# Escalonamento

## Álgebra Linear

Mariana Silveira - Cristian Coletti

Universidade Federal do ABC

## Matrizes Escalonadas

**Definição:** Uma matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ está na **forma escalonada reduzida (ou na forma escada linha reduzida)** se:

a) O primeiro elemento não nulo de cada linha não nula de $A$ é 1 (esses elementos são chamados de pivôs).

b) Cada coluna de $A$ que contém um pivô, tem todos os seus outros elementos iguais a zero.

c) Toda linha nula de $A$ está abaixo de todas as linhas não nulas.

d) Se as linhas $1, \ldots, r$ são as linhas não nulas de $A$ e o primeiro elemento não nulo da $i$-ésima linha de $A$ ocorre na coluna $k_i$, então

$$k_1 < k_2 < \ldots < k_r. \leftarrow \text{o n. de zeros antes do pivô aumenta a cada linha}$$

Se a matriz $A$ safisfaz as propriedades $(a)$, $(c)$ e $(d)$, dizemos que $A$ está na **forma escalonada**.

## Matrizes Escalonadas

**Definição:** Uma matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ está na **forma escalonada reduzida (ou na forma escada linha reduzida)** se:

a) O primeiro elemento não nulo de cada linha não nula de $A$ é 1 (esses elementos são chamados de pivôs).

b) Cada coluna de $A$ que contém um pivô, tem todos os seus outros elementos iguais a zero.

c) Toda linha nula de $A$ está abaixo de todas as linhas não nulas.

d) Se as linhas $1, \ldots, r$ são as linhas não nulas de $A$ e o primeiro elemento não nulo da $i$-ésima linha de $A$ ocorre na coluna $k_i$, então

$$k_1 < k_2 < \ldots < k_r. \leftarrow \text{o n. de zeros antes do pivô aumenta a cada linha}$$

Se a matriz $A$ safisfaz as propriedades $(a)$, $(c)$ e $(d)$, dizemos que $A$ está na **forma escalonada**.

## Matrizes Escalonadas

**Definição:** Uma matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ está na **forma escalonada reduzida (ou na forma escada linha reduzida)** se:

a) O primeiro elemento não nulo de cada linha não nula de $A$ é 1 (esses elementos são chamados de pivôs).

b) Cada coluna de $A$ que contém um pivô, tem todos os seus outros elementos iguais a zero.

c) Toda linha nula de $A$ está abaixo de todas as linhas não nulas.

d) Se as linhas $1, \ldots, r$ são as linhas não nulas de $A$ e o primeiro elemento não nulo da $i$-ésima linha de $A$ ocorre na coluna $k_i$, então

$$k_1 < k_2 < \ldots < k_r. \leftarrow \text{o n. de zeros antes do pivô aumenta a cada linha}$$

Se a matriz $A$ safisfaz as propriedades $(a)$, $(c)$ e $(d)$, dizemos que $A$ está na **forma escalonada.**

## Matrizes Escalonadas

**Definição:** Uma matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ está na **forma escalonada reduzida (ou na forma escada linha reduzida)** se:

a) O primeiro elemento não nulo de cada linha não nula de $A$ é 1 (esses elementos são chamados de pivôs).

b) Cada coluna de $A$ que contém um pivô, tem todos os seus outros elementos iguais a zero.

c) Toda linha nula de $A$ está abaixo de todas as linhas não nulas.

d) Se as linhas $1, \ldots, r$ são as linhas não nulas de $A$ e o primeiro elemento não nulo da $i$-ésima linha de $A$ ocorre na coluna $k_i$, então

$$k_1 < k_2 < \ldots < k_r. \leftarrow \text{o n. de zeros antes do pivô aumenta a cada linha}$$

Se a matriz $A$ safisfaz as propriedades $(a)$, $(c)$ e $(d)$, dizemos que $A$ está na **forma escalonada.**

## Matrizes Escalonadas

**Definição:** Uma matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ está na **forma escalonada reduzida (ou na forma escada linha reduzida)** se:

a) O primeiro elemento não nulo de cada linha não nula de $A$ é 1 (esses elementos são chamados de pivôs).

b) Cada coluna de $A$ que contém um pivô, tem todos os seus outros elementos iguais a zero.

