Matriz Inversa

Álgebra Linear

Mariana Silveira - Cristian Coletti

Universidade Federal do ABC

Matriz Adjunta

Sejam $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ e Δ_{ij} o cofator de a_{ij}, ou seja,

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|,$$

onde A_{ij} é a submatriz obtida de A quando retiramos a i-ésima linha e a j-ésima coluna.

- A matriz

$$\overline{A} = [\Delta_{ij}]_{n\times n} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \dots & \Delta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_{n1} & \dots & \Delta_{nn} \end{bmatrix}$$

é chamada **matriz dos cofatores** de A.

Dada $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, a **matriz adjunta** de A, denotada por Adj A é a transposta da matriz dos cofatores de A:

$$\text{Adj } A = \overline{A}^t$$

Matriz Adjunta

Sejam $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ e Δ_{ij} o cofator de a_{ij}, ou seja,

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|,$$

onde A_{ij} é a submatriz obtida de A quando retiramos a i-ésima linha e a j-ésima coluna.

- A matriz

$$\overline{A} = [\Delta_{ij}]_{n\times n} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \cdots & \Delta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_{n1} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix}$$

é chamada **matriz dos cofatores** de A.

Dada $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, a **matriz adjunta** de A, denotada por Adj A é a transposta da matriz dos cofatores de A:

$$\text{Adj } A = \overline{A}^t$$

Matriz Adjunta

Sejam $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ e Δ_{ij} o cofator de a_{ij}, ou seja,

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|,$$

onde A_{ij} é a submatriz obtida de A quando retiramos a i-ésima linha e a j-ésima coluna.

- A matriz

$$\overline{A} = [\Delta_{ij}]_{n\times n} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \cdots & \Delta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_{n1} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix}$$

é chamada **matriz dos cofatores** de A.

Dada $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, a **matriz adjunta** de A, denotada por Adj A é a transposta da matriz dos cofatores de A:

$$\text{Adj } A = \overline{A}^t$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}.2 = 2$ $\quad$ $\Delta_{21} = (-1)^{3}.1 = -1$ $\quad$ $\Delta_{31} = (-1)^{4}.(-1) = -1$

$\Delta_{12} = (-1)^{1+2}.4 = -4$ $\quad$ $\Delta_{22} = (-1)^{4}.(-1) = -1$ $\quad$ $\Delta_{32} = (-1)^{5}.(-2) = 2$

$\Delta_{13} = (-1)^{1+3}.1 = 1$ $\quad$ $\Delta_{23} = (-1)^{5}.(-1) = 1$ $\quad$ $\Delta_{33} = (-1)^{6}.(-2) = -2$

Note que

$$A.\text{Adj}\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \det A.Id_3$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}.2 = 2$ $\qquad \Delta_{21} = (-1)^{3}.1 = -1$ $\qquad \Delta_{31} = (-1)^{4}.(-1) = -1$

$\Delta_{12} = (-1)^{1+2}.4 = -4$ $\qquad \Delta_{22} = (-1)^{4}.(-1) = -1$ $\qquad \Delta_{32} = (-1)^{5}.(-2) = 2$

$\Delta_{13} = (-1)^{1+3}.1 = 1$ $\qquad \Delta_{23} = (-1)^{5}.(-1) = 1$ $\qquad \Delta_{33} = (-1)^{6}.(-2) = -2$

Note que

$$A.\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \det A.Id_3$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}.2 = 2$ $\quad \Delta_{21} = (-1)^3.1 = -1$ $\quad \Delta_{31} = (-1)^4.(-1) = -1$

$\Delta_{12} = (-1)^{1+2}.4 = -4$ $\quad \Delta_{22} = (-1)^4.(-1) = -1$ $\quad \Delta_{32} = (-1)^5.(-2) = 2$

$\Delta_{13} = (-1)^{1+3}.1 = 1$ $\quad \Delta_{23} = (-1)^5.(-1) = 1$ $\quad \Delta_{33} = (-1)^6.(-2) = -2$

