Espaços Vetoriais

Bases 2

Álgebra Linear

Mariana Silveira - Cristian Coletti

Universidade Federal do ABC

Aula passada

V espaço vetorial, $B \subset V$ finita, B é base se $[B] = V$ e B é LI

- Todo esp. vetorial finitamente gerado admite base
- Se $S = \{v_1, ..., v_n\}$ é um conjunto de geradores de V, então podemos extrair de S uma base para V.
- Base não é única, mas vamos mostrar que o número de elementos das bases possíveis para V é único.

Lema

Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. Se $\{u_1, ..., u_n\}$ é um conjunto de geradores para V, então qualquer conjunto LI de V tem no máximo n vetores. Equivalentemente, todo subconjuntode V com mais do que n vetores é LD.

Demonstração

Suponhamos que $V = [u_1, ..., u_n]$. Então podemos extrair de $\{u_1, ..., u_n\}$ uma base para V. Seja $B = \{u_1, ..., u_r\}$ esta base ($r \leq n$). Consideremos um subconjunto de V com m vetores para $m > n$ $\{w_1, ..., w_m\}$. Queremos mostrar que tal conjunto é LD. (Existe uma combinação linear de $\{w_1, ..., w_m\}$ com coeficientes não todos nulos dando o vetor nulo)

Como $\{u_1, ..., u_r\}$ é base para V então

$$\begin{aligned} w_1 &= \alpha_{11}u_1 + ... + \alpha_{1r}u_r \\ &\vdots \\ w_m &= \alpha_{m1}u_1 + ... + \alpha_{mr}u_r \end{aligned} \tag{1}$$

com $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$.
Assim temos $\{w_1, ..., w_m\}$ é LD se e só se existem $\beta_1, ..., \beta_m$ não todos nulos tais que

$$\beta_1 w_1 + ... + \beta_m w_m = 0 \tag{2}$$

Substituindo (1) em (2)

$$\beta_1(\alpha_{11}u_1 + ... + \alpha_{1r}u_r) + ... + \beta_m(\alpha_{m1}u_1 + ... + \alpha_{mr}u_r) = 0$$

Rearranjando

$$(\beta_1\alpha_{11} + ... + \beta_m\alpha_{m1})u_1 + ... + (\beta_1\alpha_{1r} + ... + \beta_m\alpha_{mr})u_r = 0$$

Como B é LI

$$\begin{aligned} \beta_1\alpha_{11} + ... + \beta_m\alpha_{m1} &= 0 \\ &\vdots \\ \beta_1\alpha_{1r} + ... + \beta_m\alpha_{mr} &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Temos que (3) é um sistema linear homogêneo com m incógnitas $\beta_1, ..., \beta_m$ e r equações. Como $r \leq n < m$, (3) é compatível indeterminado e por tanto tem solução não trivial. Assim, existem $\beta_1, ..., \beta_m$ não todas nulas satisfazendo (2), ou seja $\{w_1, ..., w_m\}$ é LD.

Teorema

Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. Então toda base de V possui o mesmo número de vetores.

Demonstração

Sejam $B_1 = \{u_1, ..., u_n\}$, $B_2 = \{v_1, ..., v_m\}$ bases para V.
Se B_1 é LI, B_2 gera V então pelo Lema $n \leq m$,
B_2 é LI, B_1 gera V então pelo Lema $m \leq n$).
Portanto $m = n$.

Dimensão

Definição

Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. O número de elementos de uma base de V é chamado **dimensão** *de V.*

Os espaços vetoriais finitamente gerados são também chamados de espaços vetoriais de **dimensão finita***.*

Exemplos

- $\dim(\mathbb{R}) = 1$, $\dim\left(\mathbb{R}^2\right) = 2, \ldots, \dim(\mathbb{R}^n) = n$.
- $\dim(M_{m\times n}(\mathbb{R})) = m \times n$.
- $\dim(P_n(\mathbb{R}) = n + 1$.
- $\dim\{0\} = 0$.

Observação

Seja V um espaço vetorial de dimensão n. Então

- *Todo conjunto em V com mais que n elementos é LD.*
- *Todo conjunto em V com menos que n elementos não gera V.*

Teorema do completamento

Teorema

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$. Se $\{u_1, ..., u_r\} \subset V$ é um subconjunto LI de V com r elementos, então existem $n - r$ vetores $u_{r+1}, ..., u_n \in V$ tais que $B = \{u_1, ...u_r, u_{r+1}, ..., u_n\}$ é uma base para V.

Observação

Todo conjunto LI em um espaço vetorial de dimensão finita pode ser completado de modo a formar uma base.

Demonstração

Pelo Lema temos que $r \leq n$.
Passo 1: Se $r < n$ então $\{u_1, ..., u_r\}$ não é base de V. Logo existe $u_{r+1} \in V$ tal que $u_{r+1} \notin [u_1, ..., u_r]$. Pela propriedade (4), $\{u_1, ..., u_r, u_{r+1}\}$ LI.
Passo 2: Se $r + 1 < n$, repita o passo 1 para $\{u_1, ..., u_{r+1}\}$. Após um número finito de passos obtemos $\{u_1, ..., u_r, u_{r+1}, ...u_n\}$.
Pelo Lema todo conjunto com mais que n vetores é LD. Segue da propriedade (5) que todo elemento de V é combinação linear de $\{u_1, ..., u_n\}$. Por sua construção, $\{u_1, ..., u_n\}$ é LI, portanto é base.

