Posto, nulidade, Sistemas Lineares

Álgebra Linear

Mariana Silveira - Cristian Coletti

Universidade Federal do ABC

Posto e Nulidade

• Vimos que toda matriz é linha-equivalente a uma única matriz na forma escalonada reduzida.

Dada $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz qualquer, o **posto** de A, que denotamos por $p(A)$, é o número de linhas não nulas da matriz na forma escalonada reduzida linha-equivalente a A. A **nulidade** de A é $n - p(A)$.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 2L_1]{L_2 \to L_2 + L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto: $p(A) = 2$, $n(A) = 2$.

Posto e Nulidade

• Vimos que toda matriz é linha-equivalente a uma única matriz na forma escalonada reduzida.

Dada $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz qualquer, o **posto** de A, que denotamos por $p(A)$, é o número de linhas não nulas da matriz na forma escalonada reduzida linha-equivalente a A. A **nulidade** de A é $n - p(A)$.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 2L_1]{L_2 \to L_2 + L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto: $p(A) = 2$, $n(A) = 2$.

Posto e Nulidade

• Vimos que toda matriz é linha-equivalente a uma única matriz na forma escalonada reduzida.

Dada $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz qualquer, o **posto** de A, que denotamos por $p(A)$, é o número de linhas não nulas da matriz na forma escalonada reduzida linha-equivalente a A. A **nulidade** de A é $n - p(A)$.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 2L_1]{L_2 \to L_2 + L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto: $p(A) = 2$, $n(A) = 2$.

Posto e Nulidade

• Vimos que toda matriz é linha-equivalente a uma única matriz na forma escalonada reduzida.

Dada $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz qualquer, o **posto** de A, que denotamos por $p(A)$, é o número de linhas não nulas da matriz na forma escalonada reduzida linha-equivalente a A. A **nulidade** de A é $n - p(A)$.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 2L_1]{L_2 \to L_2 + L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto: $p(A) = 2$, $n(A) = 2$.

Posto e Nulidade

• Vimos que toda matriz é linha-equivalente a uma única matriz na forma escalonada reduzida.

Dada $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ uma matriz qualquer, o **posto** de A, que denotamos por $p(A)$, é o número de linhas não nulas da matriz na forma escalonada reduzida linha-equivalente a A. A **nulidade** de A é $n - p(A)$.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 2L_1]{L_2 \to L_2 + L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto: $p(A) = 2$, $n(A) = 2$.

Posto e Nulidade

• Vimos que toda matriz é linha-equivalente a uma única matriz na forma escalonada reduzida.

Dada $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz qualquer, o **posto** de A, que denotamos por $p(A)$, é o número de linhas não nulas da matriz na forma escalonada reduzida linha-equivalente a A. A **nulidade** de A é $n - p(A)$.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 2L_1]{L_2 \to L_2 + L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto: $p(A) = 2$, $n(A) = 2$.

Posto e Nulidade

Seja A uma matriz qualquer.

- Vimos que o espaço gerado pelos vetores nas linhas de A não muda quando realizamos operações elementares nas linhas da matriz.
- Quando uma matriz está na forma escalonada, os vetores não nulos nas linhas são L.I. Esses vetores formam então uma base para o espaço gerado pelos vetores nas linhas.

Teorema O posto de uma matriz é a dimensão do espaço gerado pelos vetores nas linhas da matriz, ou seja, é o número de vetores linearmente independentes nas linhas da matriz.

Portanto o número de linhas não nulas de toda matriz na forma escalonada linha-equivalente a A é sempre o mesmo e é igual ao posto de A!!

Posto e Nulidade

Seja A uma matriz qualquer.

- Vimos que o espaço gerado pelos vetores nas linhas de A não muda quando realizamos operações elementares nas linhas da matriz.
- Quando uma matriz está na forma escalonada, os vetores não nulos nas linhas são L.I. Esses vetores formam então uma base para o espaço gerado pelos vetores nas linhas.

Teorema O posto de uma matriz é a dimensão do espaço gerado pelos vetores nas linhas da matriz, ou seja, é o número de vetores linearmente independentes nas linhas da matriz.

Portanto o número de linhas não nulas de toda matriz na forma escalonada linha-equivalente a A é sempre o mesmo e é igual ao posto de A!!

Posto e Nulidade

Seja A uma matriz qualquer.

- Vimos que o espaço gerado pelos vetores nas linhas de A não muda quando realizamos operações elementares nas linhas da matriz.
- Quando uma matriz está na forma escalonada, os vetores não nulos nas linhas são L.I. Esses vetores formam então uma base para o espaço gerado pelos vetores nas linhas.

Teorema O posto de uma matriz é a dimensão do espaço gerado pelos vetores nas linhas da matriz, ou seja, é o número de vetores linearmente independentes nas linhas da matriz.