Note que

$$A.\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \det A.Id_3$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}.2 = 2 \qquad \Delta_{21} = (-1)^{3}.1 = -1 \qquad \Delta_{31} = (-1)^{4}.(-1) = -1$

$\Delta_{12} = (-1)^{1+2}.4 = -4 \qquad \Delta_{22} = (-1)^{4}.(-1) = -1 \qquad \Delta_{32} = (-1)^{5}.(-2) = 2$

$\Delta_{13} = (-1)^{1+3}.1 = 1 \qquad \Delta_{23} = (-1)^{5}.(-1) = 1 \qquad \Delta_{33} = (-1)^{6}.(-2) = -2$

Note que

$$A.\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \det A.Id_3$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}.2 = 2$ $\quad$ $\Delta_{21} = (-1)^{3}.1 = -1$ $\quad$ $\Delta_{31} = (-1)^{4}.(-1) = -1$

$\Delta_{12} = (-1)^{1+2}.4 = -4$ $\quad$ $\Delta_{22} = (-1)^{4}.(-1) = -1$ $\quad$ $\Delta_{32} = (-1)^{5}.(-2) = 2$

$\Delta_{13} = (-1)^{1+3}.1 = 1$ $\quad$ $\Delta_{23} = (-1)^{5}.(-1) = 1$ $\quad$ $\Delta_{33} = (-1)^{6}.(-2) = -2$

Note que

$$A.\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \det A.Id_3$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}.2 = 2$ $\quad$ $\Delta_{21} = (-1)^{3}.1 = -1$ $\quad$ $\Delta_{31} = (-1)^{4}.(-1) = -1$

$\Delta_{12} = (-1)^{1+2}.4 = -4$ $\quad$ $\Delta_{22} = (-1)^{4}.(-1) = -1$ $\quad$ $\Delta_{32} = (-1)^{5}.(-2) = 2$

$\Delta_{13} = (-1)^{1+3}.1 = 1$ $\quad$ $\Delta_{23} = (-1)^{5}.(-1) = 1$ $\quad$ $\Delta_{33} = (-1)^{6}.(-2) = -2$

Note que

$$A.\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \det A.Id_3$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}.2 = 2$ $\quad$ $\Delta_{21} = (-1)^3.1 = -1$ $\quad$ $\Delta_{31} = (-1)^4.(-1) = -1$

$\Delta_{12} = (-1)^{1+2}.4 = -4$ $\quad$ $\Delta_{22} = (-1)^4.(-1) = -1$ $\quad$ $\Delta_{32} = (-1)^5.(-2) = 2$

$\Delta_{13} = (-1)^{1+3}.1 = 1$ $\quad$ $\Delta_{23} = (-1)^5.(-1) = 1$ $\quad$ $\Delta_{33} = (-1)^6.(-2) = -2$

Note que

$$A.\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \det A.Id_3$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}.2 = 2$ $\quad$ $\Delta_{21} = (-1)^{3}.1 = -1$ $\quad$ $\Delta_{31} = (-1)^{4}.(-1) = -1$

$\Delta_{12} = (-1)^{1+2}.4 = -4$ $\quad$ $\Delta_{22} = (-1)^{4}.(-1) = -1$ $\quad$ $\Delta_{32} = (-1)^{5}.(-2) = 2$

$\Delta_{13} = (-1)^{1+3}.1 = 1$ $\quad$ $\Delta_{23} = (-1)^{5}.(-1) = 1$ $\quad$ $\Delta_{33} = (-1)^{6}.(-2) = -2$

Note que

$$A.\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \det A.Id_3$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}.2 = 2$ $\quad\Delta_{21} = (-1)^{3}.1 = -1$ $\quad\Delta_{31} = (-1)^{4}.(-1) = -1$

$\Delta_{12} = (-1)^{1+2}.4 = -4$ $\quad\Delta_{22} = (-1)^{4}.(-1) = -1$ $\quad\Delta_{32} = (-1)^{5}.(-2) = 2$

$\Delta_{13} = (-1)^{1+3}.1 = 1$ $\quad\Delta_{23} = (-1)^{5}.(-1) = 1$ $\quad\Delta_{33} = (-1)^{6}.(-2) = -2$

