Sistemas Lineares

Álgebra Linear

Mariana Silveira - Cristian Coletti

Universidade Federal do ABC

Sistemas Lineares

Um **sistema de equações lineares** com m equações e n incógnitas é um conjunto de equações do tipo

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

onde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ para quaisquer $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

- a_{ij} são chamados coeficientes do sistema S.
- x_j são chamados incógnitas, $j = 1, \ldots, n$.
- b_i são chamados termos independentes, $i = 1, \ldots, m$.

Exemplo: $S_1 : \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \leftarrow \quad m = 2,\ n = 3$

Sistemas Lineares

Um **sistema de equações lineares** com m equações e n incógnitas é um conjunto de equações do tipo

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

onde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ para quaisquer $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

- a_{ij} são chamados coeficientes do sistema S.
- x_j são chamados incógnitas, $j = 1, \ldots, n$.
- b_i são chamados termos independentes, $i = 1, \ldots, m$.

Exemplo: $S_1 : \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ x - y = 0 \end{cases} \leftarrow \ m = 2, \ n = 3$

Sistemas Lineares

Um **sistema de equações lineares** com m equações e n incógnitas é um conjunto de equações do tipo

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

onde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ para quaisquer $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

- a_{ij} são chamados coeficientes do sistema S.
- x_j são chamados incógnitas, $j = 1, \ldots, n$.
- b_i são chamados termos independentes, $i = 1, \ldots, m$.

Exemplo: $S_1 : \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ x - y = 0 \end{cases} \leftarrow \quad m = 2,\ n = 3$

Sistemas Lineares

Um **sistema de equações lineares** com m equações e n incógnitas é um conjunto de equações do tipo

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

onde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ para quaisquer $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

- a_{ij} são chamados coeficientes do sistema S.
- x_j são chamados incógnitas, $j = 1, \ldots, n$.
- b_i são chamados termos independentes, $i = 1, \ldots, m$.

Exemplo: $S_1 : \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ x - y = 0 \end{cases} \leftarrow \; m = 2, \, n = 3$

Sistemas Lineares

Um **sistema de equações lineares** com m equações e n incógnitas é um conjunto de equações do tipo

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

onde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ para quaisquer $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

- a_{ij} são chamados coeficientes do sistema S.
- x_j são chamados incógnitas, $j = 1, \ldots, n$.
- b_i são chamados termos independentes, $i = 1, \ldots, m$.

Exemplo: $S_1 : \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ x - y = 0 \end{cases} \leftarrow \; m = 2,\ n = 3$

Sistemas Lineares

Uma **solução** do sistema linear S é uma n-úpla de números reais $(x_1, \ldots, x_n)$ que satisfaz simultaneamente as m equações de S.

- Voltanto ao exemplo $S_1 : \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$

$(0, 0, 1)$ é uma solução do sistema S_1. $(1, 1, 0)$ também é solução de S_1.

- Um sistema linear que não admite solução é chamado **incompatível** (ou impossível).
- Um sistema linear que admite uma única solução é chamado sistema linear **compatível determinado** (ou possível determinado).
- Se um sistema linear admite mais do que uma solução, dizemos que ele é **compatível indeterminado** (ou possível indeterminado).

Sistemas Lineares

Uma **solução** do sistema linear S é uma n-úpla de números reais $(x_1, \ldots, x_n)$ que satisfaz simultaneamente as m equações de S.

- Voltanto ao exemplo $S_1 : \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$

$(0, 0, 1)$ é uma solução do sistema S_1. $(1, 1, 0)$ também é solução de S_1.

- Um sistema linear que não admite solução é chamado **incompatível** (ou impossível).
- Um sistema linear que admite uma única solução é chamado sistema linear **compatível determinado** (ou possível determinado).
- Se um sistema linear admite mais do que uma solução, dizemos que ele é **compatível indeterminado** (ou possível indeterminado).

Sistemas Lineares

Uma **solução** do sistema linear S é uma n-úpla de números reais $(x_1, \ldots, x_n)$ que satisfaz simultaneamente as m equações de S.

