Determinantes

Álgebra Linear

Mariana Silveira - Cristian Coletti

Universidade Federal do ABC

Motivação

- Dada A uma matriz quadrada, o **determinante** de A, que denotamos por $\det A$ ou $|A|$, é um número real que associamos a A, o qual tem muitas aplicações, como saber se uma matriz tem inversa, determinar a inversa caso ela exista, classificar sistemas lineares, encontrar a solução de sistemas nos casos em que elas existem.

Exemplos:

- $S : \{ax = b \quad \Rightarrow \quad x = \frac{b}{a}$ $\leftarrow$ denominador associado à matriz dos coef.
- $S : \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad y = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$

Motivação

- Dada A uma matriz quadrada, o **determinante** de A, que denotamos por $\det A$ ou $|A|$, é um número real que associamos a A, o qual tem muitas aplicações, como saber se uma matriz tem inversa, determinar a inversa caso ela exista, classificar sistemas lineares, encontrar a solução de sistemas nos casos em que elas existem.

Exemplos:

- $S : \{ax = b \quad \Rightarrow \quad x = \frac{b}{a}$ $\leftarrow$ denominador associado à matriz dos coef.
- $S : \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \qquad y = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$

Motivação

- Dada A uma matriz quadrada, o **determinante** de A, que denotamos por $\det A$ ou $|A|$, é um número real que associamos a A, o qual tem muitas aplicações, como saber se uma matriz tem inversa, determinar a inversa caso ela exista, classificar sistemas lineares, encontrar a solução de sistemas nos casos em que elas existem.

Exemplos:

- $S : \{ax = b \quad \Rightarrow \quad x = \frac{b}{a}$ $\leftarrow$ denominador associado à matriz dos coef.

- $S : \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad y = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$

Permutações

Uma **permutação** no conjunto dos inteiros $\{1, 2, \ldots, n\}$ é uma determinada ordem para $\{1, 2, \ldots, n\}$ sem repetições ou omissões.

Exemplos: $\{1, 2, 3\}$

(1 2 3), (2 1 3) e (3 1 2) são permutações de $\{1, 2, 3\}$.

- A quantidade de permutações de $\{1, 2, \ldots, n\}$ é $n!$.

Dada uma permutação de $\{1, 2, \ldots, n\}$, dizemos que existe uma **inversão** nesta permutação quando um inteiro precede outro menor que ele.

Exemplos: $\{1, 2, 3\}$

(1 2 3) $\to$ 0 inversões	(2 3 1) $\to$ 2 inversões
(2 1 3) $\to$ 1 inversão	(3 1 2) $\to$ 2 inversões
(1 3 2) $\to$ 1 inversão	(3 2 1) $\to$ 3 inversões

Permutações

Uma **permutação** no conjunto dos inteiros $\{1, 2, \ldots, n\}$ é uma determinada ordem para $\{1, 2, \ldots, n\}$ sem repetições ou omissões.

Exemplos: $\{1, 2, 3\}$

(1 2 3), (2 1 3) e (3 1 2) são permutações de $\{1, 2, 3\}$.

- A quantidade de permutações de $\{1, 2, \ldots, n\}$ é $n!$.

Dada uma permutação de $\{1, 2, \ldots, n\}$, dizemos que existe uma **inversão** nesta permutação quando um inteiro precede outro menor que ele.

Exemplos: $\{1, 2, 3\}$

(1 2 3) $\rightarrow$ 0 inversões	(2 3 1) $\rightarrow$ 2 inversões
(2 1 3) $\rightarrow$ 1 inversão	(3 1 2) $\rightarrow$ 2 inversões
(1 3 2) $\rightarrow$ 1 inversão	(3 2 1) $\rightarrow$ 3 inversões

Permutações

Uma **permutação** no conjunto dos inteiros $\{1, 2, \ldots, n\}$ é uma determinada ordem para $\{1, 2, \ldots, n\}$ sem repetições ou omissões.

Exemplos: $\{1, 2, 3\}$

(1 2 3), (2 1 3) e (3 1 2) são permutações de $\{1, 2, 3\}$.

- A quantidade de permutações de $\{1, 2, \ldots, n\}$ é $n!$.

Dada uma permutação de $\{1, 2, \ldots, n\}$, dizemos que existe uma **inversão** nesta permutação quando um inteiro precede outro menor que ele.

Exemplos: $\{1, 2, 3\}$

(1 2 3) $\to$ 0 inversões	(2 3 1) $\to$ 2 inversões
(2 1 3) $\to$ 1 inversão	(3 1 2) $\to$ 2 inversões
(1 3 2) $\to$ 1 inversão	(3 2 1) $\to$ 3 inversões

Permutações

Uma **permutação** no conjunto dos inteiros $\{1, 2, \ldots, n\}$ é uma determinada ordem para $\{1, 2, \ldots, n\}$ sem repetições ou omissões.

Exemplos: $\{1, 2, 3\}$

(1 2 3), (2 1 3) e (3 1 2) são permutações de $\{1, 2, 3\}$.

- A quantidade de permutações de $\{1, 2, \ldots, n\}$ é $n!$.

Dada uma permutação de $\{1, 2, \ldots, n\}$, dizemos que existe uma **inversão** nesta permutação quando um inteiro precede outro menor que ele.

