$.

Portanto $u + v \in W_1 \cap W_2$.

sv_3. $W_1 \cap W_2$ é fechado para .. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in W_1 \cap W_2$.

Como $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in W_1$, e W_1 é subespaço vetorial, então $\alpha.u \in W_1$.

Como $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in W_2$, e W_2 é subespaço vetorial, então $\alpha.u \in W_2$.

Portanto $\alpha.u \in W_1 \cap W_2$.

Intersecção de Subespaços Vetoriais

Sejam V um espaço vetorial e W_1, W_2 dois subespaços de V.

$$W_1 \cap W_2 = \{u \in V \mid u \in W_1 \text{ e } u \in W_2\}$$

Teorema: $W_1 \cap W_2$ é um subespaço de V.

Prova:

sv_1. $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$. De fato, como $0 \in W_1$ e $0 \in W_2$, então $0 \in W_1 \cap W_2$.

sv_2. $W_1 \cap W_2$ é fechado para $+$. Sejam $u, v \in W_1 \cap W_2$.

Como $u, v \in W_1$, e W_1 é subespaço vetorial, então $u + v \in W_1$.

Como $u, v \in W_2$, e W_2 é subespaço vetorial, então $u + v \in W_2$.

Portanto $u + v \in W_1 \cap W_2$.

sv_3. $W_1 \cap W_2$ é fechado para .. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in W_1 \cap W_2$.

Como $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in W_1$, e W_1 é subespaço vetorial, então $\alpha.u \in W_1$.

Como $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in W_2$, e W_2 é subespaço vetorial, então $\alpha.u \in W_2$.

Portanto $\alpha.u \in W_1 \cap W_2$.

Intersecção de Subespaços Vetoriais

Sejam V um espaço vetorial e W_1, W_2 dois subespaços de V.

$$W_1 \cap W_2 = \{u \in V \mid u \in W_1 \text{ e } u \in W_2\}$$

Teorema: $W_1 \cap W_2$ é um subespaço de V.

Prova:

sv_1. $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$. De fato, como $0 \in W_1$ e $0 \in W_2$, então $0 \in W_1 \cap W_2$.

sv_2. $W_1 \cap W_2$ é fechado para $+$. Sejam $u, v \in W_1 \cap W_2$.

Como $u, v \in W_1$, e W_1 é subespaço vetorial, então $u + v \in W_1$.

Como $u, v \in W_2$, e W_2 é subespaço vetorial, então $u + v \in W_2$.

Portanto $u + v \in W_1 \cap W_2$.

sv_3. $W_1 \cap W_2$ é fechado para .. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in W_1 \cap W_2$.

Como $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in W_1$, e W_1 é subespaço vetorial, então $\alpha.u \in W_1$.

Como $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in W_2$, e W_2 é subespaço vetorial, então $\alpha.u \in W_2$.

Portanto $\alpha.u \in W_1 \cap W_2$.

Intersecção de Subespaços Vetoriais

Sejam V um espaço vetorial e W_1, W_2 dois subespaços de V.

$$W_1 \cap W_2 = \{u \in V \mid u \in W_1 \text{ e } u \in W_2\}$$

Teorema: $W_1 \cap W_2$ é um subespaço de V.

Prova:

sv_1. $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$. De fato, como $0 \in W_1$ e $0 \in W_2$, então $0 \in W_1 \cap W_2$.

sv_2. $W_1 \cap W_2$ é fechado para $+$. Sejam $u, v \in W_1 \cap W_2$.

Como $u, v \in W_1$, e W_1 é subespaço vetorial, então $u + v \in W_1$.

Como $u, v \in W_2$, e W_2 é subespaço vetorial, então $u + v \in W_2$.

Portanto $u + v \in W_1 \cap W_2$.

sv_3. $W_1 \cap W_2$ é fechado para .. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in W_1 \cap W_2$.

Como $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in W_1$, e W_1 é subespaço vetorial, então $\alpha . u \in W_1$.

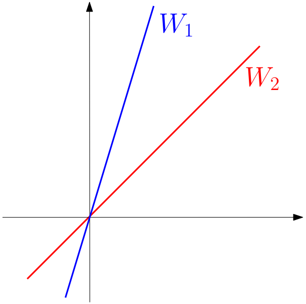
Como $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in W_2$, e W_2 é subespaço vetorial, então $\alpha . u \in W_2$.

Portanto $\alpha . u \in W_1 \cap W_2$.

Exemplo

1. Sejam $V = \mathbb{R}^2$, W_1, W_2 duas retas passando pela origem.

   - Se $W_1 = W_2$, então $W_1 \cap W_2 = W_1$.
   - Se $W_1 \neq W_2$, então $W_1 \cap W_2 = \{(0,0)\}$.

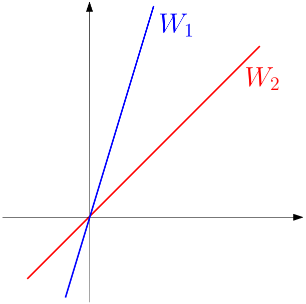


2. Sejam $V = M_n(\mathbb{R})$,
   W_1 o conjunto das matrizes triangulates superiores e
   W_2 o conjunto das matrizes triangulates inferiores.
   Então $W_1 \cap W_2$ é o conjunto das matrizes diagonais.

Exemplo

1. Sejam $V = \mathbb{R}^2$, W_1, W_2 duas retas passando pela origem.

   - Se $W_1 = W_2$, então $W_1 \cap W_2 = W_1$.
   - Se $W_1 \neq W_2$, então $W_1 \cap W_2 = \{(0,0)\}$.

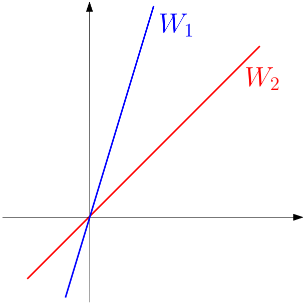


2. Sejam $V = M_n(\mathbb{R})$,
   W_1 o conjunto das matrizes triangulates superiores e
   W_2 o conjunto das matrizes triangulates inferiores.
   Então $W_1 \cap W_2$ é o conjunto das matrizes diagonais.

Exemplo

1. Sejam $V = \mathbb{R}^2$, W_1, W_2 duas retas passando pela origem.

   - Se $W_1 = W_2$, então $W_1 \cap W_2 = W_1$.
   - Se $W_1 \neq W_2$, então $W_1 \cap W_2 = \{(0,0)\}$.



2. Sejam $V = M_n(\mathbb{R})$,
   W_1 o conjunto das matrizes triangulates superiores e
   W_2 o conjunto das matrizes triangulates inferiores.
   Então $W_1 \cap W_2$ é o conjunto das matrizes diagonais.