- Voltanto ao exemplo $S_1 : \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$

$(0, 0, 1)$ é uma solução do sistema S_1. $(1, 1, 0)$ também é solução de S_1.

- Um sistema linear que não admite solução é chamado **incompatível** (ou impossível).
- Um sistema linear que admite uma única solução é chamado sistema linear **compatível determinado** (ou possível determinado).
- Se um sistema linear admite mais do que uma solução, dizemos que ele é **compatível indeterminado** (ou possível indeterminado).

Sistemas Lineares

Uma **solução** do sistema linear S é uma n-úpla de números reais $(x_1, \ldots, x_n)$ que satisfaz simultaneamente as m equações de S.

- Voltanto ao exemplo $S_1 : \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$

$(0, 0, 1)$ é uma solução do sistema S_1. $(1, 1, 0)$ também é solução de S_1.

- Um sistema linear que não admite solução é chamado **incompatível** (ou impossível).
- Um sistema linear que admite uma única solução é chamado sistema linear **compatível determinado** (ou possível determinado).
- Se um sistema linear admite mais do que uma solução, dizemos que ele é **compatível indeterminado** (ou possível indeterminado).

Sistemas Lineares

Uma **solução** do sistema linear S é uma n-úpla de números reais $(x_1, \ldots, x_n)$ que satisfaz simultaneamente as m equações de S.

- Voltanto ao exemplo $S_1 : \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$

$(0, 0, 1)$ é uma solução do sistema S_1. $(1, 1, 0)$ também é solução de S_1.

- Um sistema linear que não admite solução é chamado **incompatível** (ou impossível).
- Um sistema linear que admite uma única solução é chamado sistema linear **compatível determinado** (ou possível determinado).
- Se um sistema linear admite mais do que uma solução, dizemos que ele é **compatível indeterminado** (ou possível indeterminado).

Sistemas Lineares

Uma **solução** do sistema linear S é uma n-úpla de números reais $(x_1, \ldots, x_n)$ que satisfaz simultaneamente as m equações de S.

- Voltanto ao exemplo $S_1 : \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$

$(0, 0, 1)$ é uma solução do sistema S_1. $(1, 1, 0)$ também é solução de S_1.

- Um sistema linear que não admite solução é chamado **incompatível** (ou impossível).
- Um sistema linear que admite uma única solução é chamado sistema linear **compatível determinado** (ou possível determinado).
- Se um sistema linear admite mais do que uma solução, dizemos que ele é **compatível indeterminado** (ou possível indeterminado).

Sistemas Lineares

Uma **solução** do sistema linear S é uma n-úpla de números reais $(x_1, \ldots, x_n)$ que satisfaz simultaneamente as m equações de S.

- Voltanto ao exemplo $S_1 : \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$

$(0, 0, 1)$ é uma solução do sistema S_1. $(1, 1, 0)$ também é solução de S_1.

- Um sistema linear que não admite solução é chamado **incompatível** (ou impossível).
- Um sistema linear que admite uma única solução é chamado sistema linear **compatível determinado** (ou possível determinado).
- Se um sistema linear admite mais do que uma solução, dizemos que ele é **compatível indeterminado** (ou possível indeterminado).

Sistemas Lineares Homogêneos

Quando $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$ em S, ou seja, os termos independentes são todos nulos, dizemos que o sistema S é um **sistema linear homogêneo.**

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

- Se S é um sistema linear homogêneo, a n-úpla $(0, \ldots, 0)$ é solução de S chamada **solução trivial** do sistema linear homogêneo.

Obs: Todo sistema linear homogêneo é compatível.

Sistemas Lineares Homogêneos

Quando $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$ em S, ou seja, os termos independentes são todos nulos, dizemos que o sistema S é um **sistema linear homogêneo.**

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

- Se S é um sistema linear homogêneo, a n-úpla $(0, \ldots, 0)$ é solução de S chamada **solução trivial** do sistema linear homogêneo.

Obs: Todo sistema linear homogêneo é compatível.