c) Toda linha nula de $A$ está abaixo de todas as linhas não nulas.

d) Se as linhas $1, \ldots, r$ são as linhas não nulas de $A$ e o primeiro elemento não nulo da $i$-ésima linha de $A$ ocorre na coluna $k_i$, então

$$k_1 < k_2 < \ldots < k_r. \leftarrow \text{o n. de zeros antes do pivô aumenta a cada linha}$$

Se a matriz $A$ safisfaz as propriedades $(a)$, $(c)$ e $(d)$, dizemos que $A$ está na **forma escalonada.**

# Matrizes Escalonadas

**Definição:** Uma matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ está na **forma escalonada reduzida (ou na forma escada linha reduzida)** se:

a) O primeiro elemento não nulo de cada linha não nula de $A$ é 1 (esses elementos são chamados de pivôs).

b) Cada coluna de $A$ que contém um pivô, tem todos os seus outros elementos iguais a zero.

c) Toda linha nula de $A$ está abaixo de todas as linhas não nulas.

d) Se as linhas $1, \ldots, r$ são as linhas não nulas de $A$ e o primeiro elemento não nulo da $i$-ésima linha de $A$ ocorre na coluna $k_i$, então

$$k_1 < k_2 < \ldots < k_r . \leftarrow \text{o n. de zeros antes do pivô aumenta a cada linha}$$

Se a matriz $A$ safisfaz as propriedades $(a)$, $(c)$ e $(d)$, dizemos que $A$ está na **forma escalonada.**

## Matrizes Escalonadas

**Definição:** Uma matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ está na **forma escalonada reduzida (ou na forma escada linha reduzida)** se:

a) O primeiro elemento não nulo de cada linha não nula de $A$ é 1 (esses elementos são chamados de pivôs).

b) Cada coluna de $A$ que contém um pivô, tem todos os seus outros elementos iguais a zero.

c) Toda linha nula de $A$ está abaixo de todas as linhas não nulas.

d) Se as linhas $1, \ldots, r$ são as linhas não nulas de $A$ e o primeiro elemento não nulo da $i$-ésima linha de $A$ ocorre na coluna $k_i$, então

$$k_1 < k_2 < \ldots < k_r. \leftarrow \text{o n. de zeros antes do pivô aumenta a cada linha}$$

Se a matriz $A$ safisfaz as propriedades $(a)$, $(c)$ e $(d)$, dizemos que $A$ está na **forma escalonada.**

## Matrizes Escalonadas

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ Não satisfaz (b). Está na forma escalonada.

2. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ Não satisfaz (c). Não está na forma escalonada.

3. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Não satisfaz (a) e não satisfaz (d). Não está na forma escalonada.

4. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Está na forma escalonada reduzida.

**Obs 1:** Dado um sistema $S$, se a matriz ampliada de $S$ está na forma escalonada, a solução de $S$ pode ser encontrada facilmente.

**Obs 2:** Os vetores não nulos nas linhas de uma matriz escalonada são L.I.

## Matrizes Escalonadas

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ Não satisfaz (b). Está na forma escalonada.

2. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ Não satisfaz (c). Não está na forma escalonada.

3. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Não satisfaz (a) e não satisfaz (d). Não está na forma escalonada.

4. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Está na forma escalonada reduzida.

**Obs 1:** Dado um sistema $S$, se a matriz ampliada de $S$ está na forma escalonada, a solução de $S$ pode ser encontrada facilmente.

**Obs 2:** Os vetores não nulos nas linhas de uma matriz escalonada são L.I.

## Matrizes Escalonadas

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ Não satisfaz (b). Está na forma escalonada.

2. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ Não satisfaz (c). Não está na forma escalonada.

3. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Não satisfaz (a) e não satisfaz (d). Não está na forma escalonada.

4. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Está na forma escalonada reduzida.

**Obs 1:** Dado um sistema $S$, se a matriz ampliada de $S$ está na forma escalonada, a solução de $S$ pode ser encontrada facilmente.

**Obs 2:** Os vetores não nulos nas linhas de uma matriz escalonada são L.I.

## Matrizes Escalonadas

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ Não satisfaz (b). Está na forma escalonada.

2. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ Não satisfaz (c). Não está na forma escalonada.

3. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Não satisfaz (a) e não satisfaz (d). Não está na forma escalonada.

4. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Está na forma escalonada reduzida.

**Obs 1:** Dado um sistema $S$, se a matriz ampliada de $S$ está na forma escalonada, a solução de $S$ pode ser encontrada facilmente.

**Obs 2:** Os vetores não nulos nas linhas de uma matriz escalonada são L.I.

## Matrizes Escalonadas

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ Não satisfaz (b). Está na forma escalonada.

2. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ Não satisfaz (c). Não está na forma escalonada.

3. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Não satisfaz (a) e não satisfaz (d). Não está na forma escalonada.

4. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Está na forma escalonada reduzida.

**Obs 1:** Dado um sistema $S$, se a matriz ampliada de $S$ está na forma escalonada, a solução de $S$ pode ser encontrada facilmente.

**Obs 2:** Os vetores não nulos nas linhas de uma matriz escalonada são L.I.

## Matrizes Escalonadas

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ Não satisfaz (b). Está na forma escalonada.

2. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ Não satisfaz (c). Não está na forma escalonada.

3. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Não satisfaz (a) e não satisfaz (d). Não está na forma escalonada.

4. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Está na forma escalonada reduzida.

**Obs 1:** Dado um sistema $S$, se a matriz ampliada de $S$ está na forma escalonada, a solução de $S$ pode ser encontrada facilmente.

**Obs 2:** Os vetores não nulos nas linhas de uma matriz escalonada são L.I.

## Matrizes Escalonadas

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ Não satisfaz (b). Está na forma escalonada.

2. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ Não satisfaz (c). Não está na forma escalonada.

3. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Não satisfaz (a) e não satisfaz (d). Não está na forma escalonada.

4. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Está na forma escalonada reduzida.

**Obs 1:** Dado um sistema $S$, se a matriz ampliada de $S$ está na forma escalonada, a solução de $S$ pode ser encontrada facilmente.

**Obs 2:** Os vetores não nulos nas linhas de uma matriz escalonada são L.I.

## Matrizes Escalonadas

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ Não satisfaz (b). Está na forma escalonada.

2. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ Não satisfaz (c). Não está na forma escalonada.

3. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Não satisfaz (a) e não satisfaz (d). Não está na forma escalonada.

4. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Está na forma escalonada reduzida.

**Obs 1:** Dado um sistema $S$, se a matriz ampliada de $S$ está na forma escalonada, a solução de $S$ pode ser encontrada facilmente.

**Obs 2:** Os vetores não nulos nas linhas de uma matriz escalonada são L.I.

## Matrizes Escalonadas

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ Não satisfaz (b). Está na forma escalonada.

2. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ Não satisfaz (c). Não está na forma escalonada.

3. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Não satisfaz (a) e não satisfaz (d). Não está na forma escalonada.

4. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Está na forma escalonada reduzida.

**Obs 1:** Dado um sistema $S$, se a matriz ampliada de $S$ está na forma escalonada, a solução de $S$ pode ser encontrada facilmente.

**Obs 2:** Os vetores não nulos nas linhas de uma matriz escalonada são L.I.

## Matrizes Escalonadas

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ Não satisfaz (b). Está na forma escalonada.

2. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ Não satisfaz (c). Não está na forma escalonada.

3. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Não satisfaz (a) e não satisfaz (d). Não está na forma escalonada.

4. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Está na forma escalonada reduzida.

**Obs 1:** Dado um sistema $S$, se a matriz ampliada de $S$ está na forma escalonada, a solução de $S$ pode ser encontrada facilmente.

**Obs 2:** Os vetores não nulos nas linhas de uma matriz escalonada são L.I.

# Matriz escalonada linha-equivalente

## Operações Elementares nas Linhas

i. Permutação da $i$-ésima linha com a $j$-ésima linha $(L_i \leftrightarrow L_j)$.

ii. Multiplicação da $i$-ésima linha por um escalar não nulo $k$ $(L_i \rightarrow kL_i)$.

iii. Substituição da $i$-ésima linha pela soma da $i$-ésima linha com $k$ vezes a $j$-ésima linha $(L_i \rightarrow L_i + kL_j)$.

**Obs:** Dado um sistema $S$ e sua matriz ampliada $A$, encontrar uma matriz linha-equivalente à matriz $A$ que esteja na forma escalonada nos dá um sistema bem mais simples equivalente a $S$.