Exemplos: $\{1, 2, 3\}$

(1 2 3) $\rightarrow$ 0 inversões (2 3 1) $\rightarrow$ 2 inversões

(2 1 3) $\rightarrow$ 1 inversão (3 1 2) $\rightarrow$ 2 inversões

(1 3 2) $\rightarrow$ 1 inversão (3 2 1) $\rightarrow$ 3 inversões

Permutações

Uma **permutação** no conjunto dos inteiros $\{1, 2, \ldots, n\}$ é uma determinada ordem para $\{1, 2, \ldots, n\}$ sem repetições ou omissões.

Exemplos: $\{1, 2, 3\}$

(1 2 3), (2 1 3) e (3 1 2) são permutações de $\{1, 2, 3\}$.

- A quantidade de permutações de $\{1, 2, \ldots, n\}$ é $n!$.

Dada uma permutação de $\{1, 2, \ldots, n\}$, dizemos que existe uma **inversão** nesta permutação quando um inteiro precede outro menor que ele.

Exemplos: $\{1, 2, 3\}$

(1 2 3) $\rightarrow$ 0 inversões   (2 3 1) $\rightarrow$ 2 inversões

(2 1 3) $\rightarrow$ 1 inversão   (3 1 2) $\rightarrow$ 2 inversões

(1 3 2) $\rightarrow$ 1 inversão   (3 2 1) $\rightarrow$ 3 inversões

Permutações

Uma **permutação** no conjunto dos inteiros $\{1, 2, \ldots, n\}$ é uma determinada ordem para $\{1, 2, \ldots, n\}$ sem repetições ou omissões.

Exemplos: $\{1, 2, 3\}$

(1 2 3), (2 1 3) e (3 1 2) são permutações de $\{1, 2, 3\}$.

- A quantidade de permutações de $\{1, 2, \ldots, n\}$ é $n!$.

Dada uma permutação de $\{1, 2, \ldots, n\}$, dizemos que existe uma **inversão** nesta permutação quando um inteiro precede outro menor que ele.

Exemplos: $\{1, 2, 3\}$

(1 2 3) $\rightarrow$ 0 inversões (2 3 1) $\rightarrow$ 2 inversões

(2 1 3) $\rightarrow$ 1 inversão (3 1 2) $\rightarrow$ 2 inversões

(1 3 2) $\rightarrow$ 1 inversão (3 2 1) $\rightarrow$ 3 inversões

Permutações

Uma **permutação** no conjunto dos inteiros $\{1, 2, \ldots, n\}$ é uma determinada ordem para $\{1, 2, \ldots, n\}$ sem repetições ou omissões.

Exemplos: $\{1, 2, 3\}$

(1 2 3), (2 1 3) e (3 1 2) são permutações de $\{1, 2, 3\}$.

- A quantidade de permutações de $\{1, 2, \ldots, n\}$ é $n!$.

Dada uma permutação de $\{1, 2, \ldots, n\}$, dizemos que existe uma **inversão** nesta permutação quando um inteiro precede outro menor que ele.

Exemplos: $\{1, 2, 3\}$

(1 2 3) $\rightarrow$ 0 inversões (2 3 1) $\rightarrow$ 2 inversões

(2 1 3) $\rightarrow$ 1 inversão (3 1 2) $\rightarrow$ 2 inversões

(1 3 2) $\rightarrow$ 1 inversão (3 2 1) $\rightarrow$ 3 inversões

Permutações

Uma **permutação** no conjunto dos inteiros $\{1, 2, \ldots, n\}$ é uma determinada ordem para $\{1, 2, \ldots, n\}$ sem repetições ou omissões.

Exemplos: $\{1, 2, 3\}$

(1 2 3), (2 1 3) e (3 1 2) são permutações de $\{1, 2, 3\}$.

- A quantidade de permutações de $\{1, 2, \ldots, n\}$ é $n!$.

Dada uma permutação de $\{1, 2, \ldots, n\}$, dizemos que existe uma **inversão** nesta permutação quando um inteiro precede outro menor que ele.

Exemplos: $\{1, 2, 3\}$

(1 2 3) $\rightarrow$ 0 inversões	(2 3 1) $\rightarrow$ 2 inversões
(2 1 3) $\rightarrow$ 1 inversão	(3 1 2) $\rightarrow$ 2 inversões
(1 3 2) $\rightarrow$ 1 inversão	(3 2 1) $\rightarrow$ 3 inversões

Permutações

Uma **permutação** no conjunto dos inteiros $\{1, 2, \dots, n\}$ é uma determinada ordem para $\{1, 2, \dots, n\}$ sem repetições ou omissões.

Exemplos: $\{1, 2, 3\}$

(1 2 3), (2 1 3) e (3 1 2) são permutações de $\{1, 2, 3\}$.

- A quantidade de permutações de $\{1, 2, \dots, n\}$ é $n!$.

Dada uma permutação de $\{1, 2, \dots, n\}$, dizemos que existe uma **inversão** nesta permutação quando um inteiro precede outro menor que ele.

Exemplos: $\{1, 2, 3\}$

(1 2 3) $\to$ 0 inversões	(2 3 1) $\to$ 2 inversões
(2 1 3) $\to$ 1 inversão	(3 1 2) $\to$ 2 inversões
(1 3 2) $\to$ 1 inversão	(3 2 1) $\to$ 3 inversões

Permutações

Uma **permutação** no conjunto dos inteiros $\{1, 2, \ldots, n\}$ é uma determinada ordem para $\{1, 2, \ldots, n\}$ sem repetições ou omissões.

Exemplos: $\{1, 2, 3\}$

(1 2 3), (2 1 3) e (3 1 2) são permutações de $\{1, 2, 3\}$.

- A quantidade de permutações de $\{1, 2, \ldots, n\}$ é $n!$.