Sistemas Lineares Homogêneos

Quando $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$ em S, ou seja, os termos independentes são todos nulos, dizemos que o sistema S é um **sistema linear homogêneo.**

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

- Se S é um sistema linear homogêneo, a n-úpla $(0, \ldots, 0)$ é solução de S chamada **solução trivial** do sistema linear homogêneo.

Obs: Todo sistema linear homogêneo é compatível.

Exemplos

1. Um sistema linear do tipo

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ 0.x_1 + \cdots + 0.x_n = b_i \ (b_i \neq 0) \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

é necessariamente incompatível.

2. Um sistema linear do tipo

$$S : \begin{cases} x_1 & & & = b_1 \\ & x_2 & & = b_2 \\ & & \ddots & \\ & & x_n & = b_n \end{cases}$$

é compatível determinado.

Exemplos

1. Um sistema linear do tipo

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ 0.x_1 + \cdots + 0.x_n = b_i \ (b_i \neq 0) \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

é necessariamente incompatível.

2. Um sistema linear do tipo

$$S : \begin{cases} x_1 & & & & = b_1 \\ & x_2 & & & = b_2 \\ & & \ddots & & \\ & & & x_n & = b_n \end{cases}$$

é compatível determinado.

Sistemas Lineares e Matrizes

O sistema

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

pode ser escrito na **forma matricial**

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A_{m\times n}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X_{n\times 1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{B_{m\times 1}}$$

Sistemas Lineares e Matrizes

- $A = A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ é chamada **matriz dos coeficientes**,
- $X = X_{n\times 1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ é a **matriz das incógnitas**,
- $B = B_{m\times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ é a **matriz dos termos independentes**.

Sistemas Lineares e Matrizes

Uma outra matriz que podemos associar a S é

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

que chamamos de **matriz ampliada** do sistema S.

Exemplo: Considere o sistema $S_1 : \begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ 3x + 2y - z = 2 \\ x + z = 1 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Forma matricial de S_1 Matriz Ampliada de S_1

Sistemas Lineares e Matrizes

Uma outra matriz que podemos associar a S é

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

que chamamos de **matriz ampliada** do sistema S.

Exemplo: Considere o sistema $S_1 : \begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ 3x + 2y - z = 2 \\ x + z = 1 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Forma matricial de S — Matriz Ampliada de S

Sistemas Lineares e Matrizes

Uma outra matriz que podemos associar a S é

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

que chamamos de **matriz ampliada** do sistema S.

Exemplo: Considere o sistema $S_1 : \begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ 3x+2y-z=2 \\ x+z=1 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Forma matricial de S Matriz Ampliada de S

Sistemas Lineares e Matrizes

Uma outra matriz que podemos associar a S é

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

que chamamos de **matriz ampliada** do sistema S.

Exemplo: Considere o sistema $S_1 : \begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ 3x + 2y - z = 2 \\ x + z = 1 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Forma matricial de S — Matriz Ampliada de S

Sistemas Equivalentes

- Estamos interessados em encontrar métodos que nos digam se o sistema é compatível ou não e, em caso positivo, queremos encontrar as soluções do sistema.
- Queremos um algoritmo que possa ser aplicado a qualquer sistema.

Vamos usar a matriz ampliada do sistema para construir um sistema mais simples com a mesma solução.

Dois sistemas lineares são **equivalentes** se toda solução de um deles é também solução do outro.

Pergunta: Dado um sistema S e sua matriz ampliada A, que operações podemos realizar em A de forma que a matriz obtida represente um sistema equivalente?

Sistemas Equivalentes

- Estamos interessados em encontrar métodos que nos digam se o sistema é compatível ou não e, em caso positivo, queremos encontrar as soluções do sistema.
- Queremos um algoritmo que possa ser aplicado a qualquer sistema.

Vamos usar a matriz ampliada do sistema para construir um sistema mais simples com a mesma solução.

Dois sistemas lineares são **equivalentes** se toda solução de um deles é também solução do outro.

Pergunta: Dado um sistema S e sua matriz ampliada A, que operações podemos realizar em A de forma que a matriz obtida represente um sistema equivalente?