Note que

$$A.\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \det A.Id_3$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{Adj } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}.2 = 2 \qquad \Delta_{21} = (-1)^{3}.1 = -1 \qquad \Delta_{31} = (-1)^{4}.(-1) = -1$$

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2}.4 = -4 \qquad \Delta_{22} = (-1)^{4}.(-1) = -1 \qquad \Delta_{32} = (-1)^{5}.(-2) = 2$$

$$\Delta_{13} = (-1)^{1+3}.1 = 1 \qquad \Delta_{23} = (-1)^{5}.(-1) = 1 \qquad \Delta_{33} = (-1)^{6}.(-2) = -2$$

Note que

$$A.\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \det A.Id_3$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{Adj } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}.2 = 2 \qquad \Delta_{21} = (-1)^{3}.1 = -1 \qquad \Delta_{31} = (-1)^{4}.(-1) = -1$$

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2}.4 = -4 \qquad \Delta_{22} = (-1)^{4}.(-1) = -1 \qquad \Delta_{32} = (-1)^{5}.(-2) = 2$$

$$\Delta_{13} = (-1)^{1+3}.1 = 1 \qquad \Delta_{23} = (-1)^{5}.(-1) = 1 \qquad \Delta_{33} = (-1)^{6}.(-2) = -2$$

Note que

$$A.\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \det A.Id_3$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{Adj } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}.2 = 2 \qquad \Delta_{21} = (-1)^{3}.1 = -1 \qquad \Delta_{31} = (-1)^{4}.(-1) = -1$$

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2}.4 = -4 \qquad \Delta_{22} = (-1)^{4}.(-1) = -1 \qquad \Delta_{32} = (-1)^{5}.(-2) = 2$$

$$\Delta_{13} = (-1)^{1+3}.1 = 1 \qquad \Delta_{23} = (-1)^{5}.(-1) = 1 \qquad \Delta_{33} = (-1)^{6}.(-2) = -2$$

Note que

$$A.\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \det A.Id_3$$

Matriz Adjunta e Matriz Inversa

Teorema 1: Dada $A = [a_{ij}]_n$

$$\text{Adj } A.A = A.\text{Adj } A = \det A.Id_n$$

Prova: A i-ésima coluna de Adj A é a i-ésima linha da matriz dos cofatores.

$$c_{ii} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_{i1} \\ \Delta_{i2} \\ \vdots \\ \Delta_{in} \end{bmatrix} = \det A$$

$$c_{12} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_{21} \\ \Delta_{22} \\ \vdots \\ \Delta_{2n} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\text{matriz com duas linhas iguais}} = 0$$

Matriz Adjunta e Matriz Inversa

Teorema 1: Dada $A = [a_{ij}]_n$

$$\text{Adj } A.A = A.\text{Adj } A = \det A.Id_n$$

Prova: A i-ésima coluna de Adj A é a i-ésima linha da matriz dos cofatores.

$$c_{ii} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_{i1} \\ \Delta_{i2} \\ \vdots \\ \Delta_{in} \end{bmatrix} = \det A$$

$$c_{12} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_{21} \\ \Delta_{22} \\ \vdots \\ \Delta_{2n} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\text{matriz com duas linhas iguais}} = 0$$

Matriz Adjunta e Matriz Inversa

Teorema 1: Dada $A = [a_{ij}]_n$

$$\text{Adj } A.A = A.\text{Adj } A = \det A.Id_n$$

Prova: A i-ésima coluna de Adj A é a i-ésima linha da matriz dos cofatores.

$$c_{ii} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_{i1} \\ \Delta_{i2} \\ \vdots \\ \Delta_{in} \end{bmatrix} = \det A$$

$$c_{12} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_{21} \\ \Delta_{22} \\ \vdots \\ \Delta_{2n} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\text{matriz com duas linhas iguais}} = 0$$

Matriz Adjunta e Matriz Inversa

Teorema 1: Dada $A = [a_{ij}]_n$

$$\text{Adj } A.A = A.\text{Adj } A = \det A.Id_n$$

Prova: A i-ésima coluna de Adj A é a i-ésima linha da matriz dos cofatores.