Dada uma permutação de $\{1, 2, \ldots, n\}$, dizemos que existe uma **inversão** nesta permutação quando um inteiro precede outro menor que ele.

Exemplos: $\{1, 2, 3\}$

(1 2 3) $\rightarrow$ 0 inversões	(2 3 1) $\rightarrow$ 2 inversões
(2 1 3) $\rightarrow$ 1 inversão	(3 1 2) $\rightarrow$ 2 inversões
(1 3 2) $\rightarrow$ 1 inversão	(3 2 1) $\rightarrow$ 3 inversões

Determinante

O **determinante** de uma matriz $[a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ é

$$\det\,[a_{ij}] = \sum_{\rho} (-1)^J a_{1j_1} \dots a_{nj_n}$$

- ρ soma estendida a todas as permutações $(j_1 \dots j_n)$ de $\{1, 2, \dots, n\}$
- $J = J(j_1 \dots j_n)$ é o número de inversões da permutação $(j_1 \dots j_n)$.

Obs: Em cada termo do somatório tem exatamente um elemento de cada linha e exatamente um elemento de cada coluna.

Obs: (Definição alternativa) $\det\,[a_{ij}] = \sum_{\rho} (-1)^J a_{j_1 1} \dots a_{j_n n}$

Exemplo:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$

Determinante

O **determinante** de uma matriz $[a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ é

$$\det\,[a_{ij}] = \sum_{\rho} (-1)^J a_{1j_1} \dots a_{nj_n}$$

- ρ soma estendida a todas as permutações $(j_1 \dots j_n)$ de $\{1, 2, \dots, n\}$
- $J = J(j_1 \dots j_n)$ é o número de inversões da permutação $(j_1 \dots j_n)$.

Obs: Em cada termo do somatório tem exatamente um elemento de cada linha e exatamente um elemento de cada coluna.

Obs: (Definição alternativa) $\det\,[a_{ij}] = \sum_{\rho} (-1)^J a_{j_1 1} \dots a_{j_n n}$

Exemplo:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$

Determinante

O **determinante** de uma matriz $[a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ é

$$\det\,[a_{ij}] = \sum_{\rho} (-1)^J a_{1j_1} \dots a_{nj_n}$$

- ρ soma estendida a todas as permutações $(j_1 \dots j_n)$ de $\{1, 2, \dots, n\}$
- $J = J(j_1 \dots j_n)$ é o número de inversões da permutação $(j_1 \dots j_n)$.

Obs: Em cada termo do somatório tem exatamente um elemento de cada linha e exatamente um elemento de cada coluna.

Obs: (Definição alternativa) $\det\,[a_{ij}] = \sum_{\rho} (-1)^J a_{j_1 1} \dots a_{j_n n}$

Exemplo:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$

Determinante

O **determinante** de uma matriz $[a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ é

$$\det\,[a_{ij}] = \sum_{\rho} (-1)^J a_{1j_1} \dots a_{nj_n}$$

- ρ soma estendida a todas as permutações $(j_1 \dots j_n)$ de $\{1, 2, \dots, n\}$
- $J = J(j_1 \dots j_n)$ é o número de inversões da permutação $(j_1 \dots j_n)$.

Obs: Em cada termo do somatório tem exatamente um elemento de cada linha e exatamente um elemento de cada coluna.

Obs: (Definição alternativa) $\det\,[a_{ij}] = \sum_{\rho} (-1)^J a_{j_1 1} \dots a_{j_n n}$

Exemplo:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$

Determinante

O **determinante** de uma matriz $[a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ é

$$\det\,[a_{ij}] = \sum_{\rho} (-1)^J a_{1j_1} \dots a_{nj_n}$$

- ρ soma estendida a todas as permutações $(j_1 \dots j_n)$ de $\{1, 2, \dots, n\}$
- $J = J(j_1 \dots j_n)$ é o número de inversões da permutação $(j_1 \dots j_n)$.

Obs: Em cada termo do somatório tem exatamente um elemento de cada linha e exatamente um elemento de cada coluna.

Obs: (Definição alternativa) $\det\,[a_{ij}] = \sum_{\rho} (-1)^J a_{j_1 1} \dots a_{j_n n}$

Exemplo:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{matrix} (-1)^? a_{1\_} a_{2\_} a_{3\_} + & (-1)^? a_{1\_} a_{2\_} a_{3\_} + \\ (-1)^? a_{1\_} a_{2\_} a_{3\_} + & (-1)^? a_{1\_} a_{2\_} a_{3\_} + \\ (-1)^? a_{1\_} a_{2\_} a_{3\_} + & (-1)^? a_{1\_} a_{2\_} a_{3\_} \end{matrix}$$

Determinante

O **determinante** de uma matriz $[a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ é

$$\det\,[a_{ij}] = \sum_{\rho} (-1)^J a_{1j_1} \dots a_{nj_n}$$

- ρ soma estendida a todas as permutações $(j_1 \dots j_n)$ de $\{1, 2, \dots, n\}$
- $J = J(j_1 \dots j_n)$ é o número de inversões da permutação $(j_1 \dots j_n)$.

Obs: Em cada termo do somatório tem exatamente um elemento de cada linha e exatamente um elemento de cada coluna.