Sistemas Equivalentes

- Estamos interessados em encontrar métodos que nos digam se o sistema é compatível ou não e, em caso positivo, queremos encontrar as soluções do sistema.
- Queremos um algoritmo que possa ser aplicado a qualquer sistema.

Vamos usar a matriz ampliada do sistema para construir um sistema mais simples com a mesma solução.

Dois sistemas lineares são **equivalentes** se toda solução de um deles é também solução do outro.

Pergunta: Dado um sistema S e sua matriz ampliada A, que operações podemos realizar em A de forma que a matriz obtida represente um sistema equivalente?

Sistemas Equivalentes

- Estamos interessados em encontrar métodos que nos digam se o sistema é compatível ou não e, em caso positivo, queremos encontrar as soluções do sistema.
- Queremos um algoritmo que possa ser aplicado a qualquer sistema.

Vamos usar a matriz ampliada do sistema para construir um sistema mais simples com a mesma solução.

Dois sistemas lineares são **equivalentes** se toda solução de um deles é também solução do outro.

Pergunta: Dado um sistema S e sua matriz ampliada A, que operações podemos realizar em A de forma que a matriz obtida represente um sistema equivalente?

Sistemas Equivalentes

- Estamos interessados em encontrar métodos que nos digam se o sistema é compatível ou não e, em caso positivo, queremos encontrar as soluções do sistema.
- Queremos um algoritmo que possa ser aplicado a qualquer sistema.

Vamos usar a matriz ampliada do sistema para construir um sistema mais simples com a mesma solução.

Dois sistemas lineares são **equivalentes** se toda solução de um deles é também solução do outro.

Pergunta: Dado um sistema S e sua matriz ampliada A, que operações podemos realizar em A de forma que a matriz obtida represente um sistema equivalente?

Operações Elementares nas Linhas

i. Permutação da i-ésima linha com a j-ésima linha $(L_i \leftrightarrow L_j)$.

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

ii. Multiplicação da i-ésima linha por um escalar não nulo k $(L_i \to kL_i)$.

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to -2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Operações Elementares nas Linhas

i. Permutação da i-ésima linha com a j-ésima linha $(L_i \leftrightarrow L_j)$.

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

ii. Multiplicação da i-ésima linha por um escalar não nulo k $(L_i \to kL_i)$.

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to -2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Operações Elementares nas Linhas

iii. Substituição da i-ésima linha pela soma da i-ésima linha com k vezes a j-ésima linha $(L_i \to L_i + kL_j)$.

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$

Dadas duas matrizes A e B em $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, dizemos que B é **linha-equivalente** a A se B for obtida de A por um número finito de operações elementares nas linhas.

Notação: $A \sim B$ ou $A \to B$

Operações Elementares nas Linhas

iii. Substituição da i-ésima linha pela soma da i-ésima linha com k vezes a j-ésima linha $(L_i \to L_i + kL_j)$.

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$

Dadas duas matrizes A e B em $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, dizemos que B é **linha-equivalente** a A se B for obtida de A por um número finito de operações elementares nas linhas.

Notação: $A \sim B$ ou $A \to B$

Operações Elementares nas Linhas

Teorema: Dois sistemas lineares que possuem matrizes ampliadas linha-equivalentes são equivalentes.

Prova:

Sejam S e S' dois sistemas lineares e A e A' as matrizes ampliadas de S e S', respectivamente.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, dotted, "?"] \arrow[d, equal] & S' \arrow[d, equal] \\ A \arrow[r] & A' \end{tikzcd}$$

i. Se A' é obtida de A por uma permutação da i-ésima linha com a j-ésima linha, o resultado é evidente, pois S e S' são o mesmo sistema linear, apenas com a ordem de duas equações trocadas.

Operações Elementares nas Linhas

Teorema: Dois sistemas lineares que possuem matrizes ampliadas linha-equivalentes são equivalentes.

Prova:

Sejam S e S' dois sistemas lineares e A e A' as matrizes ampliadas de S e S', respectivamente.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, dotted, "?"] \arrow[d, equal] & S' \arrow[d, equal] \\ A \arrow[r] & A' \end{tikzcd}$$

i. Se A' é obtida de A por uma permutação da i-ésima linha com a j-ésima linha, o resultado é evidente, pois S e S' são o mesmo sistema linear, apenas com a ordem de duas equações trocadas.

