Matrizes

Álgebra Linear

Mariana Silveira - Cristian Coletti

Universidade Federal do ABC

Matriz Transposta

Dada $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, a **matriz transposta** de A é a matriz $n \times m$

$$A^t := [a'_{ji}] \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$$

cuja a j-ésima linha coincide com a j-ésima coluna de A e cuja a i-ésima coluna coincide com a i-ésima linha de A.

Exemplo: Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \leftarrow A \in M_{2\times3}(\mathbb{R}) \Rightarrow A^t \in M_{3\times2}(\mathbb{R})$

Então a matriz transposta A^t é a matriz de ordem 3×2

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Matriz Transposta

Dada $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, a **matriz transposta** de A é a matriz $n \times m$

$$A^t := [a'_{ji}] \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$$

cuja a j-ésima linha coincide com a j-ésima coluna de A e cuja a i-ésima coluna coincide com a i-ésima linha de A.

Exemplo: Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \leftarrow A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \Rightarrow A^t \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$

Então a matriz transposta A^t é a matriz de ordem 3×2

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Matriz Transposta

Dada $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, a **matriz transposta** de A é a matriz $n \times m$

$$A^t := [a'_{ji}] \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$$

cuja a j-ésima linha coincide com a j-ésima coluna de A e cuja a i-ésima coluna coincide com a i-ésima linha de A.

Exemplo: Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \leftarrow A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \Rightarrow A^t \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$

Então a matriz transposta A^t é a matriz de ordem 3×2

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Matriz Transposta

Dada $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, a **matriz transposta** de A é a matriz $n \times m$

$$A^t := [a'_{ji}] \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$$

cuja a j-ésima linha coincide com a j-ésima coluna de A e cuja a i-ésima coluna coincide com a i-ésima linha de A.

Exemplo: Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \leftarrow A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \Rightarrow A^t \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$

Então a matriz transposta A^t é a matriz de ordem 3×2

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Propriedades da Matriz Transposta

T_1- Uma matriz quadrada A é simétrica se, e somente se $A = A^t$ e anti-simétrica se, e somente se $A = -A^t$.

T_2- $(A^t)^t = A$ para qualquer matriz A.

T_3- $(A+B)^t = A^t + B^t$ para quaisquer matrizes matrizes A e B de ordem $m \times n$.

T_4- $(kA)^t = kA^t$ para qualquer matriz A.

Propriedades da Matriz Transposta

T_1- Uma matriz quadrada A é simétrica se, e somente se $A = A^t$ e anti-simétrica se, e somente se $A = -A^t$.

T_2- $(A^t)^t = A$ para qualquer matriz A.

T_3- $(A + B)^t = A^t + B^t$ para quaisquer matrizes matrizes A e B de ordem $m \times n$.

T_4- $(kA)^t = kA^t$ para qualquer matriz A.

Propriedades da Matriz Transposta

T_1- Uma matriz quadrada A é simétrica se, e somente se $A = A^t$ e anti-simétrica se, e somente se $A = -A^t$.

T_2- $(A^t)^t = A$ para qualquer matriz A.

T_3- $(A+B)^t = A^t + B^t$ para quaisquer matrizes matrizes A e B de ordem $m \times n$.

T_4- $(kA)^t = kA^t$ para qualquer matriz A.

Propriedades da Matriz Transposta

T_1- Uma matriz quadrada A é simétrica se, e somente se $A = A^t$ e anti-simétrica se, e somente se $A = -A^t$.

T_2- $(A^t)^t = A$ para qualquer matriz A.

T_3- $(A+B)^t = A^t + B^t$ para quaisquer matrizes matrizes A e B de ordem $m \times n$.

T_4- $(kA)^t = kA^t$ para qualquer matriz A.

Propriedades da Matriz Transposta

T_1- Uma matriz quadrada A é simétrica se, e somente se $A = A^t$ e anti-simétrica se, e somente se $A = -A^t$.

T_2- $(A^t)^t = A$ para qualquer matriz A.

T_3- $(A+B)^t = A^t + B^t$ para quaisquer matrizes matrizes A e B de ordem $m \times n$.

T_4- $(kA)^t = kA^t$ para qualquer matriz A.