Obs: (Definição alternativa) $\det\,[a_{ij}] = \sum_{\rho} (-1)^J a_{j_1 1} \dots a_{j_n n}$

Exemplo:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{matrix} (-1)^0 a_{11} a_{22} a_{33} + & (-1)^1 a_{11} a_{23} a_{32} + \\ (-1)^1 a_{12} a_{21} a_{33} + & (-1)^2 a_{12} a_{23} a_{31} + \\ (-1)^2 a_{13} a_{21} a_{32} + & (-1)^3 a_{13} a_{22} a_{31} \end{matrix}$$

Propriedades do Determinante

- Existem métodos para o cálculo do determinante e propriedades que facilitam o cálculo do mesmo.

1. Se todos os elementos de uma linha (ou uma coluna) de uma matriz quadrada A são iguais a zero, então $\det A = 0$.
2. Para qualquer matriz quadrada A, $\det A = \det A^t$.

Ideia da prova:

1. Em cada parcela do determinante temos um termo nulo.
2.

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{matrix} (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33} + & (-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32} + & (-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33} + \\ (-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31} + & (-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32} + & (-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31} \end{matrix}$$

Propriedades do Determinante

- Existem métodos para o cálculo do determinante e propriedades que facilitam o cálculo do mesmo.

1. Se todos os elementos de uma linha (ou uma coluna) de uma matriz quadrada A são iguais a zero, então $\det A = 0$.
2. Para qualquer matriz quadrada A, $\det A = \det A^t$.

Ideia da prova:

1. Em cada parcela do determinante temos um termo nulo.
2.

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{matrix} (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33} + & (-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32} + & (-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33} + \\ (-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31} + & (-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32} + & (-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31} \end{matrix}$$

Propriedades do Determinante

- Existem métodos para o cálculo do determinante e propriedades que facilitam o cálculo do mesmo.

1. Se todos os elementos de uma linha (ou uma coluna) de uma matriz quadrada A são iguais a zero, então $\det A = 0$.
2. Para qualquer matriz quadrada A, $\det A = \det A^t$.

Ideia da prova:

1. Em cada parcela do determinante temos um termo nulo.
2.

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{matrix} (-1)^{0} a_{11} a_{22} a_{33} + & (-1)^{1} a_{11} a_{23} a_{32} + & (-1)^{1} a_{12} a_{21} a_{33} + \\ (-1)^{2} a_{12} a_{23} a_{31} + & (-1)^{2} a_{13} a_{21} a_{32} + & (-1)^{3} a_{13} a_{22} a_{31} \end{matrix}$$

Propriedades do Determinante

3. Consequências no determinante de operações elementares nas linhas:
   3.1 Se permutarmos duas linhas (ou colunas) da matriz, o determinante troca de sinal.
   3.2 Se multiplicarmos uma linha (ou coluna) da matriz por uma constante não nula k, o determinante fica multiplicado por k.
   3.3 Se somarmos a uma linha (ou coluna) um múltiplo de uma outra linha (coluna), o determinante não se altera.

Ideia da prova:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{array}{lll} (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33}+ & (-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32}+ & (-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33}+ \\ (-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31}+ & (-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32}+ & (-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

3.1. Em cada parcela trocamos a paridade do número de inversões.

3.2. Em cada parcela temos um termo multiplicado por k. Basta colocar k em evidência.

3.3. Segue de 4.1 e 5.

Propriedades do Determinante

3. Consequências no determinante de operações elementares nas linhas:
   3.1 Se permutarmos duas linhas (ou colunas) da matriz, o determinante troca de sinal.
   3.2 Se multiplicarmos uma linha (ou coluna) da matriz por uma constante não nula k, o determinante fica multiplicado por k.
   3.3 Se somarmos a uma linha (ou coluna) um múltiplo de uma outra linha (coluna), o determinante não se altera.

Ideia da prova:

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{matrix} (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33} + & (-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32} + & (-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33} + \\ (-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31} + & (-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32} + & (-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31} \end{matrix}$$

3.1. Em cada parcela trocamos a paridade do número de inversões.

3.2. Em cada parcela temos um termo multiplicado por k. Basta colocar k em evidência.

3.3. Segue de 4.1 e 5.

Propriedades do Determinante

3. Consequências no determinante de operações elementares nas linhas:
   - 3.1 Se permutarmos duas linhas (ou colunas) da matriz, o determinante troca de sinal.
   - 3.2 Se multiplicarmos uma linha (ou coluna) da matriz por uma constante não nula k, o determinante fica multiplicado por k.
   - 3.3 Se somarmos a uma linha (ou coluna) um múltiplo de uma outra linha (coluna), o determinante não se altera.

Ideia da prova:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{array}{lll} (-1)^{0} a_{11} a_{22} a_{33} + & (-1)^{1} a_{11} a_{23} a_{32} + & (-1)^{1} a_{12} a_{21} a_{33} + \\ (-1)^{2} a_{12} a_{23} a_{31} + & (-1)^{2} a_{13} a_{21} a_{32} + & (-1)^{3} a_{13} a_{22} a_{31} \end{array}$$

3.1. Em cada parcela trocamos a paridade do número de inversões.

3.2. Em cada parcela temos um termo multiplicado por k. Basta colocar k em evidência.

3.3. Segue de 4.1 e 5.

Propriedades do Determinante

3. Consequências no determinante de operações elementares nas linhas:
   - 3.1 Se permutarmos duas linhas (ou colunas) da matriz, o determinante troca de sinal.
   - 3.2 Se multiplicarmos uma linha (ou coluna) da matriz por uma constante não nula k, o determinante fica multiplicado por k.
   - 3.3 Se somarmos a uma linha (ou coluna) um múltiplo de uma outra linha (coluna), o determinante não se altera.