Operações Elementares nas Linhas

Teorema: Dois sistemas lineares que possuem matrizes ampliadas linha-equivalentes são equivalentes.

Prova:

Sejam S e S' dois sistemas lineares e A e A' as matrizes ampliadas de S e S', respectivamente.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, dotted, "?"] \arrow[d, equal] & S' \arrow[d, equal] \\ A \arrow[r] & A' \end{tikzcd}$$

i. Se A' é obtida de A por uma permutação da i-ésima linha com a j-ésima linha, o resultado é evidente, pois S e S' são o mesmo sistema linear, apenas com a ordem de duas equações trocadas.

Operações Elementares nas Linhas

ii. Suponha que A' é obtida de A por multiplicação da i-ésima linha por um escalar não nulo k. As equações de S e S' são as mesmas, com exceção da i-ésima equação

$$S : a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$
$$S' : ka_{i1}x_1 + \cdots + ka_{in}x_n = kb_i$$

Se $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é solução de S, então

$$a_{i1}\alpha_1 + \cdots + a_{in}\alpha_n = b_i$$

Multiplicando por k, obtemos

$$k(a_{i1}\alpha_1 + \cdots + a_{in}\alpha_n) = kb_i$$
$$k(a_{i1}\alpha_1) + \cdots + k(a_{in}\alpha_n) = kb_i$$

ou seja, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é solução de S'.

A recíproca é análoga.

Operações Elementares nas Linhas

ii. Suponha que A' é obtida de A por multiplicação da i-ésima linha por um escalar não nulo k. As equações de S e S' são as mesmas, com exceção da i-ésima equação

$$S : a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

$$S' : ka_{i1}x_1 + \cdots + ka_{in}x_n = kb_i$$

Se $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é solução de S, então

$$a_{i1}\alpha_1 + \cdots + a_{in}\alpha_n = b_i$$

Multiplicando por k, obtemos

$$k(a_{i1}\alpha_1 + \cdots + a_{in}\alpha_n) = kb_i$$

$$k(a_{i1}\alpha_1) + \cdots + k(a_{in}\alpha_n) = kb_i$$

ou seja, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é solução de S'.

A recíproca é análoga.

Operações Elementares nas Linhas

ii. Suponha que A' é obtida de A por multiplicação da i-ésima linha por um escalar não nulo k. As equações de S e S' são as mesmas, com exceção da i-ésima equação

$$S : a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$
$$S' : ka_{i1}x_1 + \cdots + ka_{in}x_n = kb_i$$

Se $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é solução de S, então

$$a_{i1}\alpha_1 + \cdots + a_{in}\alpha_n = b_i$$

Multiplicando por k, obtemos

$$k(a_{i1}\alpha_1 + \cdots + a_{in}\alpha_n) = kb_i$$
$$k(a_{i1}\alpha_1) + \cdots + k(a_{in}\alpha_n) = kb_i$$

ou seja, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é solução de S'.

A recíproca é análoga.

Operações Elementares nas Linhas

ii. Suponha que A' é obtida de A por multiplicação da i-ésima linha por um escalar não nulo k. As equações de S e S' são as mesmas, com exceção da i-ésima equação

$$S : a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

$$S' : ka_{i1}x_1 + \cdots + ka_{in}x_n = kb_i$$

Se $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é solução de S, então

$$a_{i1}\alpha_1 + \cdots + a_{in}\alpha_n = b_i$$

Multiplicando por k, obtemos

$$k(a_{i1}\alpha_1 + \cdots + a_{in}\alpha_n) = kb_i$$

$$k(a_{i1}\alpha_1) + \cdots + k(a_{in}\alpha_n) = kb_i$$

ou seja, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é solução de S'.

A recíproca é análoga.