**Pergunta:** Quando uma matriz é linha-equivalente a uma matriz na forma escalonada/ escalonada reduzida?

## Matriz escalonada linha-equivalente

### Operações Elementares nas Linhas

i. Permutação da *i*-ésima linha com a *j*-ésima linha $(L_i \leftrightarrow L_j)$.

ii. Multiplicação da *i*-ésima linha por um escalar não nulo $k$ $(L_i \rightarrow kL_i)$.

iii. Substituição da *i*-ésima linha pela soma da *i*-ésima linha com $k$ vezes a *j*-ésima linha $(L_i \rightarrow L_i + kL_j)$.

**Obs:** Dado um sistema $S$ e sua matriz ampliada $A$, encontrar uma matriz linha-equivalente à matriz $A$ que esteja na forma escalonada nos dá um sistema bem mais simples equivalente a $S$.

**Pergunta:** Quando uma matriz é linha-equivalente a uma matriz na forma escalonada/ escalonada reduzida?

## Matriz escalonada linha-equivalente

### Operações Elementares nas Linhas

i. Permutação da $i$-ésima linha com a $j$-ésima linha $(L_i \leftrightarrow L_j)$.

ii. Multiplicação da $i$-ésima linha por um escalar não nulo $k$ $(L_i \rightarrow kL_i)$.

iii. Substituição da $i$-ésima linha pela soma da $i$-ésima linha com $k$ vezes a $j$-ésima linha $(L_i \rightarrow L_i + kL_j)$.

**Obs:** Dado um sistema $S$ e sua matriz ampliada $A$, encontrar uma matriz linha-equivalente à matriz $A$ que esteja na forma escalonada nos dá um sistema bem mais simples equivalente a $S$.

**Pergunta:** Quando uma matriz é linha-equivalente a uma matriz na forma escalonada/ escalonada reduzida?

# Escalonamento

**Teorema:** Toda matriz é linha-equivalente a uma única matriz na forma escalonada reduzida.

## Escalonamento

**Teorema:** Toda matriz é linha-equivalente a uma única matriz na forma escalonada reduzida.

Ideia da Prova/Exemplo:

## Escalonamento

**Teorema:** Toda matriz é linha-equivalente a uma única matriz na forma escalonada reduzida.

Ideia da Prova/Exemplo:

**Passo 1:** Localize a coluna não nula mais a esquerda. Seja $j$ essa coluna. Considere $i$ uma linha que possui entrada não nula na coluna $j$ ($a_{ij} \neq 0$). Permute a primeira linha de $A$ com a linha $i$ ($L_1 \leftrightarrow L_i$).

## Escalonamento

**Teorema:** Toda matriz é linha-equivalente a uma única matriz na forma escalonada reduzida.

Ideia da Prova/Exemplo:

**Passo 1:** Localize a coluna não nula mais a esquerda. Seja $j$ essa coluna. Considere $i$ uma linha que possui entrada não nula na coluna $j$ ($a_{ij} \neq 0$). Permute a primeira linha de $A$ com a linha $i$ ($L_1 \leftrightarrow L_i$).

$$\begin{array}{r} \\ \text{linha } i \rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{array}\right] \\ \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{coluna } j \end{array} \end{array}$$

# Escalonamento

**Teorema:** Toda matriz é linha-equivalente a uma única matriz na forma escalonada reduzida.

Ideia da Prova/Exemplo:

**Passo 1:** Localize a coluna não nula mais a esquerda. Seja *j* essa coluna. Considere *i* uma linha que possui entrada não nula na coluna *j* ($a_{ij} \neq 0$). Permute a primeira linha de *A* com a linha *i* ($L_1 \leftrightarrow L_i$).

$$\begin{array}{rl} \text{linha } i \rightarrow & \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{cccccc} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{array}\right] \\ & \;\;\uparrow \\ & \text{coluna } j \end{array}$$

## Escalonamento

**Passo 2:** Multiplique a primeira linha por $\frac{1}{a_{1j}}$. ($L_1 \leftrightarrow \frac{1}{a_{1j}} L_1$).

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{2} L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{achamos o pivo!}$$