Ideia da prova:

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{array}{lll} (-1)^{0} a_{11}a_{22}a_{33}+ & (-1)^{1} a_{11}a_{23}a_{32}+ & (-1)^{1} a_{12}a_{21}a_{33}+ \\ (-1)^{2} a_{12}a_{23}a_{31}+ & (-1)^{2} a_{13}a_{21}a_{32}+ & (-1)^{3} a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

3.1. Em cada parcela trocamos a paridade do número de inversões.

3.2. Em cada parcela temos um termo multiplicado por k. Basta colocar k em evidência.

3.3. Segue de 4.1 e 5.

Propriedades do Determinante

4.1. O determinante de uma matriz que possui duas linhas (colunas) iguais é 0.

4.2. O determinante de uma matriz que possui duas linhas (colunas) proporcionais é 0.

Ideia da prova: 4.1. Segue de 3.1.

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

4.2. Segue de 3.2 e 4.1.

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ ka_{11} & \dots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = k.\det\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = k.0 = 0$$

Propriedades do Determinante

4.1. O determinante de uma matriz que possui duas linhas (colunas) iguais é 0.

4.2. O determinante de uma matriz que possui duas linhas (colunas) proporcionais é 0.

Ideia da prova: 4.1. Segue de 3.1.

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

4.2. Segue de 3.2 e 4.1.

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ ka_{11} & \dots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = k.\det\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = k.0 = 0$$

Propriedades do Determinante

4.1. O determinante de uma matriz que possui duas linhas (colunas) iguais é 0.

4.2. O determinante de uma matriz que possui duas linhas (colunas) proporcionais é 0.

Ideia da prova: 4.1. Segue de 3.1.

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

4.2. Segue de 3.2 e 4.1.

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ ka_{11} & \dots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = k.\det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = k.0 = 0$$

Propriedades do Determinante

5. $$\det\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \dots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & \dots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

6. Dadas A e B duas matrizes quadradas de mesma ordem,

$$\det(A.B) = \det A\,.\det B.$$

Ideia da prova:

5. $$\sum_{\rho}(-1)^J a_{1j_1}\dots(b_{ij_i}+c_{ij_i})\dots a_{nj_n} = \sum_{\rho}(-1)^J(a_{1j_1}\dots b_{ij_i}\dots a_{nj_n}) + (a_{1j_1}\dots c_{ij_i}\dots a_{nj_n})$$

$$= \sum_{\rho}(-1)^J a_{1j_1}\dots b_{ij_i}\dots a_{nj_n} + \sum_{\rho}(-1)^J a_{1j_1}\dots c_{ij_i}\dots a_{nj_n}$$

Propriedades do Determinante

5. $$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \dots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} + c_{i1} & \dots & b_{in} + c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

6. Dadas A e B duas matrizes quadradas de mesma ordem,

$$\det (A.B) = \det A \,.\, \det B.$$

Ideia da prova:

5. $$\sum_{\rho} (-1)^J a_{1j_1} \dots (b_{ij_i} + c_{ij_i}) \dots a_{nj_n} = \sum_{\rho} (-1)^J (a_{1j_1} \dots b_{ij_i} \dots a_{nj_n}) + (a_{1j_1} \dots c_{ij_i} \dots a_{nj_n})$$

$$= \sum_{\rho} (-1)^J a_{1j_1} \dots b_{ij_i} \dots a_{nj_n} + \sum_{\rho} (-1)^J a_{1j_1} \dots c_{ij_i} \dots a_{nj_n}$$

Propriedades do Determinante

Obs 1: Em geral, $\det(A+B) \neq \det A + \det B$.

Obs 2: Segue de 3.2 que $\det(k.A) = k^n.\det A$.

$$\det \begin{bmatrix} ka_{11} & \dots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{n1} & \dots & ka_{nn} \end{bmatrix}$$

- Vamos usar as propriedades do determinante, principalmente a Propriedade 3, para desenvolver um método que facilita o cálculo do determinante.

Propriedades do Determinante

Obs 1: Em geral, $\det(A + B) \neq \det A + \det B$.

Obs 2: Segue de 3.2 que $\det(k.A) = k^n.\det A$.

$$\det \begin{bmatrix} ka_{11} & \dots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{n1} & \dots & ka_{nn} \end{bmatrix}$$

- Vamos usar as propriedades do determinante, principalmente a Propriedade 3, para desenvolver um método que facilita o cálculo do determinante.

Propriedades do Determinante

Obs 1: Em geral, det $(A+B) \neq$ det A + det B.

Obs 2: Segue de 3.2 que det $(k.A) = k^n$.det A.

$$\det \begin{bmatrix} ka_{11} & \dots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{n1} & \dots & ka_{nn} \end{bmatrix}$$

- Vamos usar as propriedades do determinante, principalmente a Propriedade 3, para desenvolver um método que facilita o cálculo do determinante.

Redução por Linhas

Este método consiste em realizar operações elementares nas linhas da matriz A para reduzi-la a uma matriz B, cujo cálculo do determinante é simples, e então calcular o determinante de A a partir do determinante de B.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{L_2 \leftrightarrow L_1}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{L_3 \to L_3 - L_1}{\overset{L_2 \to L_2 - 2L_1}{=}} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{Propr. 4.1}{=} 0$$

Obs: Podemos realizar um método análogo para colunas.

Redução por Linhas

Este método consiste em realizar operações elementares nas linhas da matriz A para reduzi-la a uma matriz B, cujo cálculo do determinante é simples, e então calcular o determinante de A a partir do determinante de B.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{=}{L_2 \leftrightarrow L_1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{L_3 \to L_3 - L_1}{\overset{L_2 \to L_2 - 2L_1}{=}} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{Propr.4.1}{=} 0$$

Obs: Podemos realizar um método análogo para colunas.