Operações Elementares nas Linhas

ii. Suponha que A' é obtida de A por multiplicação da i-ésima linha por um escalar não nulo k. As equações de S e S' são as mesmas, com exceção da i-ésima equação

$$S : a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$
$$S' : ka_{i1}x_1 + \cdots + ka_{in}x_n = kb_i$$

Se $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é solução de S, então

$$a_{i1}\alpha_1 + \cdots + a_{in}\alpha_n = b_i$$

Multiplicando por k, obtemos

$$k(a_{i1}\alpha_1 + \cdots + a_{in}\alpha_n) = kb_i$$
$$k(a_{i1}\alpha_1) + \cdots + k(a_{in}\alpha_n) = kb_i$$

ou seja, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é solução de S'.

A recíproca é análoga.

Operações Elementares nas Linhas

ii. Suponha que A' é obtida de A por multiplicação da i-ésima linha por um escalar não nulo k. As equações de S e S' são as mesmas, com exceção da i-ésima equação

$$S : a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

$$S' : ka_{i1}x_1 + \cdots + ka_{in}x_n = kb_i$$

Se $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é solução de S, então

$$a_{i1}\alpha_1 + \cdots + a_{in}\alpha_n = b_i$$

Multiplicando por k, obtemos

$$k(a_{i1}\alpha_1 + \cdots + a_{in}\alpha_n) = kb_i$$

$$k(a_{i1}\alpha_1) + \cdots + k(a_{in}\alpha_n) = kb_i$$

ou seja, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é solução de S'.

A recíproca é análoga.

Operações Elementares nas Linhas

ii. Suponha que A' é obtida de A por multiplicação da i-ésima linha por um escalar não nulo k. As equações de S e S' são as mesmas, com exceção da i-ésima equação

$$S : a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$
$$S' : ka_{i1}x_1 + \cdots + ka_{in}x_n = kb_i$$

Se $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é solução de S, então

$$a_{i1}\alpha_1 + \cdots + a_{in}\alpha_n = b_i$$

Multiplicando por k, obtemos

$$k(a_{i1}\alpha_1 + \cdots + a_{in}\alpha_n) = kb_i$$
$$k(a_{i1}\alpha_1) + \cdots + k(a_{in}\alpha_n) = kb_i$$

ou seja, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é solução de S'.

A recíproca é análoga.

Operações Elementares nas Linhas

iii. Suponha que A' é obtida de A por substituição da i-ésima linha pela soma da da i-ésima linha com um múltiplo k da j-ésima linha. As equações de S e S' são as mesmas, com exceção da i-ésima equação

$$S : a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$
$$S' : (a_{i1} + ka_{j1})x_1 + \cdots + (a_{in} + ka_{jn})x_n = b_i + kb_j$$

Se $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é solução de S, então

$$a_{i1}\alpha_1 + \cdots + a_{in}\alpha_n = b_i$$
$$a_{j1}\alpha_1 + \cdots + a_{jn}\alpha_n = b_j$$

Logo

$$(a_{i1}+ka_{j1})\alpha_1+\cdots+(a_{in}+ka_{jn})\alpha_n = a_{i1}\alpha_1+\cdots+a_{in}\alpha_n+k(a_{j1}\alpha_1+\cdots+a_{jn}\alpha_n)$$
$$= b_i + kb_j$$

Portanto, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é solução de S'. A recíproca é análoga. $\square$

Operações Elementares nas Linhas

iii. Suponha que A' é obtida de A por substituição da i-ésima linha pela soma da da i-ésima linha com um múltiplo k da j-ésima linha. As equações de S e S' são as mesmas, com exceção da i-ésima equação

$$S : a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$
$$S' : (a_{i1} + ka_{j1})x_1 + \cdots + (a_{in} + ka_{jn})x_n = b_i + kb_j$$

Se $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é solução de S, então

$$a_{i1}\alpha_1 + \cdots + a_{in}\alpha_n = b_i$$
$$a_{j1}\alpha_1 + \cdots + a_{jn}\alpha_n = b_j$$

Logo

$$(a_{i1} + ka_{j1})\alpha_1 + \cdots + (a_{in} + ka_{jn})\alpha_n = a_{i1}\alpha_1 + \cdots + a_{in}\alpha_n + k(a_{j1}\alpha_1 + \cdots + a_{jn}\alpha_n)$$
$$= b_i + kb_j$$