Multiplicação de matrizes

Dadas $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $B = [b_{jk}]_{n\times p} \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, a **matriz produto** de A com B é a matriz $m \times p$

$$A.B := [c_{ik}]_{m\times p}$$

onde $c_{ik} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk}$.

k-ésima coluna de B

i-ésima linha de A $\longrightarrow$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & \cdots & b_{2k} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

- O elemento c_{ik} é obtido multiplicando os elementos da i-ésima linha de A pela k-ésima coluna de B e somando esses produtos.

Multiplicação de matrizes

Dadas $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $B = [b_{jk}]_{n\times p} \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, a **matriz produto** de A com B é a matriz $m \times p$

$$A.B := [c_{ik}]_{m\times p}$$

onde $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk}$.

k-ésima coluna de B

i-ésima linha de A →

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & \cdots & b_{2k} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

- O elemento c_{ik} é obtido multiplicando os elementos da i-ésima linha de A pela k-ésima coluna de B e somando esses produtos.

Multiplicação de matrizes

- Só podemos fazer o produto de duas matrizes A e B se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B.
- A matriz produto $A.B$ tem o número de linhas de A e o número de colunas de B.

Exemplo: Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}), B \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$

Então a matriz produto $A.B$ é a matriz de ordem 2×2

$$A.B = \begin{bmatrix} 2.2 + 0.1 + 1.2 & 2.0 + 0.1 + 1.1 \\ 0.2 + 1.1 + 2.2 & 0.0 + 1.1 + 2.1 \end{bmatrix} \Rightarrow A.B = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de matrizes

- Só podemos fazer o produto de duas matrizes A e B se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B.
- A matriz produto $A.B$ tem o número de linhas de A e o número de colunas de B.

Exemplo: Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}), B \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$

Então a matriz produto $A.B$ é a matriz de ordem 2×2

$$A.B = \begin{bmatrix} 2.2+0.1+1.2 & 2.0+0.1+1.1 \\ 0.2+1.1+2.2 & 0.0+1.1+2.1 \end{bmatrix} \Rightarrow A.B = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de matrizes

- Só podemos fazer o produto de duas matrizes A e B se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B.
- A matriz produto $A.B$ tem o número de linhas de A e o número de colunas de B.

Exemplo: Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}), B \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$

Então a matriz produto $A.B$ é a matriz de ordem 2×2

$$A.B = \begin{bmatrix} 2.2+0.1+1.2 & 2.0+0.1+1.1 \\ 0.2+1.1+2.2 & 0.0+1.1+2.1 \end{bmatrix} \Rightarrow A.B = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de matrizes

- Só podemos fazer o produto de duas matrizes A e B se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B.
- A matriz produto $A.B$ tem o número de linhas de A e o número de colunas de B.

Exemplo: Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow A \in M_{2\times3}(\mathbb{R}), B \in M_{3\times2}(\mathbb{R})$

Então a matriz produto $A.B$ é a matriz de ordem 2×2

$$A.B = \begin{bmatrix} 2.2 + 0.1 + 1.2 & 2.0 + 0.1 + 1.1 \\ 0.2 + 1.1 + 2.2 & 0.0 + 1.1 + 2.1 \end{bmatrix} \Rightarrow A.B = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de matrizes

- Só podemos fazer o produto de duas matrizes A e B se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B.
- A matriz produto $A.B$ tem o número de linhas de A e o número de colunas de B.

Exemplo: Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}), B \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$

Então a matriz produto $A.B$ é a matriz de ordem 2×2

$$A.B = \begin{bmatrix} 2.2 + 0.1 + 1.2 & 2.0 + 0.1 + 1.1 \\ 0.2 + 1.1 + 2.2 & 0.0 + 1.1 + 2.1 \end{bmatrix} \Rightarrow A.B = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de Matrizes

$P_1 -$ **Associativa**: Sejam $A = [a_{ij}]_{m\times n}, B = [b_{jk}]_{n\times p}, C = [c_{k\ell}]_{p\times q}$. Então $(A.B).C = A.(B.C)$.

$$A.B = [\alpha_{ik}]_{m\times p}, \quad \alpha_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} \qquad B.C = [\gamma_{j\ell}]_{n\times q}, \quad \gamma_{j\ell} = \sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{k\ell}$$

$$(A.B).C = [\beta_{i\ell}]_{m\times q}, \beta_{i\ell} = \sum_{k=1}^{p} \alpha_{ik}c_{k\ell} \qquad A.(B.C) = [\delta_{i\ell}]_{m\times q}, \delta_{i\ell} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\gamma_{j\ell}$$

$$\beta_{i\ell} = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)c_{k\ell} \qquad \delta_{i\ell} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{k\ell}\right)$$

$$\beta_{i\ell} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}b_{jk})c_{k\ell} \qquad \delta_{i\ell} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{ij}(b_{jk}c_{k\ell})$$