Redução por Linhas

Este método consiste em realizar operações elementares nas linhas da matriz A para reduzi-la a uma matriz B, cujo cálculo do determinante é simples, e então calcular o determinante de A a partir do determinante de B.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{L_2 \leftrightarrow L_1}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{L_3 \to L_3 - L_1}{\overset{L_2 \to L_2 - 2L_1}{=}} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{Propr.4.1}{=} 0$$

Obs: Podemos realizar um método análogo para colunas.

Redução por Linhas

Este método consiste em realizar operações elementares nas linhas da matriz A para reduzi-la a uma matriz B, cujo cálculo do determinante é simples, e então calcular o determinante de A a partir do determinante de B.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{L_2 \leftrightarrow L_1}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{L_3 \to L_3 - L_1}{\overset{L_2 \to L_2 - 2L_1}{=}} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{Propr.4.1}{=} 0$$

Obs: Podemos realizar um método análogo para colunas.

Redução por Linhas

Este método consiste em realizar operações elementares nas linhas da matriz A para reduzi-la a uma matriz B, cujo cálculo do determinante é simples, e então calcular o determinante de A a partir do determinante de B.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{L_2 \leftrightarrow L_1}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{L_3 \to L_3 - L_1}{\overset{L_2 \to L_2 - 2L_1}{=}} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{Propr.4.1}{=} 0$$

Obs: Podemos realizar um método análogo para colunas.

Redução por Linhas

Este método consiste em realizar operações elementares nas linhas da matriz A para reduzi-la a uma matriz B, cujo cálculo do determinante é simples, e então calcular o determinante de A a partir do determinante de B.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{L_2 \leftrightarrow L_1}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{L_3 \to L_3 - L_1}{\overset{L_2 \to L_2 - 2L_1}{=}} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{Propr.4.1}{=} 0$$

Obs: Podemos realizar um método análogo para colunas.

Redução por Linhas

Este método consiste em realizar operações elementares nas linhas da matriz A para reduzi-la a uma matriz B, cujo cálculo do determinante é simples, e então calcular o determinante de A a partir do determinante de B.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{L_2 \leftrightarrow L_1}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{L_3 \to L_3 - L_1}{\overset{L_2 \to L_2 - 2L_1}{=}} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{Propr.4.1}{=} 0$$

Obs: Podemos realizar um método análogo para colunas.

Desenvolvimento de Laplace ou Expansão em Cofatores

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{array}{lll} (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33}+ & (-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32}+ & (-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33}+ \\ (-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31}+ & (-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32}+ & (-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}).$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

$$= a_{11}\,|A_{11}| - a_{12}\,|A_{12}| + a_{13}\,|A_{13}|.$$

onde A_{ij} é a submatriz obtida de A quando retiramos a i-ésima linha e a j-ésima coluna. Se denotarmos $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$, obtemos

$$\det[a_{ij}] = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13}.$$

Desenvolvimento de Laplace ou Expansão em Cofatores

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{array}{lll} (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33}+ & (-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32}+ & (-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33}+ \\ (-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31}+ & (-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32}+ & (-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

$$= a_{11}\,|A_{11}| - a_{12}\,|A_{12}| + a_{13}\,|A_{13}|.$$

onde A_{ij} é a submatriz obtida de A quando retiramos a i-ésima linha e a j-ésima coluna. Se denotarmos $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$, obtemos

$$\det\,[a_{ij}] = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13}.$$

Desenvolvimento de Laplace ou Expansão em Cofatores

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{array}{lll} (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33}+ & (-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32}+ & (-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33}+ \\ (-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31}+ & (-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32}+ & (-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}).$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

$$= a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}|.$$

onde A_{ij} é a submatriz obtida de A quando retiramos a i-ésima linha e a j-ésima coluna. Se denotarmos $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$, obtemos

$$\det [a_{ij}] = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13}.$$

Desenvolvimento de Laplace ou Expansão em Cofatores

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{array}{lll} (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33}+ & (-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32}+ & (-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33}+ \\ (-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31}+ & (-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32}+ & (-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}).$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

$$= a_{11}\left|A_{11}\right| - a_{12}\left|A_{12}\right| + a_{13}\left|A_{13}\right|.$$

onde A_{ij} é a submatriz obtida de A quando retiramos a i-ésima linha e a j-ésima coluna. Se denotarmos $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$, obtemos

$$\det\left[a_{ij}\right] = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13}.$$

Desenvolvimento de Laplace ou Expansão em Cofatores

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{array}{lll} (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33}+ & (-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32}+ & (-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33}+ \\ (-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31}+ & (-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32}+ & (-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}).$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

$$= a_{11}\left|A_{11}\right| - a_{12}\left|A_{12}\right| + a_{13}\left|A_{13}\right|.$$

onde A_{ij} é a submatriz obtida de A quando retiramos a i-ésima linha e a j-ésima coluna. Se denotarmos $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$, obtemos

$$\det\,[a_{ij}] = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13}.$$

Desenvolvimento de Laplace ou Expansão em Cofatores

Seja $A = [a_{ij}]_{n\times n}$. Então

$$\begin{aligned}\det A &= a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + a_{in}\Delta_{in}\\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}\\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}|A_{ij}|\end{aligned}$$

onde A_{ij} é a submatriz obtida de A quando retiramos a i-ésima linha e a j-ésima coluna. O número $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$ é chamado **cofator** do elemento a_{ij}.