Portanto, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é solução de S'. A recíproca é análoga. $\square$

Operações Elementares nas Linhas

iii. Suponha que A' é obtida de A por substituição da i-ésima linha pela soma da da i-ésima linha com um múltiplo k da j-ésima linha. As equações de S e S' são as mesmas, com exceção da i-ésima equação

$$S : a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$
$$S' : (a_{i1} + ka_{j1})x_1 + \cdots + (a_{in} + ka_{jn})x_n = b_i + kb_j$$

Se $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é solução de S, então

$$a_{i1}\alpha_1 + \cdots + a_{in}\alpha_n = b_i$$
$$a_{j1}\alpha_1 + \cdots + a_{jn}\alpha_n = b_j$$

Logo

$$(a_{i1} + ka_{j1})\alpha_1 + \cdots + (a_{in} + ka_{jn})\alpha_n = a_{i1}\alpha_1 + \cdots + a_{in}\alpha_n + k(a_{j1}\alpha_1 + \cdots + a_{jn}\alpha_n)$$
$$= b_i + kb_j$$

Portanto, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é solução de S'. A recíproca é análoga. $\square$

Operações Elementares nas Linhas

iii. Suponha que A' é obtida de A por substituição da i-ésima linha pela soma da da i-ésima linha com um múltiplo k da j-ésima linha. As equações de S e S' são as mesmas, com exceção da i-ésima equação

$$S : a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

$$S' : (a_{i1} + ka_{j1})x_1 + \cdots + (a_{in} + ka_{jn})x_n = b_i + kb_j$$

Se $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é solução de S, então

$$a_{i1}\alpha_1 + \cdots + a_{in}\alpha_n = b_i$$

$$a_{j1}\alpha_1 + \cdots + a_{jn}\alpha_n = b_j$$

Logo

$$\begin{aligned}(a_{i1} + ka_{j1})\alpha_1 + \cdots + (a_{in} + ka_{jn})\alpha_n &= a_{i1}\alpha_1 + \cdots + a_{in}\alpha_n + k(a_{j1}\alpha_1 + \cdots + a_{jn}\alpha_n) \\ &= b_i + kb_j\end{aligned}$$

Portanto, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é solução de S'. A recíproca é análoga. $\square$

Operações Elementares nas Linhas

iii. Suponha que A' é obtida de A por substituição da i-ésima linha pela soma da da i-ésima linha com um múltiplo k da j-ésima linha. As equações de S e S' são as mesmas, com exceção da i-ésima equação

$$S : a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$
$$S' : (a_{i1} + ka_{j1})x_1 + \cdots + (a_{in} + ka_{jn})x_n = b_i + kb_j$$

Se $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é solução de S, então

$$a_{i1}\alpha_1 + \cdots + a_{in}\alpha_n = b_i$$
$$a_{j1}\alpha_1 + \cdots + a_{jn}\alpha_n = b_j$$

Logo

$$(a_{i1} + ka_{j1})\alpha_1 + \cdots + (a_{in} + ka_{jn})\alpha_n = a_{i1}\alpha_1 + \cdots + a_{in}\alpha_n + k(a_{j1}\alpha_1 + \cdots + a_{jn}\alpha_n)$$
$$= b_i + kb_j$$

Portanto, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é solução de S'. A recíproca é análoga. $\square$

Operações Elementares nas Linhas

iii. Suponha que A' é obtida de A por substituição da i-ésima linha pela soma da da i-ésima linha com um múltiplo k da j-ésima linha. As equações de S e S' são as mesmas, com exceção da i-ésima equação

$$S : a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$
$$S' : (a_{i1} + ka_{j1})x_1 + \cdots + (a_{in} + ka_{jn})x_n = b_i + kb_j$$

Se $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é solução de S, então

$$a_{i1}\alpha_1 + \cdots + a_{in}\alpha_n = b_i$$
$$a_{j1}\alpha_1 + \cdots + a_{jn}\alpha_n = b_j$$