Portanto o número de linhas não nulas de toda matriz na forma escalonada linha-equivalente a A é sempre o mesmo e é igual ao posto de A!!

Sistemas Lineares

Seja S um sistema linear com m equações e n incógnitas

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Longrightarrow M_A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Método da eliminação de Gauss-Jordan: Seja S um sistema linear e M_A sua matriz ampliada. Esse método consiste em reduzir a matriz M_A à forma escalonada reduzida (forma escada). A matriz obtida representa um sistema simples o suficiente a ponto de nos permitir visualizar se o sistema é compatível e, em caso positivo, visualizar a solução após poucos passos.

Sistemas Lineares

Seja S um sistema linear com m equações e n incógnitas

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Longrightarrow \quad M_A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Método da eliminação de Gauss-Jordan: Seja S um sistema linear e M_A sua matriz ampliada. Esse método consiste em reduzir a matriz M_A à forma escalonada reduzida (forma escada). A matriz obtida representa um sistema simples o suficiente a ponto de nos permitir visualizar se o sistema é compatível e, em caso positivo, visualizar a solução após poucos passos.

Exemplos:

1. $S:\begin{cases} 2x+1y=5 \\ 1x-3y=6 \end{cases}$

$$M_A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1\to\frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2\to L_2-L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & -7/2 & 7/2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2\to-\frac{2}{7}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1\to L_1-\frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$S':\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$

- Solução: $\{(3,-1)\}$ $\leftarrow$ S é compatível determinado.
- $p(M_C)=2, p(M_A)=2, n(M_C)=0.$

Exemplos:

1. $S: \begin{cases} 2x + 1y = 5 \\ 1x - 3y = 6 \end{cases}$

$$M_A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & -7/2 & 7/2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \to -\frac{2}{7}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 - \frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$S': \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$

- Solução: $\{(3, -1)\}$ $\leftarrow$ S é compatível determinado.
- $p(M_C) = 2$, $p(M_A) = 2$, $n(M_C) = 0$.

Exemplos:

1. $S : \begin{cases} 2x + 1y = 5 \\ 1x - 3y = 6 \end{cases}$

$$M_A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & -7/2 & 7/2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \to -\frac{2}{7}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 - \frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$S' : \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$

- Solução: $\{(3, -1)\}$ $\leftarrow$ S é compatível determinado.
- $p(M_C) = 2, p(M_A) = 2, n(M_C) = 0.$

Exemplos:

1. $S: \begin{cases} 2x + 1y = 5 \\ 1x - 3y = 6 \end{cases}$

$$M_A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & -7/2 & 7/2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \to -\frac{2}{7}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 - \frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$S': \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$

- Solução: $\{(3, -1)\} \leftarrow$ S é compatível determinado.
- $p(M_C) = 2, p(M_A) = 2, n(M_C) = 0.$

Exemplos:

1. $S : \begin{cases} 2x + 1y = 5 \\ 1x - 3y = 6 \end{cases}$

$$M_A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & -7/2 & 7/2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \to -\frac{2}{7}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 - \frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$S' : \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$

- Solução: $\{(3, -1)\}$ $\leftarrow$ S é compatível determinado.
- $p(M_C) = 2, p(M_A) = 2, n(M_C) = 0.$

Exemplos:

1. $S : \begin{cases} 2x + 1y = 5 \\ 1x - 3y = 6 \end{cases}$

$$M_A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & -7/2 & 7/2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \to -\frac{2}{7}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 - \frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$S' : \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$

- Solução: $\{(3, -1)\} \leftarrow$ S é compatível determinado.
- $p(M_C) = 2, p(M_A) = 2, n(M_C) = 0.$

Exemplos:

1. $S : \begin{cases} 2x + 1y = 5 \\ 1x - 3y = 6 \end{cases}$

$$M_A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & -7/2 & 7/2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \to -\frac{2}{7}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 - \frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$S' : \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$

- Solução: $\{(3, -1)\}$ $\leftarrow$ S é compatível determinado.
- $p(M_C) = 2$, $p(M_A) = 2$, $n(M_C) = 0$.

Exemplos:

1. $S : \begin{cases} 2x + 1y = 5 \\ 1x - 3y = 6 \end{cases}$

$$M_A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & -7/2 & 7/2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \to -\frac{2}{7}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 - \frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$S' : \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$

- Solução: $\{(3, -1)\} \leftarrow$ S é compatível determinado.
- $p(M_C) = 2, p(M_A) = 2, n(M_C) = 0.$

Exemplos:

1. $S : \begin{cases} 2x + 1y = 5 \\ 1x - 3y = 6 \end{cases}$

$$M_A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & -7/2 & 7/2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \to -\frac{2}{7}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 - \frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$S' : \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$

- Solução: $\{(3, -1)\} \leftarrow$ S é compatível determinado.
- $p(M_C) = 2$, $p(M_A) = 2$, $n(M_C) = 0$.