- Vale uma fórmula análoga para colunas

$$\det A = a_{1j}\Delta_{1j} + a_{2j}\Delta_{2j} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nj}.$$

Desenvolvimento de Laplace ou Expansão em Cofatores

Seja $A = [a_{ij}]_{n\times n}$. Então

$$\begin{aligned}\det A &= a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + a_{in}\Delta_{in}\\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}\\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}|A_{ij}|\end{aligned}$$

onde A_{ij} é a submatriz obtida de A quando retiramos a i-ésima linha e a j-ésima coluna. O número $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$ é chamado **cofator** do elemento a_{ij}.

- Vale uma fórmula análoga para colunas

$$\det A = a_{1j}\Delta_{1j} + a_{2j}\Delta_{2j} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nj}.$$

Exemplo

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$\det A = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13}$

$$= 0.(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$= -4 + 1 = -3$$

Exercício: Calcular o determinante de A escolhendo a terceira coluna.

Exemplo

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$\det A = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13}$

$$= 0.(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$= -4 + 1 = -3$$

Exercício: Calcular o determinante de A escolhendo a terceira coluna.

Exemplo

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\det A = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13}$$

$$= 0.(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$= -4 + 1 = -3$$

Exercício: Calcular o determinante de A escolhendo a terceira coluna.

Exemplo

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\det A = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13}$$

$$= 0.(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$= -4 + 1 = -3$$

Exercício: Calcular o determinante de A escolhendo a terceira coluna.

Exemplo

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\det A = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13}$$

$$= 0.(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$= -4 + 1 = -3$$

Exercício: Calcular o determinante de A escolhendo a terceira coluna.

Exemplo

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\det A = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13}$$

$$= 0.(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$= -4 + 1 = -3$$

Exercício: Calcular o determinante de A escolhendo a terceira coluna.

Exemplo

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\det A = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13}$$

$$= 0.(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$= -4 + 1 = -3$$

Exercício: Calcular o determinante de A escolhendo a terceira coluna.

Matrizes Triangulares

Proposição: Se $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ é uma matriz triangular superior, triangular inferior ou diagonal, então

$$\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Prova:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}\Delta_{11} + 0.\Delta_{21} + \dots + 0.\Delta_{n1} \\ &= a_{11}(a_{22}\Delta_{22} + 0.\Delta_{32} + \dots + 0.\Delta_{n2}) \\ &= a_{11}a_{22}(a_{33}\Delta_{33} + 0.\Delta_{43} + \dots + 0.\Delta_{n3}) \\ &\vdots \\ &= a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn} \end{aligned}$$

Se A é triangular inferior, A^t é triangular superior e o resultado segue da Propriedade 2.

$\square$

Matrizes Triangulares

Proposição: Se $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ é uma matriz triangular superior, triangular inferior ou diagonal, então

$$\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Prova:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}\Delta_{11} + 0.\Delta_{21} + \dots + 0.\Delta_{n1} \\ &= a_{11}(a_{22}\Delta_{22} + 0.\Delta_{32} + \dots + 0.\Delta_{n2}) \\ &= a_{11}a_{22}(a_{33}\Delta_{33} + 0.\Delta_{43} + \dots + 0.\Delta_{n3}) \\ &\vdots \\ &= a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn} \end{aligned}$$

Se A é triangular inferior, A^t é triangular superior e o resultado segue da Propriedade 2.

$\square$

Matrizes Triangulares

Proposição: Se $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ é uma matriz triangular superior, triangular inferior ou diagonal, então

$$\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Prova:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}\Delta_{11} + 0.\Delta_{21} + \cdots + 0.\Delta_{n1} \\ &= a_{11}(a_{22}\Delta_{22} + 0.\Delta_{32} + \cdots + 0.\Delta_{n2}) \\ &= a_{11}a_{22}(a_{33}\Delta_{33} + 0.\Delta_{43} + \cdots + 0.\Delta_{n3}) \\ &\vdots \\ &= a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn} \end{aligned}$$

Se A é triangular inferior, A^t é triangular superior e o resultado segue da Propriedade 2.

$\square$

Matrizes Triangulares

Proposição: Se $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ é uma matriz triangular superior, triangular inferior ou diagonal, então

$$\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Prova:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}\Delta_{11} + 0.\Delta_{21} + \dots + 0.\Delta_{n1} \\ &= a_{11}(a_{22}\Delta_{22} + 0.\Delta_{32} + \dots + 0.\Delta_{n2}) \\ &= a_{11}a_{22}(a_{33}\Delta_{33} + 0.\Delta_{43} + \dots + 0.\Delta_{n3}) \\ &\vdots \\ &= a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn} \end{aligned}$$

Se A é triangular inferior, A^t é triangular superior e o resultado segue da Propriedade 2.

$\square$

Matrizes Triangulares

Proposição: Se $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ é uma matriz triangular superior, triangular inferior ou diagonal, então

$$\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Prova:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}\Delta_{11} + 0.\Delta_{21} + \dots + 0.\Delta_{n1} \\ &= a_{11}(a_{22}\Delta_{22} + 0.\Delta_{32} + \dots + 0.\Delta_{n2}) \\ &= a_{11}a_{22}(a_{33}\Delta_{33} + 0.\Delta_{43} + \dots + 0.\Delta_{n3}) \\ &\vdots \\ &= a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn} \end{aligned}$$

Se A é triangular inferior, A^t é triangular superior e o resultado segue da Propriedade 2.