**Passo 3:** Some multiplos da primeira linha a todas as outras linhas para zerar a coluna do pivo. ($L_2 \to L_2 - a_{2j}L_1$, $L_3 \to L_3 - a_{3j}L_1, \ldots$).

$$\xrightarrow{L_3 \to L_3 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

# Escalonamento

**Passo 2:** Multiplique a primeira linha por $\frac{1}{a_{1j}}$. $(L_1 \leftrightarrow \frac{1}{a_{1j}} L_1)$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{2} L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{achamos o pivo!}$$

**Passo 3:** Some multiplos da primeira linha a todas as outras linhas para zerar a coluna do pivo. $(L_2 \to L_2 - a_{2j} L_1, L_3 \to L_3 - a_{3j} L_1, \ldots)$.

$$\xrightarrow{L_3 \to L_3 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

## Escalonamento

**Passo 2:** Multiplique a primeira linha por $\frac{1}{a_{1j}}$. ($L_1 \leftrightarrow \frac{1}{a_{1j}} L_1$).

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{2} L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{achamos o pivo!}$$

**Passo 3:** Some multiplos da primeira linha a todas as outras linhas para zerar a coluna do pivo. ($L_2 \to L_2 - a_{2j} L_1$, $L_3 \to L_3 - a_{3j} L_1, \ldots$).

$$\xrightarrow{L_3 \to L_3 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

## Escalonamento

**Passo 2:** Multiplique a primeira linha por $\frac{1}{a_{1j}}$. $(L_1 \leftrightarrow \frac{1}{a_{1j}} L_1)$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{2} L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{ achamos o pivo!}$$

**Passo 3:** Some multiplos da primeira linha a todas as outras linhas para zerar a coluna do pivo. $(L_2 \to L_2 - a_{2j} L_1, L_3 \to L_3 - a_{3j} L_1, \ldots)$.

$$\xrightarrow{L_3 \to L_3 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

## Escalonamento

- Recomece localizando a coluna não nula mais a esquerda da submatriz obtida desconsiderando a primeira linha. Realize o **Passo 1** para essa submatriz. ($L_1 \leftrightarrow L_i$).

$$\begin{array}{r} \\ \text{linha } i \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

$$\uparrow$$

coluna $j$

- Realize o **Passo 2** para a segunda linha. ($L_2 \to \frac{1}{a_{2j}} L_2$)

$$\xrightarrow{L_2 \to -\frac{1}{2} L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix} \leftarrow \text{achamos o segundo pivo!}$$

## Escalonamento

- Recomece localizando a coluna não nula mais a esquerda da submatriz obtida desconsiderando a primeira linha. Realize o **Passo 1** para essa submatriz. ($L_1 \leftrightarrow L_i$).

$$\begin{array}{r} \\ \text{linha } i \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{coluna } j \end{array}$$

- Realize o **Passo 2** para a segunda linha. ($L_2 \to \frac{1}{a_{2j}} L_2$)

$$\xrightarrow{L_2 \to -\frac{1}{2} L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix} \leftarrow \text{achamos o segundo pivo!}$$

## Escalonamento

- Recomece localizando a coluna não nula mais a esquerda da submatriz obtida desconsiderando a primeira linha. Realize o **Passo 1** para essa submatriz. ($L_1 \leftrightarrow L_i$).

$$\begin{array}{rcccccc} & 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ \text{linha } i \rightarrow & 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ & 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \\ & & & \uparrow & & & \\ & & & \text{coluna } j & & & \end{array}$$

- Realize o **Passo 2** para a segunda linha. ($L_2 \to \frac{1}{a_{2j}} L_2$)

$$\xrightarrow{L_2 \to -\frac{1}{2} L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix} \leftarrow \text{achamos o segundo pivo!}$$

# Escalonamento

- Recomece localizando a coluna não nula mais a esquerda da submatriz obtida desconsiderando a primeira linha. Realize o **Passo 1** para essa submatriz. ($L_1 \leftrightarrow L_i$).

$$\text{linha } i \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

$\uparrow$ coluna $j$

- Realize o **Passo 2** para a segunda linha. ($L_2 \to \frac{1}{a_{2j}} L_2$)

$$\xrightarrow{L_2 \to -\frac{1}{2} L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix} \leftarrow \text{achamos o segundo pivo!}$$

## Escalonamento

- Realize o **Passo 3** para zerar a coluna do segundo pivô. ($L_1 \to L_1 - a_{1j}L_2$, $L_3 \to L_3 - a_{3j}L_2, \ldots$).