Multiplicação de Matrizes

$P_1 -$ **Associativa**: Sejam $A = [a_{ij}]_{m\times n}, B = [b_{jk}]_{n\times p}, C = [c_{k\ell}]_{p\times q}$. Então $(A.B).C = A.(B.C)$.

$$A.B = [\alpha_{ik}]_{m\times p}, \ \ \alpha_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} \qquad B.C = [\gamma_{j\ell}]_{n\times q}, \ \ \gamma_{j\ell} = \sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{k\ell}$$

$$(A.B).C = [\beta_{i\ell}]_{m\times q}, \beta_{i\ell} = \sum_{k=1}^{p} \alpha_{ik}c_{k\ell} \qquad A.(B.C) = [\delta_{i\ell}]_{m\times q}, \delta_{i\ell} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\gamma_{j\ell}$$

$$\beta_{i\ell} = \sum_{k=1}^{p}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\Big)c_{k\ell} \qquad \delta_{i\ell} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Big(\sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{k\ell}\Big)$$

$$\beta_{i\ell} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}b_{jk})c_{k\ell} \qquad \delta_{i\ell} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{ij}(b_{jk}c_{k\ell})$$

Multiplicação de Matrizes

P_1- **Associativa**: Sejam $A=[a_{ij}]_{m\times n}, B=[b_{jk}]_{n\times p}, C=[c_{k\ell}]_{p\times q}$. Então $(A.B).C=A.(B.C)$.

$$A.B=[\alpha_{ik}]_{m\times p},\ \ \alpha_{ik}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} \qquad B.C=[\gamma_{j\ell}]_{n\times q},\ \ \gamma_{j\ell}=\sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{k\ell}$$

$$(A.B).C=[\beta_{i\ell}]_{m\times q},\ \beta_{i\ell}=\sum_{k=1}^{p}\alpha_{ik}c_{k\ell} \qquad A.(B.C)=[\delta_{i\ell}]_{m\times q},\ \delta_{i\ell}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\gamma_{j\ell}$$

$$\beta_{i\ell}=\sum_{k=1}^{p}(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk})c_{k\ell} \qquad \delta_{i\ell}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\sum_{k=1}^{p}b_{jk}c_{k\ell})$$

$$\beta_{i\ell}=\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}b_{jk})c_{k\ell} \qquad \delta_{i\ell}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}a_{ij}(b_{jk}c_{k\ell})$$

Multiplicação de Matrizes

P_1- **Associativa**: Sejam $A = [a_{ij}]_{m\times n}, B = [b_{jk}]_{n\times p}, C = [c_{k\ell}]_{p\times q}$. Então $(A.B).C = A.(B.C)$.

$$A.B = [\alpha_{ik}]_{m\times p},\ \ \alpha_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} \qquad B.C = [\gamma_{j\ell}]_{n\times q},\ \ \gamma_{j\ell} = \sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{k\ell}$$

$$(A.B).C = [\beta_{i\ell}]_{m\times q},\ \beta_{i\ell} = \sum_{k=1}^{p} \alpha_{ik}c_{k\ell} \qquad A.(B.C) = [\delta_{i\ell}]_{m\times q},\ \delta_{i\ell} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\gamma_{j\ell}$$

$$\beta_{i\ell} = \sum_{k=1}^{p}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk})c_{k\ell} \qquad \delta_{i\ell} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{k\ell})$$

$$\beta_{i\ell} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}b_{jk})c_{k\ell} \qquad \delta_{i\ell} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{ij}(b_{jk}c_{k\ell})$$

Multiplicação de Matrizes

P_1- **Associativa**: Sejam $A=[a_{ij}]_{m\times n}, B=[b_{jk}]_{n\times p}, C=[c_{k\ell}]_{p\times q}$. Então $(A.B).C=A.(B.C)$.