$$c_{ii} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_{i1} \\ \Delta_{i2} \\ \vdots \\ \Delta_{in} \end{bmatrix} = \det A$$

$$c_{12} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_{21} \\ \Delta_{22} \\ \vdots \\ \Delta_{2n} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\text{matriz com duas linhas iguais}} = 0$$

Matriz Adjunta e Matriz Inversa

Teorema 1: Dada $A = [a_{ij}]_n$

$$\text{Adj } A.A = A.\text{Adj } A = \det A.Id_n$$

Prova: A i-ésima coluna de Adj A é a i-ésima linha da matriz dos cofatores.

$$c_{ii} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_{i1} \\ \Delta_{i2} \\ \vdots \\ \Delta_{in} \end{bmatrix} = \det A$$

$$c_{12} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_{21} \\ \Delta_{22} \\ \vdots \\ \Delta_{2n} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\text{matriz com duas linhas iguais}} = 0$$

Matriz Adjunta e Matriz Inversa

Teorema 1: Dada $A = [a_{ij}]_n$

$$\text{Adj } A.A = A.\text{Adj } A = \det A.Id_n$$

Prova: A i-ésima coluna de Adj A é a i-ésima linha da matriz dos cofatores.

$$c_{ii} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \Delta_{i1} \\ \Delta_{i2} \\ \vdots \\ \Delta_{in} \end{bmatrix} = \det A$$

$$c_{12} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \Delta_{21} \\ \Delta_{22} \\ \vdots \\ \Delta_{2n} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\text{matriz com duas linhas iguais}} = 0$$

Matriz Adjunta e Matriz Inversa

Teorema 1: Dada $A = [a_{ij}]_n$

$$\text{Adj } A.A = A.\text{Adj } A = \det A.Id_n$$

Prova: A i-ésima coluna de Adj A é a i-ésima linha da matriz dos cofatores.

$$c_{ii} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \Delta_{i1} \\ \Delta_{i2} \\ \vdots \\ \Delta_{in} \end{bmatrix} = \det A$$

$$c_{12} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \Delta_{21} \\ \Delta_{22} \\ \vdots \\ \Delta_{2n} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\text{matriz com duas linhas iguais}} = 0$$

Matriz Adjunta e Matriz Inversa

Teorema 2: Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ admite inversa se, e somente se, $\det A \neq 0$. Nesse caso,

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Prova: $(\Rightarrow)$ Suponha que A admite inversa. Então

$\det A . \det A^{-1} = \det (A.A^{-1}) = \det Id_n = 1$.

Portanto $\det A \neq 0$.

$(\Leftarrow)$ Suponha que $\det A \neq 0$. Pelo Teorema 1, $A.\text{adj } A = \text{adj } A.A = \det A.Id_n$. Logo

$$A.\frac{\text{Adj } A}{\det A} = \frac{\text{Adj } A}{\det A}.A = Id_n$$

Portanto A tem inversa. $\square$

Corolário: Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ admite inversa então $A^{-1} = \dfrac{\text{Adj } A}{\det A}$.

Matriz Adjunta e Matriz Inversa

Teorema 2: Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ admite inversa se, e somente se, $\det A \neq 0$. Nesse caso,

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Prova: $(\Rightarrow)$ Suponha que A admite inversa. Então $\det A . \det A^{-1} = \det (A.A^{-1}) = \det Id_n = 1$.

Portanto $\det A \neq 0$.

$(\Leftarrow)$ Suponha que $\det A \neq 0$. Pelo Teorema 1, $A.\text{adj } A = \text{adj } A.A = \det A.Id_n$. Logo

$$A.\frac{\text{Adj } A}{\det A} = \frac{\text{Adj } A}{\det A}.A = Id_n$$

Portanto A tem inversa. $\square$

Corolário: Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ admite inversa então $A^{-1} = \dfrac{\text{Adj } A}{\det A}$.