Exemplos

2. $S : \begin{cases} 2x + 1y = 5 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases}$

$$M_A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 6 & 3 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 6L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$S' : \begin{cases} x + y/2 = 5/2 \\ 0 = 0 \end{cases}$

- Solução: $\{(\frac{5-y}{2}, y), y \in \mathbb{R}\} \leftarrow$ S é compatível indeterminado.
- $p(M_C) = 1, p(M_A) = 1, n(M_C) = 1.$

A nulidade da matriz dos coeficientes é chamada **grau de liberdade do sistema**

- No Exemplo 2, y é chamada de variável livre e x é a variável líder.

Exemplos

2. $S: \begin{cases} 2x + 1y = 5 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases}$

$$M_A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 6 & 3 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 6L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$S': \begin{cases} x + y/2 = 5/2 \\ 0 = 0 \end{cases}$

- Solução: $\{(\frac{5-y}{2}, y), y \in \mathbb{R}\} \leftarrow$ S é compatível indeterminado.
- $p(M_C) = 1$, $p(M_A) = 1$, $n(M_C) = 1$.

A nulidade da matriz dos coeficientes é chamada **grau de liberdade do sistema**

- No Exemplo 2, y é chamada de variável livre e x é a variável líder.

Exemplos

2. $S:\begin{cases} 2x+1y=5 \\ 6x+3y=15 \end{cases}$

$$M_A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1\to\frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 6 & 3 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2\to L_2-6L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$S':\begin{cases} x+y/2=5/2 \\ 0=0 \end{cases}$

- Solução: $\{(\frac{5-y}{2},y),y\in\mathbb{R}\}\leftarrow$ S é compatível indeterminado.
- $p(M_C)=1$, $p(M_A)=1$, $n(M_C)=1$.

A nulidade da matriz dos coeficientes é chamada **grau de liberdade do sistema**

- No Exemplo 2, y é chamada de variável livre e x é a variável líder.

Exemplos

2. $S : \begin{cases} 2x + 1y = 5 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases}$

$$M_A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 6 & 3 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 6L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$S' : \begin{cases} x + y/2 = 5/2 \\ 0 = 0 \end{cases}$

- Solução: $\{(\frac{5-y}{2}, y), y \in \mathbb{R}\} \leftarrow$ S é compatível indeterminado.
- $p(M_C) = 1, p(M_A) = 1, n(M_C) = 1.$

A nulidade da matriz dos coeficientes é chamada **grau de liberdade do sistema**

- No Exemplo 2, y é chamada de variável livre e x é a variável líder.

Exemplos

2. $S : \begin{cases} 2x + 1y = 5 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases}$

$$M_A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 6 & 3 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 6L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S' : \begin{cases} x + y/2 = 5/2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

- Solução: $\{(\frac{5-y}{2}, y), y \in \mathbb{R}\} \leftarrow$ S é compatível indeterminado.
- $p(M_C) = 1, p(M_A) = 1, n(M_C) = 1.$

A nulidade da matriz dos coeficientes é chamada **grau de liberdade do sistema**

- No Exemplo 2, y é chamada de variável livre e x é a variável líder.

Exemplos

2. $S : \begin{cases} 2x + 1y = 5 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases}$

$$M_A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 6 & 3 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 6L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$S' : \begin{cases} x + y/2 = 5/2 \\ 0 = 0 \end{cases}$

- Solução: $\{(\frac{5-y}{2}, y), y \in \mathbb{R}\} \leftarrow$ S é compatível indeterminado.
- $p(M_C) = 1$, $p(M_A) = 1$, $n(M_C) = 1$.

A nulidade da matriz dos coeficientes é chamada **grau de liberdade do sistema**

- No Exemplo 2, y é chamada de variável livre e x é a variável líder.

Exemplos

2. $S : \begin{cases} 2x + 1y = 5 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases}$

$$M_A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 6 & 3 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 6L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$S' : \begin{cases} x + y/2 = 5/2 \\ 0 = 0 \end{cases}$

- Solução: $\{(\frac{5-y}{2}, y), y \in \mathbb{R}\} \leftarrow$ S é compatível indeterminado.
- $p(M_C) = 1$, $p(M_A) = 1$, $n(M_C) = 1$.

A nulidade da matriz dos coeficientes é chamada **grau de liberdade do sistema**

- No Exemplo 2, y é chamada de variável livre e x é a variável líder.

Exemplos

2. $S : \begin{cases} 2x + 1y = 5 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases}$

$$M_A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 6 & 3 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 6L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S' : \begin{cases} x + y/2 = 5/2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

- Solução: $\{(\frac{5-y}{2}, y), y \in \mathbb{R}\} \leftarrow$ S é compatível indeterminado.
- $p(M_C) = 1$, $p(M_A) = 1, n(M_C) = 1$.