$$A.B=[\alpha_{ik}]_{m\times p},\ \ \alpha_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}$$

$$B.C=[\gamma_{j\ell}]_{n\times q},\ \ \gamma_{j\ell}=\sum_{k=1}^{p}b_{jk}c_{k\ell}$$

$$(A.B).C=[\beta_{i\ell}]_{m\times q},\ \beta_{i\ell}=\sum_{k=1}^{p}\alpha_{ik}c_{k\ell}$$

$$A.(B.C)=[\delta_{i\ell}]_{m\times q},\ \delta_{i\ell}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\gamma_{j\ell}$$

$$\beta_{i\ell}=\sum_{k=1}^{p}(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk})c_{k\ell}$$

$$\delta_{i\ell}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\sum_{k=1}^{p}b_{jk}c_{k\ell})$$

$$\beta_{i\ell}=\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}b_{jk})c_{k\ell}$$

$$\delta_{i\ell}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}a_{ij}(b_{jk}c_{k\ell})$$

Multiplicação de Matrizes

$P_1 -$ **Associativa**: Sejam $A = [a_{ij}]_{m\times n}, B = [b_{jk}]_{n\times p}, C = [c_{k\ell}]_{p\times q}$. Então $(A.B).C = A.(B.C)$.

$$A.B = [\alpha_{ik}]_{m\times p},\ \ \alpha_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} \qquad B.C = [\gamma_{j\ell}]_{n\times q},\ \ \gamma_{j\ell} = \sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{k\ell}$$

$$(A.B).C = [\beta_{i\ell}]_{m\times q},\ \beta_{i\ell} = \sum_{k=1}^{p} \alpha_{ik}c_{k\ell} \qquad A.(B.C) = [\delta_{i\ell}]_{m\times q},\ \delta_{i\ell} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\gamma_{j\ell}$$

$$\beta_{i\ell} = \sum_{k=1}^{p}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk})c_{k\ell} \qquad \delta_{i\ell} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{k\ell})$$

$$\beta_{i\ell} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}b_{jk})c_{k\ell} \qquad \delta_{i\ell} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{ij}(b_{jk}c_{k\ell})$$

Multiplicação de Matrizes

P_1- **Associativa**: Sejam $A = [a_{ij}]_{m\times n}, B = [b_{jk}]_{n\times p}, C = [c_{k\ell}]_{p\times q}$. Então $(A.B).C = A.(B.C)$.

$$A.B = [\alpha_{ik}]_{m\times p},\ \ \alpha_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} \qquad B.C = [\gamma_{j\ell}]_{n\times q},\ \ \gamma_{j\ell} = \sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{k\ell}$$

$$(A.B).C = [\beta_{i\ell}]_{m\times q}, \beta_{i\ell} = \sum_{k=1}^{p} \alpha_{ik}c_{k\ell} \qquad A.(B.C) = [\delta_{i\ell}]_{m\times q}, \delta_{i\ell} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\gamma_{j\ell}$$

$$\beta_{i\ell} = \sum_{k=1}^{p}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk})c_{k\ell} \qquad \delta_{i\ell} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{k\ell})$$

$$\beta_{i\ell} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}b_{jk})c_{k\ell} \qquad \delta_{i\ell} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{ij}(b_{jk}c_{k\ell})$$

Multiplicação de Matrizes

P_1- **Associativa**: Sejam $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{jk}]_{n\times p}$, $C = [c_{k\ell}]_{p\times q}$. Então $(A.B).C = A.(B.C)$.

$$A.B = [\alpha_{ik}]_{m\times p},\ \ \alpha_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} \qquad B.C = [\gamma_{j\ell}]_{n\times q},\ \ \gamma_{j\ell} = \sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{k\ell}$$

$$(A.B).C = [\beta_{i\ell}]_{m\times q},\ \beta_{i\ell} = \sum_{k=1}^{p} \alpha_{ik}c_{k\ell} \qquad A.(B.C) = [\delta_{i\ell}]_{m\times q},\ \delta_{i\ell} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\gamma_{j\ell}$$

$$\beta_{i\ell} = \sum_{k=1}^{p}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk})c_{k\ell} \qquad \delta_{i\ell} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{k\ell})$$

$$\beta_{i\ell} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}b_{jk})c_{k\ell} \qquad \delta_{i\ell} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{ij}(b_{jk}c_{k\ell})$$

Multiplicação de Matrizes

P_1- **Associativa**: Sejam $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{jk}]_{n\times p}$, $C=[c_{k\ell}]_{p\times q}$. Então $(A.B).C=A.(B.C)$.