Logo

$$(a_{i1} + ka_{j1})\alpha_1 + \cdots + (a_{in} + ka_{jn})\alpha_n = a_{i1}\alpha_1 + \cdots + a_{in}\alpha_n + k(a_{j1}\alpha_1 + \cdots + a_{jn}\alpha_n)$$
$$= b_i + kb_j$$

Portanto, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é solução de S'. A recíproca é análoga. $\square$

Operações Elementares nas Linhas

iii. Suponha que A' é obtida de A por substituição da i-ésima linha pela soma da da i-ésima linha com um múltiplo k da j-ésima linha. As equações de S e S' são as mesmas, com exceção da i-ésima equação

$$S : a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$
$$S' : (a_{i1} + ka_{j1})x_1 + \cdots + (a_{in} + ka_{jn})x_n = b_i + kb_j$$

Se $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é solução de S, então

$$a_{i1}\alpha_1 + \cdots + a_{in}\alpha_n = b_i$$
$$a_{j1}\alpha_1 + \cdots + a_{jn}\alpha_n = b_j$$

Logo

$$\begin{aligned}(a_{i1} + ka_{j1})\alpha_1 + \cdots + (a_{in} + ka_{jn})\alpha_n &= a_{i1}\alpha_1 + \cdots + a_{in}\alpha_n + k(a_{j1}\alpha_1 + \cdots + a_{jn}\alpha_n)\\ &= b_i + kb_j\end{aligned}$$

Portanto, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é solução de S'. A recíproca é análoga. $\square$

Operações Elementares nas Linhas

iii. Suponha que A' é obtida de A por substituição da i-ésima linha pela soma da da i-ésima linha com um múltiplo k da j-ésima linha. As equações de S e S' são as mesmas, com exceção da i-ésima equação

$$S : a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

$$S' : (a_{i1} + ka_{j1})x_1 + \cdots + (a_{in} + ka_{jn})x_n = b_i + kb_j$$

Se $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é solução de S, então

$$a_{i1}\alpha_1 + \cdots + a_{in}\alpha_n = b_i$$

$$a_{j1}\alpha_1 + \cdots + a_{jn}\alpha_n = b_j$$

Logo

$$(a_{i1} + ka_{j1})\alpha_1 + \cdots + (a_{in} + ka_{jn})\alpha_n = a_{i1}\alpha_1 + \cdots + a_{in}\alpha_n + k(a_{j1}\alpha_1 + \cdots + a_{jn}\alpha_n)$$
$$= b_i + kb_j$$

Portanto, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é solução de S'. A recíproca é análoga. $\square$

Operações Elementares nas Linhas

Exemplo:

$$S : \begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = A'$$

$$S' : \begin{cases} x + 2y = 2 \\ 0 = -3 \end{cases}$$

S' é incompatível. Como S e S' são equivalentes, então S é incompatível.

Operações Elementares nas Linhas

Exemplo:

$$S : \begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = A'$$

$$S' : \begin{cases} x + 2y = 2 \\ 0 = -3 \end{cases}$$

S' é incompatível. Como S e S' são equivalentes, então S é incompatível.

Operações Elementares nas Linhas

Exemplo:

$$S : \begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = A'$$

$$S' : \begin{cases} x + 2y = 2 \\ 0 = -3 \end{cases}$$

S' é incompatível. Como S e S' são equivalentes, então S é incompatível.

Operações Elementares nas Linhas

Exemplo:

$$S : \begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = A'$$

$$S' : \begin{cases} x + 2y = 2 \\ 0 = -3 \end{cases}$$

S' é incompatível. Como S e S' são equivalentes, então S é incompatível.

Operações Elementares nas Linhas

Exemplo:

$$S : \begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = A'$$

$$S' : \begin{cases} x + 2y = 2 \\ 0 = -3 \end{cases}$$

S' é incompatível. Como S e S' são equivalentes, então S é incompatível.

Operações Elementares nas Linhas

Exemplo:

$$S : \begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = A'$$

$$S' : \begin{cases} x + 2y = 2 \\ 0 = -3 \end{cases}$$

S' é incompatível. Como S e S' são equivalentes, então S é incompatível.