Encontrando bases

Álgebra Linear

Mariana Silveira - Cristian Coletti

Universidade Federal do ABC

Aula passada

- A dimensão de um espaço vetorial V é o número de elementos de uma base de V.
- V espaço vetorial de dimensão n, dado um conjunto de geradores $\{v_1, ..., v_m\}$ com $m > n$, podemos extrair dele uma base.
- Dado um conjunto $\{v_1, ..., v_r\}$ LI de V para $r < n$, podemos completa-la para obter base.
- Todo subconjunto LI de V com n elementos é uma base.

Processo para determinar base para S.V de $\mathbb{R}^n$

Sejam $u_1, ..., u_m \in \mathbb{R}^n$

$$[u_1, ..., u_i, ..., u_j, ..., u_m] = [u_1, ..., u_j, ..., u_i, ..., u_m] \tag{1}$$

$$[u_1, ..., u_i, ..., u_m] = [u_1, ..., \alpha u_i, ..., u_m], \ \alpha \neq 0 \tag{2}$$

$$[u_1, ..., u_i, ..., u_j, ..., u_m] = [u_1, ..., u_i, ..., u_j + \alpha u_i, ..., u_m] \tag{3}$$

Demonstração (3)

$$[u_1, ..., u_i, ..., u_j + \alpha u_i, ..., u_m] \subset [u_1, ..., u_i, ..., u_m]$$

$$[u_1, ..., u_i, ..., u_j, ..., u_m] \subset [u_1, ..., u_i, ..., u_j + \alpha u_i, ..., u_m]$$

$u_j = -\alpha u_i + u_j + \alpha u_i$

Escalonamento

Seja $W = [u_1, ..., u_m]$ subespaço de $\mathbb{R}^n$. Seja $A_{m\times n}$ a matriz cujas linhas são os vetores $u_1, ..., u_m$.

$$A_{m\times n} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \leftarrow u_1 \\ \leftarrow u_2 \\ \vdots \\ \leftarrow u_m \end{array} \Longrightarrow \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \to v_1 \\ \vdots \\ \to v_r \\ \to 0 \end{array}$$

Por (1),(2), (3) quando escalonamos a matriz $A_{m\times n}$ nã mudamos o espaço gerado. $W = [u_1, ..., u_m] = [v_1, ..., v_m, o, ...o] = [v_1, ..., v_r]$.

$$\{v_1, ..., v_r\} \text{ é LI.} \tag{4}$$

Exemplo

$$A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$\alpha(1,2,3) + \beta(0,1,1) + \gamma(0,0,5) = (0,0,0)$

$\alpha = \beta = \gamma = 0.$

Portanto $\{v_1, v_2, v_3\}$ é base para o subespaço W.

Exemplo 1

Determine uma base para $W = [(2,1,1),(1,0,1),(1,1,0)]$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \to v_1 \\ \to v_2 \\ \to 0 \end{array}$$

$W = [(1,0,1),(0,1,-1)]$ LI.

Portanto $B = \{[(1,0,1),(0,1,-1)\}$ é base para W e $\dim W = 2$.

Exemplo 2

Determine uma base para $\mathbb{R}^4$ que contenha os vetores
$\{(1,1,1,1),(0,1,-1,0),(0,2,0,2)\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{2} & \frac{2}{2} \end{bmatrix}$$

Os vetores nas linhas são LI.

Se acrescentamos $(0,0,0,1)$ na linha a matriz continua escalonada!

Base para $\mathbb{R}^4$ $B = \{(1,1,1,1),(0,1,-1,0),(0,2,0,2),(0,0,0,1)\}$ LI.

Exemplo 3

Determine uma base para $\mathbb{R}^4$ que contenha os vetores
$\{(1,2,3,4),(0,0,1,0),(0,0,0,2)\}$

$$\begin{bmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,2 \end{bmatrix}$$

Os vetores nas linhas são LI.

Se acrescentamos $(0,1,0,0)$ na linha a matriz continua escalonada!

Base para $\mathbb{R}^4$

$B = \{(1,2,3,4),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,2)\}$ LI.