$$A.B=[\alpha_{ik}]_{m\times p},\ \ \alpha_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk} \qquad B.C=[\gamma_{j\ell}]_{n\times q},\ \ \gamma_{j\ell}=\sum_{k=1}^{p}b_{jk}c_{k\ell}$$

$$(A.B).C=[\beta_{i\ell}]_{m\times q},\ \beta_{i\ell}=\sum_{k=1}^{p}\alpha_{ik}c_{k\ell} \qquad A.(B.C)=[\delta_{i\ell}]_{m\times q},\ \delta_{i\ell}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\gamma_{j\ell}$$

$$\beta_{i\ell}=\sum_{k=1}^{p}(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk})c_{k\ell} \qquad \delta_{i\ell}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\sum_{k=1}^{p}b_{jk}c_{k\ell})$$

$$\beta_{i\ell}=\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}b_{jk})c_{k\ell} \qquad \delta_{i\ell}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}a_{ij}(b_{jk}c_{k\ell})$$

Multiplicação de Matrizes

P_2- **Identidade**: Para toda matriz $A_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

$A_{m\times n}.Id_n = Id_m.A_{m\times n} = A_{m\times n}$.

P_3- **Matriz nula**: Para toda matriz $A_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

$A_{m\times n}.O_{n\times p} = O_{m\times p}$

$O_{p\times m}.A_{m\times n} = O_{p\times n}$

P_4- **Distributiva à esquerda**: Dadas $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $B, C \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$

$A.(B + C) = A.B + A.C$.

P_5- **Distributiva à direita**: Dadas $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $C \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$

$(A + B).C = A.C + B.C$.

P_6- **Transposta**: $(A.B)^t = B^t A^t$ para quaisquer matrizes A de ordem $m \times n$ e B de ordem $n \times p$.

Multiplicação de Matrizes

P_2- **Identidade**: Para toda matriz $A_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

$A_{m\times n}.Id_n = Id_m.A_{m\times n} = A_{m\times n}$.

P_3- **Matriz nula**: Para toda matriz $A_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

$A_{m\times n}.O_{n\times p} = O_{m\times p}$

$O_{p\times m}.A_{m\times n} = O_{p\times n}$

P_4- **Distributiva à esquerda**: Dadas $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $B, C \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$

$A.(B + C) = A.B + A.C$.

P_5- **Distributiva à direita**: Dadas $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $C \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$

$(A + B).C = A.C + B.C$.

P_6- **Transposta**: $(A.B)^t = B^tA^t$ para quaisquer matrizes A de ordem $m \times n$ e B de ordem $n \times p$.

Multiplicação de Matrizes

P_2- **Identidade**: Para toda matriz $A_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

$A_{m\times n}.Id_n = Id_m.A_{m\times n} = A_{m\times n}$.

P_3- **Matriz nula**: Para toda matriz $A_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

$A_{m\times n}.O_{n\times p} = O_{m\times p}$

$O_{p\times m}.A_{m\times n} = O_{p\times n}$

P_4- **Distributiva à esquerda**: Dadas $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $B, C \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$

$A.(B + C) = A.B + A.C$.

P_5- **Distributiva à direita**: Dadas $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $C \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$

$(A + B).C = A.C + B.C$.

P_6- **Transposta**: $(A.B)^t = B^tA^t$ para quaisquer matrizes A de ordem $m \times n$ e B de ordem $n \times p$.

Multiplicação de Matrizes

P_2- **Identidade**: Para toda matriz $A_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

$A_{m\times n}.Id_n = Id_m.A_{m\times n} = A_{m\times n}$.

P_3- **Matriz nula**: Para toda matriz $A_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

$A_{m\times n}.O_{n\times p} = O_{m\times p}$

$O_{p\times m}.A_{m\times n} = O_{p\times n}$

P_4- **Distributiva à esquerda**: Dadas $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $B, C \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$

$A.(B + C) = A.B + A.C$.

P_5- **Distributiva à direita**: Dadas $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $C \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$

$(A + B).C = A.C + B.C$.

P_6- **Transposta**: $(A.B)^t = B^tA^t$ para quaisquer matrizes A de ordem $m \times n$ e B de ordem $n \times p$.

Multiplicação de Matrizes

P_2- **Identidade**: Para toda matriz $A_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

$A_{m\times n}.Id_n = Id_m.A_{m\times n} = A_{m\times n}$.

P_3- **Matriz nula**: Para toda matriz $A_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

$A_{m\times n}.O_{n\times p} = O_{m\times p}$

$O_{p\times m}.A_{m\times n} = O_{p\times n}$

P_4- **Distributiva à esquerda**: Dadas $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $B, C \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$

$A.(B + C) = A.B + A.C$.