A nulidade da matriz dos coeficientes é chamada **grau de liberdade do sistema**

- No Exemplo 2, y é chamada de variável livre e x é a variável líder.

Exemplos

2. $S : \begin{cases} 2x + 1y = 5 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases}$

$$M_A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 6 & 3 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 6L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$S' : \begin{cases} x + y/2 = 5/2 \\ 0 = 0 \end{cases}$

- Solução: $\{(\frac{5-y}{2}, y), y \in \mathbb{R}\} \leftarrow$ S é compatível indeterminado.
- $p(M_C) = 1, p(M_A) = 1, n(M_C) = 1.$

A nulidade da matriz dos coeficientes é chamada **grau de liberdade do sistema**

- No Exemplo 2, y é chamada de variável livre e x é a variável líder.

Exemplos

2. $S : \begin{cases} 2x + 1y = 5 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases}$

$$M_A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 6 & 3 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 6L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$S' : \begin{cases} x + y/2 = 5/2 \\ 0 = 0 \end{cases}$

- Solução: $\{(\frac{5-y}{2}, y), y \in \mathbb{R}\} \leftarrow$ S é compatível indeterminado.
- $p(M_C) = 1$, $p(M_A) = 1$, $n(M_C) = 1$.

A nulidade da matriz dos coeficientes é chamada **grau de liberdade do sistema**

- No Exemplo 2, y é chamada de variável livre e x é a variável líder.

Exemplos

3. $S: \begin{cases} 2x + 1y = 5 \\ 6x + 3y = 10 \end{cases}$

$$M_A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 6 & 3 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 6L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \to -\frac{1}{5}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 - \frac{5}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$S': \begin{cases} x + y/2 = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}$

- Solução: $\emptyset \leftarrow$ S incompatível.
- $p(M_C) = 1$, $p(M_A) = 2$.

Exemplos

3. $S : \begin{cases} 2x + 1y = 5 \\ 6x + 3y = 10 \end{cases}$

$$M_A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 6 & 3 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 6L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \to -\frac{1}{5}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 - \frac{5}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$S' : \begin{cases} x + y/2 = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}$

- Solução: $\emptyset \leftarrow$ S incompatível.
- $p(M_C) = 1$, $p(M_A) = 2$.

Exemplos

3. $S: \begin{cases} 2x + 1y = 5 \\ 6x + 3y = 10 \end{cases}$

$$M_A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 6 & 3 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 6L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \to -\frac{1}{5}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 - \frac{5}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$S': \begin{cases} x + y/2 = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}$

- Solução: $\emptyset$ $\leftarrow$ S incompatível.
- $p(M_C) = 1$, $p(M_A) = 2$.

Exemplos

3. $S : \begin{cases} 2x + 1y = 5 \\ 6x + 3y = 10 \end{cases}$

$$M_A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{2} L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 6 & 3 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 6L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \to -\frac{1}{5} L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 - \frac{5}{2} L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$S' : \begin{cases} x + y/2 = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}$

- Solução: $\emptyset \leftarrow$ S incompatível.
- $p(M_C) = 1$, $p(M_A) = 2$.

Exemplos

3. $S: \begin{cases} 2x + 1y = 5 \\ 6x + 3y = 10 \end{cases}$

$$M_A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 6 & 3 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 6L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \to -\frac{1}{5}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 - \frac{5}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$S': \begin{cases} x + y/2 = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}$

- Solução: $\emptyset \leftarrow$ S incompatível.
- $p(M_C) = 1$, $p(M_A) = 2$.

Exemplos

3. $S: \begin{cases} 2x + 1y = 5 \\ 6x + 3y = 10 \end{cases}$

$$M_A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 6 & 3 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 6L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \to -\frac{1}{5}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 - \frac{5}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$S' : \begin{cases} x + y/2 = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}$

- Solução: $\emptyset \leftarrow$ S incompatível.
- $p(M_C) = 1$, $p(M_A) = 2$.

Exemplos

3. $S : \begin{cases} 2x + 1y = 5 \\ 6x + 3y = 10 \end{cases}$

$$M_A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 6 & 3 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 6L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \to -\frac{1}{5}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 - \frac{5}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$S' : \begin{cases} x + y/2 = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}$

- Solução: $\emptyset \leftarrow$ S incompatível.
- $p(M_C) = 1$, $p(M_A) = 2$.