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3\to L_3-5L_2]{L_1\to L_1+5L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & -\frac{23}{2} & -16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

- Realize o **Passo 1** para a submatriz obtida desconsiderando a primeira e a segunda linha. Realize o **Passo 2** para a terceira linha. Realize o **Passo 3** para zerar a coluna do segundo pivô.

$$\xrightarrow{L_3\to 2L_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & -\frac{23}{2} & -16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2\to L_2+\frac{7}{2}L_3]{L_1\to L_1+\frac{23}{2}L_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

# Escalonamento

- Realize o **Passo 3** para zerar a coluna do segundo pivô. ($L_1 \to L_1 - a_{1j}L_2$, $L_3 \to L_3 - a_{3j}L_2, \ldots$).

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3\to L_3-5L_2]{L_1\to L_1+5L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & -\frac{23}{2} & -16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

- Realize o **Passo 1** para a submatriz obtida desconsiderando a primeira e a segunda linha. Realize o **Passo 2** para a terceira linha. Realize o **Passo 3** para zerar a coluna do segundo pivô.

$$\xrightarrow{L_3\to 2L_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & -\frac{23}{2} & -16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2\to L_2+\frac{7}{2}L_3]{L_1\to L_1+\frac{23}{2}L_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

## Escalonamento

- Realize o **Passo 3** para zerar a coluna do segundo pivô. ($L_1 \to L_1 - a_{1j}L_2$, $L_3 \to L_3 - a_{3j}L_2, \ldots$).

$$\begin{bmatrix}1&2&-5&3&6&14\\0&0&1&0&-\frac{7}{2}&-6\\0&0&5&0&-17&-29\end{bmatrix}\xrightarrow[L_3\to L_3-5L_2]{L_1\to L_1+5L_2}\begin{bmatrix}1&2&0&3&-\frac{23}{2}&-16\\0&0&1&0&-\frac{7}{2}&-6\\0&0&0&0&\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}$$

- Realize o **Passo 1** para a submatriz obtida desconsiderando a primeira e a segunda linha. Realize o **Passo 2** para a terceira linha. Realize o **Passo 3** para zerar a coluna do segundo pivô.

$$\xrightarrow{L_3\to 2L_3}\begin{bmatrix}1&2&0&3&-\frac{23}{2}&-16\\0&0&1&0&-\frac{7}{2}&-6\\0&0&0&0&1&2\end{bmatrix}\xrightarrow[L_2\to L_2+\frac{7}{2}L_3]{L_1\to L_1+\frac{23}{2}L_3}\begin{bmatrix}1&2&0&3&0&7\\0&0&1&0&0&1\\0&0&0&0&1&1\end{bmatrix}$$

## Escalonamento

- Realize o **Passo 3** para zerar a coluna do segundo pivô. ($L_1 \to L_1 - a_{1j}L_2$, $L_3 \to L_3 - a_{3j}L_2, \ldots$).

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 5L_2]{L_1 \to L_1 + 5L_2} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 0 & 3 & -\frac{23}{2} & -16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

- Realize o **Passo 1** para a submatriz obtida desconsiderando a primeira e a segunda linha. Realize o **Passo 2** para a terceira linha. Realize o **Passo 3** para zerar a coluna do segundo pivô.

$$\xrightarrow{L_3 \to 2L_3} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 0 & 3 & -\frac{23}{2} & -16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \to L_2 + \frac{7}{2}L_3]{L_1 \to L_1 + \frac{23}{2}L_3} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

## Escalonamento

- Realize o **Passo 3** para zerar a coluna do segundo pivô. ($L_1 \to L_1 - a_{1j}L_2$, $L_3 \to L_3 - a_{3j}L_2, \ldots$).

$$\begin{bmatrix}1&2&-5&3&6&14\\0&0&1&0&-\frac{7}{2}&-6\\0&0&5&0&-17&-29\end{bmatrix}\xrightarrow[L_3\to L_3-5L_2]{L_1\to L_1+5L_2}\begin{bmatrix}1&2&0&3&-\frac{23}{2}&-16\\0&0&1&0&-\frac{7}{2}&-6\\0&0&0&0&\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}$$