P_5- **Distributiva à direita**: Dadas $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $C \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$

$(A + B).C = A.C + B.C$.

P_6- **Transposta**: $(A.B)^t = B^t A^t$ para quaisquer matrizes A de ordem $m \times n$ e B de ordem $n \times p$.

Multiplicação de Matrizes

- A multiplicação $A.B$ nem sempre está bem definida. Mesmo quando $A.B$ e $B.A$ estão definidas, em geral $A.B \neq B.A$. Por exemplo, dadas

  $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ temos } A.B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B.A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

  Obs: A multiplicação de matrizes não é operação binária no conjunto de todas as matrizes, mas é operação binária no espaço $M_n(\mathbb{R})$.

- É possível que a matriz produto $A.B$ seja a matriz nula, mesmo quando A e B são não nulas. Por exemplo, dadas

  $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ temos } A.B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

  Obs: Nem toda matriz não nula tem inversa!

Multiplicação de Matrizes

- A multiplicação $A.B$ nem sempre está bem definida. Mesmo quando $A.B$ e $B.A$ estão definidas, em geral $A.B \neq B.A$. Por exemplo, dadas

  $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ temos } A.B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B.A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

  Obs: A multiplicação de matrizes não é operação binária no conjunto de todas as matrizes, mas é operação binária no espaço $M_n(\mathbb{R})$.

- É possível que a matriz produto $A.B$ seja a matriz nula, mesmo quando A e B são não nulas. Por exemplo, dadas

  $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ temos } A.B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

  Obs: Nem toda matriz não nula tem inversa!

Multiplicação de Matrizes

- A multiplicação $A.B$ nem sempre está bem definida. Mesmo quando $A.B$ e $B.A$ estão definidas, em geral $A.B \neq B.A$. Por exemplo, dadas

  $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ temos } A.B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B.A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

  Obs: A multiplicação de matrizes não é operação binária no conjunto de todas as matrizes, mas é operação binária no espaço $M_n(\mathbb{R})$.

- É possível que a matriz produto $A.B$ seja a matriz nula, mesmo quando A e B são não nulas. Por exemplo, dadas

  $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ temos } A.B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

  Obs: Nem toda matriz não nula tem inversa!

Multiplicação de Matrizes

- A multiplicação $A.B$ nem sempre está bem definida. Mesmo quando $A.B$ e $B.A$ estão definidas, em geral $A.B \neq B.A$. Por exemplo, dadas

  $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ temos } A.B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B.A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

  Obs: A multiplicação de matrizes não é operação binária no conjunto de todas as matrizes, mas é operação binária no espaço $M_n(\mathbb{R})$.

- É possível que a matriz produto $A.B$ seja a matriz nula, mesmo quando A e B são não nulas. Por exemplo, dadas

  $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ temos } A.B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

  Obs: Nem toda matriz não nula tem inversa!

Multiplicação de Matrizes

- A multiplicação $A.B$ nem sempre está bem definida. Mesmo quando $A.B$ e $B.A$ estão definidas, em geral $A.B \neq B.A$. Por exemplo, dadas

  $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ temos } A.B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B.A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

  Obs: A multiplicação de matrizes não é operação binária no conjunto de todas as matrizes, mas é operação binária no espaço $M_n(\mathbb{R})$.

- É possível que a matriz produto $A.B$ seja a matriz nula, mesmo quando A e B são não nulas. Por exemplo, dadas

  $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ temos } A.B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

  Obs: Nem toda matriz não nula tem inversa!

Matriz Inversa

Dada uma matriz quadrada $A \in M_n(\mathbb{R})$, chamamos de **inversa** de A uma matriz $B \in M_n(\mathbb{R})$ tal que

$$A.B = B.A = Id_n$$

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ tem inversa? Queremos encontrar $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tal que

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2b = 0 \\ c = 0 \\ d = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow a = 1/2$

$\Rightarrow b = 0$

$c = 0, \; d = 1$

Portanto $B = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matriz Inversa

Dada uma matriz quadrada $A \in M_n(\mathbb{R})$, chamamos de **inversa** de A uma matriz $B \in M_n(\mathbb{R})$ tal que

$$A.B = B.A = Id_n$$

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ tem inversa? Queremos encontrar $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tal que