Exemplos

3. $S : \begin{cases} 2x + 1y = 5 \\ 6x + 3y = 10 \end{cases}$

$$M_A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 6 & 3 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 6L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \to -\frac{1}{5}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 - \frac{5}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$S' : \begin{cases} x + y/2 = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}$

- Solução: $\emptyset \leftarrow$ S incompatível.
- $p(M_C) = 1,\ p(M_A) = 2.$

Exemplos

3. $S : \begin{cases} 2x + 1y = 5 \\ 6x + 3y = 10 \end{cases}$

$$M_A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 6 & 3 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 6L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \to -\frac{1}{5}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 - \frac{5}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S' : \begin{cases} x + y/2 = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

- Solução: $\emptyset \leftarrow$ S incompatível.
- $p(M_C) = 1$, $p(M_A) = 2$.

Classificação de Sistemas Lineres

Sejam S um sistema linear com m equações e n incógnitas, M_A a matriz ampliada de S e M_C a matriz dos coeficientes de S.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2\ldots & \quad & n & n+1 \end{array} \\ M_A = & \left[\begin{array}{cccc|c} \quad & \quad & \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad & \quad & \quad \end{array}\right] \\ & \underbrace{\hspace{4cm}}_{M_C} \end{array}$$

matriz dos termos independentes

Classificação de Sistemas Lineres

Sejam S um sistema linear com m equações e n incógnitas, M_A a matriz ampliada de S e M_C a matriz dos coeficientes de S. Então

i. S admite solução se, e somente se, $p(M_A) = p(M_C)$ (S é incompatível se, e somente se, $p(M_A) \neq p(M_C)$).

$$M_A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2\ldots & \qquad n & n+1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{c:c} \qquad\qquad\qquad & \qquad \\ & \\ & \end{array}\right] \\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{M_C} \qquad\quad \end{array}$$

matriz
dos termos
independentes

Classificação de Sistemas Lineres

Sejam S um sistema linear com m equações e n incógnitas, M_A a matriz ampliada de S e M_C a matriz dos coeficientes de S. Então

i. S admite solução se, e somente se, $p(M_A) = p(M_C)$ (S é incompatível se, e somente se, $p(M_A) \neq p(M_C)$).

ii. Se $p(M_A) = p(M_C) = n$, então S é compatível determinado. Nesse caso a $n(M_C) = n - p(M_C) = 0$, ou seja, o grau de liberdade do sistema é 0 (0 variáveis livres.)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc:c} 1 & 2\ldots & & n & n{+}1 \end{array} \\ M_A = & \left[\begin{array}{cccc:c} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ \end{array}\right] \\ & \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{M_C} \end{array}$$

matriz dos termos independentes

Classificação de Sistemas Lineres

Sejam S um sistema linear com m equações e n incógnitas, M_A a matriz ampliada de S e M_C a matriz dos coeficientes de S. Então

i. S admite solução se, e somente se, $p(M_A) = p(M_C)$ (S é incompatível se, e somente se, $p(M_A) \neq p(M_C)$).

ii. Se $p(M_A) = p(M_C) = n$, então S é compatível determinado. Nesse caso a $n(M_C) = n - p(M_C) = 0$, ou seja, o grau de liberdade do sistema é 0 (0 variáveis livres.)

iii. Se $p(M_A) = p(M_C) < n$, então S é compatível indeterminado. Nesse caso, o grau de liberdade do sistema é $n - p(M_C)$ ($n - p(M_C)$) variáveis livres e $p(M_C)$ variáveis escritas em função das variáveis livres.)

$$M_A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2\ldots & n & n{+}1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \quad & \quad & \quad & \quad \\ \\ \\ \end{array}\right] \end{array}$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{M_C}$ matriz dos termos independentes

Soluções de Sistemas Lineares

Método da eliminação de Gauss: Seja S um sistema linear e M_A sua matriz ampliada. Esse método consiste em reduzir a matriz M_A à forma escalonada sem continuar até a forma escalonada reduzida. A matriz obtida representa um sistema equivalente a S que pode ser resolvido por retro-substituição.

- No Passo 3, só precisamos zerar as etradas abaixo do pivô.

Exemplos: 1. $S : \begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$

$$M_A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 3L_1]{L_2 \to L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to \frac{L_2}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Soluções de Sistemas Lineares

Método da eliminação de Gauss: Seja S um sistema linear e M_A sua matriz ampliada. Esse método consiste em reduzir a matriz M_A à forma escalonada sem continuar até a forma escalonada reduzida. A matriz obtida representa um sistema equivalente a S que pode ser resolvido por retro-substituição.

- No Passo 3, só precisamos zerar as etradas abaixo do pivô.

Exemplos: 1. $S: \begin{cases} x+y+2z=9 \\ 2x+4y-3z=1 \\ 3x+6y-5z=0 \end{cases}$

$$M_A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 3L_1]{L_2 \to L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to \frac{L_2}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Soluções de Sistemas Lineares

Método da eliminação de Gauss: Seja S um sistema linear e M_A sua matriz ampliada. Esse método consiste em reduzir a matriz M_A à forma escalonada sem continuar até a forma escalonada reduzida. A matriz obtida representa um sistema equivalente a S que pode ser resolvido por retro-substituição.