Corolário

Se V é um espaço vetorial de dimensão finita n, todo conjunto LI com n vetores é uma base para V.

Demonstração Seja $B \subset V$ tal que B é LI e tem n elementos. Se B não é base

para V, segue do teorema do completamento que podemos acrescentar vetores em B para obter uma base. Fazendo isso obteriamos uma base com mais do que n vetores, o que contradiz o fato que $n = dimV$.

Exemplo

- Toda tripla de vetores LI em $\mathbb{R}^3$ é base para $\mathbb{R}^3$.
- Todo conjunto LI com $n+1$ vetores em $P_n(\mathbb{R})$ é base para $P_n(\mathbb{R})$.

Exercício

- Toda subespaço de um espaço vetorial de dimensão finita tem dimensão finita.
- Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e W um subespaço vetorial de V:
  a) $dim W \leq dim V$
  b) Se $dim W = dim V$ então $V = W$.

Teorema

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e U e W subespaços de V. Então $dim(U + W) = dimU + dimW - dim(U \cap W)$.

Demonstração (Ideia)

$B = \{u_1, ..., u_r\}$ base para $U \cap W$.

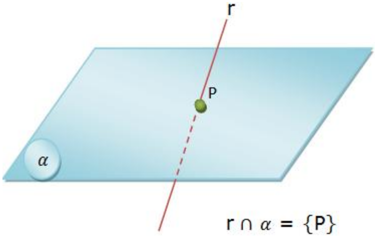
- B é LI em U pelo TC existe $\{v_1, ..., v_s\}$ tal que $\{u_1, ..., u_r, v_1, ..., v_s\}$ é base para U.
- B é LI em W pelo TC existe $\{w_1, ..., w_t\}$ tal que $\{u_1, ..., u_r, w_1, ..., w_t\}$ é base para W.

Então $\{u_1, ..., u_r, v_1, ..., v_s, w_1, ..., w_t\}$ é base para $U + W$.

Então

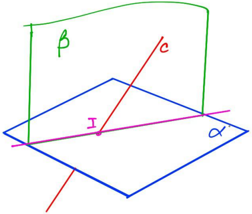
- $dim(U \cap W) = r$
- $dim(U) = r + s$
- $dim(W) = r + t$
- $dim(U + W) = r + s + t$

Exemplos



$V = \mathbb{R}^3$, $dimV = 3$

- $U \cap W = \{0\}$
- $dim(U \cap W) = 0$
- $dimU = 2$
- $dimW = 1$
- $dim(U + W) = dim\mathbb{R}^3$ (subespaço de $\mathbb{R}^3$ com mesma dimensão que $\mathbb{R}^3$)
- Portanto $U + W = \mathbb{R}^3$
- Como $U \cap W = \{0\}$, a soma é direta $\mathbb{R}^3 = W \oplus U$



$V = \mathbb{R}^3$

- $W_1 \cap W_2 = reta$
- $dim(W_1 \cap W_2) = 1$
- $dim(W_1) = 2$
- $dim(W_2) = 2$
- $dim(W_1 + W_2) = 2 + 2 - 1 = 3 = dim\mathbb{R}^3$
- Portanto $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$ (a soma não é direta)
- Se $V = W \oplus U$ então $dimV = dimU + dimW$

3. $V = \mathbb{R}^3$

- $U = \{(x, y, z),\ x + y - z = 0\}$
- $W = \{(x, y, z),\ x = y\}$
- Determine $U + W$ e $U \cap W$.
- De U,

$$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \longleftrightarrow z = x + y \\ U &= \{(x, y, x + y),\ x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, 0, x) + (0, y, y),\ x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1),\ x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= [(1, 0, 1) + (0, 1, 1)], LI \end{aligned}$$

Portanto $BU = \{(1, 0, 1) + (0, 1, 1)\}$ é base para U, $dimU = 2$

De W,

$$\begin{aligned} x &= y \\ W &= \{(x, x, z),\ x, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, x, 0) + (0, 0, z),\ x, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 1, 0) + z(0, 0, 1),\ x, z \in \mathbb{R}\} \\ &= [(1, 1, 0) + (0, 0, 1)], LI \end{aligned}$$

Portanto $BW = \{(1, 1, 0) + (0, 0, 1)\}$ é base para W, $dimW = 2$

De $U \cap W$,

$$\begin{aligned} x &= y \text{ e } z = x + y \\ U \cap W &= \{(x, x, 2x),\ x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,1,2),\ x \in \mathbb{R}\} \\ &= [(1,1,2)], LI \end{aligned}$$

Portanto $dim(U \cap W) = 1$

Logo

$$\begin{aligned} dim(U + W) &= dimU + dimW - dim(U \cap W) \\ &= 2 + 2 - 1 = 3 = dim(\mathbb{R}^3) \end{aligned}$$