□

Matrizes Triangulares

Proposição: Se $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ é uma matriz triangular superior, triangular inferior ou diagonal, então

$$\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Prova:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}\Delta_{11} + 0.\Delta_{21} + \dots + 0.\Delta_{n1} \\ &= a_{11}(a_{22}\Delta_{22} + 0.\Delta_{32} + \dots + 0.\Delta_{n2}) \\ &= a_{11}a_{22}(a_{33}\Delta_{33} + 0.\Delta_{43} + \dots + 0.\Delta_{n3}) \\ &\vdots \\ &= a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn} \end{aligned}$$

Se A é triangular inferior, A^t é triangular superior e o resultado segue da Propriedade 2.

$\square$

Matrizes Triangulares

Obs: Para calcular o determinante de uma matriz A, podemos aplicar o método da redução por linhas para obter uma matriz triangular superior ou inferior e depois calcular o determinante utilizando a proposição anterior.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{L_1 \to \frac{1}{2}L_1}{=} -2\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{L_3 \to L_3 - L_1}{=} -2\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 \end{vmatrix} \overset{L_3 \to L_3 - \frac{1}{2}L_2}{=} -2\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = -2 \, . \, \frac{3}{2} = -3$$

Obs: O método dos cofatores é eficiente para o cálculo manual do determinante. O método da redução por linhas é mais adequado para programação.

Matrizes Triangulares

Obs: Para calcular o determinante de uma matriz A, podemos aplicar o método da redução por linhas para obter uma matriz triangular superior ou inferior e depois calcular o determinante utilizando a proposição anterior.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{L_1 \to \frac{1}{2} L_1}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{L_3 \to L_3 - L_1}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 \end{vmatrix} \overset{L_3 \to L_3 - \frac{1}{2} L_2}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = -2 \, . \, \frac{3}{2} = -3$$

Obs: O método dos cofatores é eficiente para o cálculo manual do determinante. O método da redução por linhas é mais adequado para programação.

Matrizes Triangulares

Obs: Para calcular o determinante de uma matriz A, podemos aplicar o método da redução por linhas para obter uma matriz triangular superior ou inferior e depois calcular o determinante utilizando a proposição anterior.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{L_1 \to \frac{1}{2} L_1}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{L_3 \to L_3 - L_1}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 \end{vmatrix} \overset{L_3 \to L_3 - \frac{1}{2} L_2}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = -2 \, . \, \frac{3}{2} = -3$$

Obs: O método dos cofatores é eficiente para o cálculo manual do determinante. O método da redução por linhas é mais adequado para programação.

Matrizes Triangulares

Obs: Para calcular o determinante de uma matriz A, podemos aplicar o método da redução por linhas para obter uma matriz triangular superior ou inferior e depois calcular o determinante utilizando a proposição anterior.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{L_1 \to \frac{1}{2}L_1}{=} -2\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{L_3 \to L_3 - L_1}{=} -2\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 \end{vmatrix} \overset{L_3 \to L_3 - \frac{1}{2}L_2}{=} -2\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = -2 \, . \, \frac{3}{2} = -3$$

Obs: O método dos cofatores é eficiente para o cálculo manual do determinante. O método da redução por linhas é mais adequado para programação.

Matrizes Triangulares

Obs: Para calcular o determinante de uma matriz A, podemos aplicar o método da redução por linhas para obter uma matriz triangular superior ou inferior e depois calcular o determinante utilizando a proposição anterior.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{L_1 \to \frac{1}{2} L_1}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{L_3 \to L_3 - L_1}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 \end{vmatrix} \overset{L_3 \to L_3 - \frac{1}{2} L_2}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = -2 \,.\, \frac{3}{2} = -3$$

Obs: O método dos cofatores é eficiente para o cálculo manual do determinante. O método da redução por linhas é mais adequado para programação.

Matrizes Triangulares

Obs: Para calcular o determinante de uma matriz A, podemos aplicar o método da redução por linhas para obter uma matriz triangular superior ou inferior e depois calcular o determinante utilizando a proposição anterior.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{L_1 \rightarrow \frac{1}{2} L_1}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{L_3 \rightarrow L_3 - L_1}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 \end{vmatrix} \overset{L_3 \rightarrow L_3 - \frac{1}{2} L_2}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = -2 \, . \, \frac{3}{2} = -3$$

Obs: O método dos cofatores é eficiente para o cálculo manual do determinante. O método da redução por linhas é mais adequado para programação.

Matrizes Triangulares

Obs: Para calcular o determinante de uma matriz A, podemos aplicar o método da redução por linhas para obter uma matriz triangular superior ou inferior e depois calcular o determinante utilizando a proposição anterior.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{L_1 \to \frac{1}{2} L_1}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{L_3 \to L_3 - L_1}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 \end{vmatrix} \overset{L_3 \to L_3 - \frac{1}{2} L_2}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = -2 \cdot \frac{3}{2} = -3$$

Obs: O método dos cofatores é eficiente para o cálculo manual do determinante. O método da redução por linhas é mais adequado para programação.

Matrizes Triangulares

Obs: Para calcular o determinante de uma matriz A, podemos aplicar o método da redução por linhas para obter uma matriz triangular superior ou inferior e depois calcular o determinante utilizando a proposição anterior.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{L_1 \to \frac{1}{2}L_1}{=} -2\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{L_3 \to L_3 - L_1}{=} -2\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 \end{vmatrix} \overset{L_3 \to L_3 - \frac{1}{2}L_2}{=} -2\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = -2 \,.\, \frac{3}{2} = -3$$

Obs: O método dos cofatores é eficiente para o cálculo manual do determinante. O método da redução por linhas é mais adequado para programação.