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2b = 0 \\ c = 0 \\ d = 1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \Rightarrow a = 1/2 \\ \Rightarrow b = 0 \\ c = 0, \; d = 1 \end{array}$$

Portanto $B = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matriz Inversa

Dada uma matriz quadrada $A \in M_n(\mathbb{R})$, chamamos de **inversa** de A uma matriz $B \in M_n(\mathbb{R})$ tal que

$$A.B = B.A = Id_n$$

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ tem inversa? Queremos encontrar $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tal que

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2b = 0 \\ c = 0 \\ d = 1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \Rightarrow a = 1/2 \\ \Rightarrow b = 0 \\ c = 0, \ d = 1 \end{array}$$

Portanto $B = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matriz Inversa

Dada uma matriz quadrada $A \in M_n(\mathbb{R})$, chamamos de **inversa** de A uma matriz $B \in M_n(\mathbb{R})$ tal que

$$A.B = B.A = Id_n$$

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ tem inversa? Queremos encontrar $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tal que

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2b = 0 \\ c = 0 \\ d = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow a = 1/2$

$\Rightarrow b = 0$

$c = 0, \ d = 1$

Portanto $B = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matriz Inversa

Dada uma matriz quadrada $A \in M_n(\mathbb{R})$, chamamos de **inversa** de A uma matriz $B \in M_n(\mathbb{R})$ tal que

$$A.B = B.A = Id_n$$

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ tem inversa? Queremos encontrar $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tal que

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2b = 0 \\ c = 0 \\ d = 1 \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\Rightarrow a = 1/2 \\ &\Rightarrow b = 0 \\ &c = 0, \ d = 1 \end{aligned}$$

Portanto $B = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matriz Inversa

Dada uma matriz quadrada $A \in M_n(\mathbb{R})$, chamamos de **inversa** de A uma matriz $B \in M_n(\mathbb{R})$ tal que

$$A.B = B.A = Id_n$$

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ tem inversa? Queremos encontrar $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tal que

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2b = 0 \\ c = 0 \\ d = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = 1/2$$
$$\Rightarrow b = 0$$
$$c = 0, \ d = 1$$

Portanto $B = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matriz Inversa

Notação: A matriz B, quando existe, é denotada por A^{-1}.

Exercício: Mostre que $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ não tem inversa.

- O conjunto $M_n(\mathbb{R})$ com a operação de multiplicação de matrizes ".".
  - "." é associativa.
  - "." não é comutativa.
  - Seu elemento identidade é a matriz identidade Id_n.
  - Nem toda matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tem inversa.

Matriz Inversa

Notação: A matriz B, quando existe, é denotada por A^{-1}.

Exercício: Mostre que $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ não tem inversa.

- O conjunto $M_n(\mathbb{R})$ com a operação de multiplicação de matrizes ".".
  - "." é associativa.
  - "." não é comutativa.
  - Seu elemento identidade é a matriz identidade Id_n.
  - Nem toda matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tem inversa.

Matriz Inversa

Notação: A matriz B, quando existe, é denotada por A^{-1}.

Exercício: Mostre que $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ não tem inversa.

- O conjunto $M_n(\mathbb{R})$ com a operação de multiplicação de matrizes ".".
  - "." é associativa.
  - "." não é comutativa.
  - Seu elemento identidade é a matriz identidade Id_n.
  - Nem toda matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tem inversa.

Matriz Inversa

- O conjunto $GL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ das matrizes que possuem inversa, com a operação de multiplicação de matrizes ".".
  - "." é associativa.
  - "." não é comutativa.
  - Seu elemento identidade é a matriz identidade Id_n.
  - Toda matriz $A \in GL_n(\mathbb{R})$ tem inversa.

$(GL_n(\mathbb{R}), .)$ é um grupo não abeliano.

Obs: Vamos estudar métodos para calcular a inversa ou determinar se a inversa existe.

Matriz Inversa

- O conjunto $GL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ das matrizes que possuem inversa, com a operação de multiplicação de matrizes ".".
  - "." é associativa.
  - "." não é comutativa.
  - Seu elemento identidade é a matriz identidade Id_n.
  - Toda matriz $A \in GL_n(\mathbb{R})$ tem inversa.

$(GL_n(\mathbb{R}), .)$ é um grupo não abeliano.

Obs: Vamos estudar métodos para calcular a inversa ou determinar se a inversa existe.