Matriz Adjunta e Matriz Inversa

Teorema 2: Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ admite inversa se, e somente se, $\det A \neq 0$. Nesse caso,

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Prova: $(\Rightarrow)$ Suponha que A admite inversa. Então

$\det A . \det A^{-1} = \det (A.A^{-1}) = \det Id_n = 1.$

Portanto $\det A \neq 0$.

$(\Leftarrow)$ Suponha que $\det A \neq 0$. Pelo Teorema 1, $A.\text{adj } A = \text{adj } A.A = \det A.Id_n$. Logo

$$A.\frac{\text{Adj } A}{\det A} = \frac{\text{Adj } A}{\det A}.A = Id_n$$

Portanto A tem inversa. $\square$

Corolário: Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ admite inversa então $A^{-1} = \dfrac{\text{Adj } A}{\det A}$.

Matriz Adjunta e Matriz Inversa

Teorema 2: Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ admite inversa se, e somente se, $\det A \neq 0$. Nesse caso,

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Prova: $(\Rightarrow)$ Suponha que A admite inversa. Então $\det A . \det A^{-1} = \det (A.A^{-1}) = \det Id_n = 1$.

Portanto $\det A \neq 0$.

$(\Leftarrow)$ Suponha que $\det A \neq 0$. Pelo Teorema 1, $A.\text{adj } A = \text{adj } A.A = \det A.Id_n$. Logo

$$A.\frac{\text{Adj } A}{\det A} = \frac{\text{Adj } A}{\det A}.A = Id_n$$

Portanto A tem inversa. □

Corolário: Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ admite inversa então $A^{-1} = \dfrac{\text{Adj } A}{\det A}$.

Matriz Adjunta e Matriz Inversa

Teorema 2: Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ admite inversa se, e somente se, $\det A \neq 0$. Nesse caso,

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Prova: $(\Rightarrow)$ Suponha que A admite inversa. Então

$\det A . \det A^{-1} = \det (A.A^{-1}) = \det Id_n = 1.$

Portanto $\det A \neq 0$.

$(\Leftarrow)$ Suponha que $\det A \neq 0$. Pelo Teorema 1, $A.\mathrm{adj}\, A = \mathrm{adj}\, A.A = \det A.Id_n$. Logo

$$A.\frac{\mathrm{Adj}\, A}{\det A} = \frac{\mathrm{Adj}\, A}{\det A}.A = Id_n$$

Portanto A tem inversa. $\square$

Corolário: Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ admite inversa então $A^{-1} = \dfrac{\mathrm{Adj}\, A}{\det A}$.

Matriz Adjunta e Matriz Inversa

Teorema 2: Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ admite inversa se, e somente se, $\det A \neq 0$. Nesse caso,

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Prova: $(\Rightarrow)$ Suponha que A admite inversa. Então

$\det A . \det A^{-1} = \det (A.A^{-1}) = \det Id_n = 1.$

Portanto $\det A \neq 0$.

$(\Leftarrow)$ Suponha que $\det A \neq 0$. Pelo Teorema 1, $A.\text{adj } A = \text{adj } A.A = \det A.Id_n$. Logo

$$A.\frac{\text{Adj } A}{\det A} = \frac{\text{Adj } A}{\det A}.A = Id_n$$

Portanto A tem inversa. $\square$

Corolário: Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ admite inversa então $A^{-1} = \dfrac{\text{Adj } A}{\det A}$.

Matriz Adjunta e Matriz Inversa

Teorema 2: Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ admite inversa se, e somente se, $\det A \neq 0$. Nesse caso,

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Prova: $(\Rightarrow)$ Suponha que A admite inversa. Então

$\det A . \det A^{-1} = \det (A.A^{-1}) = \det Id_n = 1.$

Portanto $\det A \neq 0$.

$(\Leftarrow)$ Suponha que $\det A \neq 0$. Pelo Teorema 1, $A.\text{adj } A = \text{adj } A.A = \det A . Id_n$. Logo

$$A.\frac{\text{Adj } A}{\det A} = \frac{\text{Adj } A}{\det A}.A = Id_n$$

Portanto A tem inversa. $\square$

Corolário: Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ admite inversa então $A^{-1} = \dfrac{\text{Adj } A}{\det A}$.