- Realize o **Passo 1** para a submatriz obtida desconsiderando a primeira e a segunda linha. Realize o **Passo 2** para a terceira linha. Realize o **Passo 3** para zerar a coluna do segundo pivô.

$$\xrightarrow{L_3\to 2L_3}\begin{bmatrix}1&2&0&3&-\frac{23}{2}&-16\\0&0&1&0&-\frac{7}{2}&-6\\0&0&0&0&1&2\end{bmatrix}\xrightarrow[L_2\to L_2+\frac{7}{2}L_3]{L_1\to L_1+\frac{23}{2}L_3}\begin{bmatrix}1&2&0&3&0&7\\0&0&1&0&0&1\\0&0&0&0&1&1\end{bmatrix}$$

## Escalonamento

- Realize o **Passo 3** para zerar a coluna do segundo pivô. ($L_1 \to L_1 - a_{1j}L_2$, $L_3 \to L_3 - a_{3j}L_2, \ldots$).

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 5L_2]{L_1 \to L_1 + 5L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & -\frac{23}{2} & -16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

- Realize o **Passo 1** para a submatriz obtida desconsiderando a primeira e a segunda linha. Realize o **Passo 2** para a terceira linha. Realize o **Passo 3** para zerar a coluna do segundo pivô.

$$\xrightarrow{L_3 \to 2L_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & -\frac{23}{2} & -16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \to L_2 + \frac{7}{2}L_3]{L_1 \to L_1 + \frac{23}{2}L_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

# Escalonamento

- Unicidade: (Não mostraremos aqui) Não importa como variamos as operações que realizamos nas linhas, chegamos sempre a uma mesma matriz na forma escalonada reduzida.

**Obs:** Segue do Teorema que toda matriz é linha-equivalente a pelo menos uma matriz na forma escalonada. No entando uma sequências de operações podem produzir diferentes matrizes escalonadas linha-equivalentes à matriz inicial (unicidade só vale para a matriz escalonada reduzida).

## Escalonamento

- Unicidade: (Não mostraremos aqui) Não importa como variamos as operações que realizamos nas linhas, chegamos sempre a uma mesma matriz na forma escalonada reduzida.

**Obs:** Segue do Teorema que toda matriz é linha-equivalente a pelo menos uma matriz na forma escalonada. No entando uma sequências de operações podem produzir diferentes matrizes escalonadas linha-equivalentes à matriz inicial (unicidade só vale para a matriz escalonada reduzida).

## Exemplo

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow[L_3\to L_3-L_1]{L_2\to L_2+L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2\to\frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3\to L_3+4L_2]{L_1\to L_1-2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3\to\frac{1}{8}L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2\to L_2-2L_3]{L_1\to L_1+3L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} \end{bmatrix}$$

## Exemplo

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow[L_3\to L_3-L_1]{L_2\to L_2+L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2\to \frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3\to L_3+4L_2]{L_1\to L_1-2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3\to \frac{1}{8}L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2\to L_2-2L_3]{L_1\to L_1+3L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} \end{bmatrix}$$

## Exemplo

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow[L_3\to L_3-L_1]{L_2\to L_2+L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2\to \frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3\to L_3+4L_2]{L_1\to L_1-2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3\to \frac{1}{8}L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2\to L_2-2L_3]{L_1\to L_1+3L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} \end{bmatrix}$$

## Exemplo

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow[L_3\to L_3-L_1]{L_2\to L_2+L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2\to \frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3\to L_3+4L_2]{L_1\to L_1-2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3\to \frac{1}{8}L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2\to L_2-2L_3]{L_1\to L_1+3L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} \end{bmatrix}$$

## Exemplo

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_1]{L_2 \to L_2 + L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to \frac{1}{2} L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 + 4L_2]{L_1 \to L_1 - 2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \to \frac{1}{8} L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \to L_2 - 2L_3]{L_1 \to L_1 + 3L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} \end{bmatrix}$$

## Exemplo

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow[L_3\to L_3-L_1]{L_2\to L_2+L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2\to\frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3\to L_3+4L_2]{L_1\to L_1-2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3\to\frac{1}{8}L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2\to L_2-2L_3]{L_1\to L_1+3L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} \end{bmatrix}$$