- No Passo 3, só precisamos zerar as etradas abaixo do pivô.

Exemplos: 1. $S : \begin{cases} x+y+2z=9 \\ 2x+4y-3z=1 \\ 3x+6y-5z=0 \end{cases}$

$$M_A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 3L_1]{L_2 \to L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to \frac{L_2}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Soluções de Sistemas Lineares

Método da eliminação de Gauss: Seja S um sistema linear e M_A sua matriz ampliada. Esse método consiste em reduzir a matriz M_A à forma escalonada sem continuar até a forma escalonada reduzida. A matriz obtida representa um sistema equivalente a S que pode ser resolvido por retro-substituição.

- No Passo 3, só precisamos zerar as etradas abaixo do pivô.

Exemplos: 1. $S : \begin{cases} x+y+2z=9 \\ 2x+4y-3z=1 \\ 3x+6y-5z=0 \end{cases}$

$$M_A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 3L_1]{L_2 \to L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to \frac{L_2}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Soluções de Sistemas Lineares

Método da eliminação de Gauss: Seja S um sistema linear e M_A sua matriz ampliada. Esse método consiste em reduzir a matriz M_A à forma escalonada sem continuar até a forma escalonada reduzida. A matriz obtida representa um sistema equivalente a S que pode ser resolvido por retro-substituição.

- No Passo 3, só precisamos zerar as etradas abaixo do pivô.

Exemplos: 1. $S : \begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$

$$M_A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 3L_1]{L_2 \to L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to \frac{L_2}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Soluções de Sistemas Lineares

Método da eliminação de Gauss: Seja S um sistema linear e M_A sua matriz ampliada. Esse método consiste em reduzir a matriz M_A à forma escalonada sem continuar até a forma escalonada reduzida. A matriz obtida representa um sistema equivalente a S que pode ser resolvido por retro-substituição.

- No Passo 3, só precisamos zerar as etradas abaixo do pivô.

Exemplos: 1. $S : \begin{cases} x+y+2z=9 \\ 2x+4y-3z=1 \\ 3x+6y-5z=0 \end{cases}$

$$M_A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 3L_1]{L_2 \to L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to \frac{L_2}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Exemplos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 3L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to -2L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$S' : \begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ y - \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2} \\ z = 3 \end{cases}$$

- Obtemos a solução de S' por retro-substituição.
  - Substituímos o valor de z (obtido na Equação 3) na Equação 2:

    $y - \frac{7}{2}.3 = -\frac{17}{2} \Rightarrow y = 2$
  - Substituímos o valor de y e z na Equação 1:

    $x + 2 + 6 = 9 \Rightarrow x = 1$

Solução: $\{(1, 2, 3)\}$

Exemplos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 3L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to -2L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$S' : \begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ y - \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2} \\ z = 3 \end{cases}$$

- Obtemos a solução de S' por retro-substituição.
  - Substituímos o valor de z (obtido na Equação 3) na Equação 2:
    $y - \frac{7}{2}.3 = -\frac{17}{2} \Rightarrow y = 2$
  - Substituímos o valor de y e z na Equação 1:
    $x + 2 + 6 = 9 \Rightarrow x = 1$

Solução: $\{(1, 2, 3)\}$

Exemplos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 3L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to -2L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$S' : \begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ y - \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2} \\ z = 3 \end{cases}$$

- Obtemos a solução de S' por retro-substituição.
  - Substituímos o valor de z (obtido na Equação 3) na Equação 2:
    $y - \frac{7}{2}.3 = -\frac{17}{2} \Rightarrow y = 2$
  - Substituímos o valor de y e z na Equação 1:
    $x + 2 + 6 = 9 \Rightarrow x = 1$

Solução: $\{(1, 2, 3)\}$

Exemplos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 3L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to -2L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$S' : \begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ y - \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2} \\ z = 3 \end{cases}$$

- Obtemos a solução de S' por retro-substituição.
  - Substituímos o valor de z (obtido na Equação 3) na Equação 2:
    $y - \frac{7}{2}.3 = -\frac{17}{2} \Rightarrow y = 2$
  - Substituímos o valor de y e z na Equação 1:
    $x + 2 + 6 = 9 \Rightarrow x = 1$

Solução: $\{(1, 2, 3)\}$

Exemplos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 3L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to -2L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$S' : \begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ y - \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2} \\ z = 3 \end{cases}$$

- Obtemos a solução de S' por retro-substituição.
  - Substituímos o valor de z (obtido na Equação 3) na Equação 2:

    $y - \frac{7}{2}.3 = -\frac{17}{2} \Rightarrow y = 2$
  - Substituímos o valor de y e z na Equação 1:

    $x + 2 + 6 = 9 \Rightarrow x = 1$

Solução: $\{(1, 2, 3)\}$

Exemplos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 3L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to -2L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$S' : \begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ y - \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2} \\ z = 3 \end{cases}$$

- Obtemos a solução de S' por retro-substituição.
  - Substituímos o valor de z (obtido na Equação 3) na Equação 2:

    $y - \frac{7}{2}.3 = -\frac{17}{2} \Rightarrow y = 2$
  - Substituímos o valor de y e z na Equação 1:

    $x + 2 + 6 = 9 \Rightarrow x = 1$

Solução: $\{(1, 2, 3)\}$

Exemplos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 3L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to -2L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$S' : \begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ y - \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2} \\ z = 3 \end{cases}$$

- Obtemos a solução de S' por retro-substituição.
  - Substituímos o valor de z (obtido na Equação 3) na Equação 2:
    $y - \frac{7}{2}.3 = -\frac{17}{2} \Rightarrow y = 2$
  - Substituímos o valor de y e z na Equação 1:
    $x + 2 + 6 = 9 \Rightarrow x = 1$

Solução: $\{(1, 2, 3)\}$

Exemplos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 3L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to -2L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$S' : \begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ y - \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2} \\ z = 3 \end{cases}$$

- Obtemos a solução de S' por retro-substituição.
  - Substituímos o valor de z (obtido na Equação 3) na Equação 2:
    $y - \frac{7}{2}.3 = -\frac{17}{2} \Rightarrow y = 2$
  - Substituímos o valor de y e z na Equação 1:
    $x + 2 + 6 = 9 \Rightarrow x = 1$

Solução: $\{(1, 2, 3)\}$

Exemplos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 3L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to -2L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$S' : \begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ y - \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2} \\ z = 3 \end{cases}$$

- Obtemos a solução de S' por retro-substituição.
  - Substituímos o valor de z (obtido na Equação 3) na Equação 2:
    $y - \frac{7}{2}.3 = -\frac{17}{2} \Rightarrow y = 2$
  - Substituímos o valor de y e z na Equação 1:
    $x + 2 + 6 = 9 \Rightarrow x = 1$

Solução: $\{(1, 2, 3)\}$

Exemplos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 3L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to -2L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$S' : \begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ y - \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2} \\ z = 3 \end{cases}$$

- Obtemos a solução de S' por retro-substituição.
  - Substituímos o valor de z (obtido na Equação 3) na Equação 2:
    $y - \frac{7}{2}.3 = -\frac{17}{2} \Rightarrow y = 2$
  - Substituímos o valor de y e z na Equação 1:
    $x + 2 + 6 = 9 \Rightarrow x = 1$

Solução: $\{(1, 2, 3)\}$

Exemplos

2. $S: \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ 2x + 1y + 1z = 1 \\ 3x + 2y + 3z = 4 \end{cases}$

$$M_A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 3L_1]{L_2 \to L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 + L_2]{L_2 \to -L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S': \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ y + 3z = 5 \end{cases}$$

Obtemos a solução de S' por retro-substituição.

Da Equação 2: $y = 5 - 3z$

Da Equação 1: $x = 3 - 2z - (5 - 3z) \Rightarrow x = -2 + z$

Exemplos

2. $S: \begin{cases} x+y+2z=3 \\ 2x+1y+1z=1 \\ 3x+2y+3z=4 \end{cases}$

$$M_A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 3L_1]{L_2 \to L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 + L_2]{L_2 \to -L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$S': \begin{cases} x+y+2z=3 \\ y+3z=5 \end{cases}$

Obtemos a solução de S' por retro-substituição.

Da Equação 2: $y = 5 - 3z$

Da Equação 1: $x = 3 - 2z - (5 - 3z) \Rightarrow x = -2 + z$

Exemplos

2. $S: \begin{cases} x+y+2z=3 \\ 2x+1y+1z=1 \\ 3x+2y+3z=4 \end{cases}$

$$M_A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3\to L_3-3L_1]{L_2\to L_2-2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3\to L_3+L_2]{L_2\to -L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$S': \begin{cases} x+y+2z=3 \\ y+3z=5 \end{cases}$

Obtemos a solução de S' por retro-substituição.

Da Equação 2: $y = 5-3z$

Da Equação 1: $x = 3-2z-(5-3z) \Rightarrow x = -2+z$

Exemplos

2. $S: \begin{cases} x+y+2z=3 \\ 2x+1y+1z=1 \\ 3x+2y+3z=4 \end{cases}$

$$M_A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 3L_1]{L_2 \to L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 + L_2]{L_2 \to -L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$S': \begin{cases} x+y+2z=3 \\ y+3z=5 \end{cases}$

Obtemos a solução de S' por retro-substituição.

Da Equação 2: $y = 5 - 3z$

Da Equação 1: $x = 3 - 2z - (5 - 3z) \Rightarrow x = -2 + z$

Exemplos

2. $S : \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ 2x + 1y + 1z = 1 \\ 3x + 2y + 3z = 4 \end{cases}$

$$M_A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \underset{L_3 \to L_3 - 3L_1}{\xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \end{bmatrix} \underset{L_3 \to L_3 + L_2}{\xrightarrow{L_2 \to -L_2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S' : \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ y + 3z = 5 \end{cases}$$

Obtemos a solução de S' por retro-substituição.

Da Equação 2: $y = 5 - 3z$

Da Equação 1: $x = 3 - 2z - (5 - 3z) \Rightarrow x = -2 + z$

Exemplos

2. $S : \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ 2x + 1y + 1z = 1 \\ 3x + 2y + 3z = 4 \end{cases}$

$$M_A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 3L_1]{L_2 \to L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 + L_2]{L_2 \to -L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S' : \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ y + 3z = 5 \end{cases}$$

Obtemos a solução de S' por retro-substituição.

Da Equação 2: $y = 5 - 3z$

Da Equação 1: $x = 3 - 2z - (5 - 3z) \Rightarrow x = -2 + z$

Exemplos

2. $S : \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ 2x + 1y + 1z = 1 \\ 3x + 2y + 3z = 4 \end{cases}$

$$M_A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 3L_1]{L_2 \to L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 + L_2]{L_2 \to -L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S' : \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ y + 3z = 5 \end{cases}$$

Obtemos a solução de S' por retro-substituição.

Da Equação 2: $y = 5 - 3z$

Da Equação 1: $x = 3 - 2z - (5 - 3z) \Rightarrow x = -2 + z$

Exemplos

2. $S:\begin{cases} x+y+2z=3 \\ 2x+1y+1z=1 \\ 3x+2y+3z=4 \end{cases}$

$$M_A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3\to L_3-3L_1]{L_2\to L_2-2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3\to L_3+L_2]{L_2\to -L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$S':\begin{cases} x+y+2z=3 \\ y+3z=5 \end{cases}$

Obtemos a solução de S' por retro-substituição.

Da Equação 2: $y=5-3z$

Da Equação 1: $x=3-2z-(5-3z) \Rightarrow x=-2+z$

Exemplos

2. $S: \begin{cases} x+y+2z=3 \\ 2x+1y+1z=1 \\ 3x+2y+3z=4 \end{cases}$

$$M_A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 3L_1]{L_2 \to L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 + L_2]{L_2 \to -L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S': \begin{cases} x+y+2z=3 \\ y+3z=5 \end{cases}$$

Obtemos a solução de S' por retro-substituição.

Da Equação 2: $y = 5 - 3z$

Da Equação 1: $x = 3 - 2z - (5 - 3z) \Rightarrow x = -2 + z$

Exemplos

- Solução:$\{(-2+z, 5-3z, z), z \in \mathbb{R}\}$
- $p(M_A) = p(M_C) = 2$, $n = 3$

  Portanto S é um sistema compatível indeterminado e o grau de liberdade de S é $n(M_C) = 3 - 2$.

Obs: O método da Eliminação de Gauss-Jordan evita retro-substituição. No entanto, o escalonamento para chegar à matriz na forma escalonada reduzida em geral tem mais passos.

Exemplos

- Solução:$\{(-2+z, 5-3z, z), z \in \mathbb{R}\}$
- $p(M_A) = p(M_C) = 2$, $n = 3$

  Portanto S é um sistema compatível indeterminado e o grau de liberdade de S é $n(M_C) = 3 - 2$.

Obs: O método da Eliminação de Gauss-Jordan evita retro-substituição. No entanto, o escalonamento para chegar à matriz na forma escalonada reduzida em geral tem mais passos.

Exemplos

- Solução:$\{(-2+z, 5-3z, z), z \in \mathbb{R}\}$
- $p(M_A) = p(M_C) = 2$, $n = 3$

  Portanto S é um sistema compatível indeterminado e o grau de liberdade de S é $n(M_C) = 3 - 2$.

Obs: O método da Eliminação de Gauss-Jordan evita retro-substituição. No entanto, o escalonamento para chegar à matriz na forma escalonada reduzida em geral tem mais passos.

Exemplos

- Solução:$\{(-2+z, 5-3z, z), z \in \mathbb{R}\}$
- $p(M_A) = p(M_C) = 2$, $n = 3$

  Portanto S é um sistema compatível indeterminado e o grau de liberdade de S é $n(M_C) = 3 - 2$.

Obs: O método da Eliminação de Gauss-Jordan evita retro-substituição. No entanto, o escalonamento para chegar à matriz na forma escalonada reduzida em geral tem mais passos.