Matriz Adjunta e Matriz Inversa

Teorema 2: Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ admite inversa se, e somente se, $\det A \neq 0$. Nesse caso,

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Prova: $(\Rightarrow)$ Suponha que A admite inversa. Então

$\det A . \det A^{-1} = \det (A.A^{-1}) = \det Id_n = 1.$

Portanto $\det A \neq 0$.

$(\Leftarrow)$ Suponha que $\det A \neq 0$. Pelo Teorema 1, $A.\text{adj } A = \text{adj } A.A = \det A.Id_n$. Logo

$$A.\frac{\text{Adj } A}{\det A} = \frac{\text{Adj } A}{\det A}.A = Id_n$$

Portanto A tem inversa. $\square$

Corolário: Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ admite inversa então $A^{-1} = \dfrac{\text{Adj } A}{\det A}$.

Matriz Adjunta e Matriz Inversa

Teorema 2: Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ admite inversa se, e somente se, $\det A \neq 0$. Nesse caso,

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Prova: $(\Rightarrow)$ Suponha que A admite inversa. Então

$\det A . \det A^{-1} = \det (A.A^{-1}) = \det Id_n = 1.$

Portanto $\det A \neq 0$.

$(\Leftarrow)$ Suponha que $\det A \neq 0$. Pelo Teorema 1, $A.\text{adj } A = \text{adj } A.A = \det A.Id_n$. Logo

$$A.\frac{\text{Adj } A}{\det A} = \frac{\text{Adj } A}{\det A}.A = Id_n$$

Portanto A tem inversa. $\square$

Corolário: Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ admite inversa então $A^{-1} = \dfrac{\text{Adj } A}{\det A}$.

Matriz Adjunta e Matriz Inversa

Teorema 2: Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ admite inversa se, e somente se, $\det A \neq 0$. Nesse caso,

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Prova: $(\Rightarrow)$ Suponha que A admite inversa. Então

$\det A . \det A^{-1} = \det (A.A^{-1}) = \det Id_n = 1.$

Portanto $\det A \neq 0$.

$(\Leftarrow)$ Suponha que $\det A \neq 0$. Pelo Teorema 1, $A.\text{adj } A = \text{adj } A.A = \det A.Id_n$. Logo

$$A.\frac{\text{Adj } A}{\det A} = \frac{\text{Adj } A}{\det A}.A = Id_n$$

Portanto A tem inversa. $\square$

Corolário: Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ admite inversa então $A^{-1} = \dfrac{\text{Adj } A}{\det A}$.

Exemplo

Voltando ao exemplo anterior.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{Adj } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Adj } A$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Exemplo

Voltando ao exemplo anterior.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{Adj } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Adj } A$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Exemplo

Voltando ao exemplo anterior.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{Adj } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\text{Adj } A$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Exemplo

Voltando ao exemplo anterior.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{Adj } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Adj } A$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Propriedades da Matriz Inversa

1. Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ admitem inversa, então a matriz $A.B$ admite inversa e $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.
2. Dada $A \in M_n(\mathbb{R})$, se existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $A.B = Id_n$, então A admite inversa e $B = A^{-1}$. (Na definição de inversa, basta verificar uma das igualdades - A inversa é única!)

Prova:

1. $(A.B)(B^{-1}.A^{-1}) \overset{\text{Associat.}}{=} A(B.B^{-1})A^{-1} = A.Id_n.A^{-1} = A.A^{-1} = Id_n$.

   Analogamente, $(B^{-1}.A^{-1})(A.B) = Id_n$.

2. Como $A.B = Id_n$, então $\det A.\det B = \det(A.B) = \det Id_n = 1$, logo $\det A \neq 0$. Portanto A admite inversa. Temos então

   $B = Id_n.B = (A^{-1}.A)B \overset{\text{Associat.}}{=} A^{-1}(A.B) = A^{-1}.Id_n = A^{-1}$. □

Propriedades da Matriz Inversa

1. Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ admitem inversa, então a matriz $A.B$ admite inversa e $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.
2. Dada $A \in M_n(\mathbb{R})$, se existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $A.B = Id_n$, então A admite inversa e $B = A^{-1}$. (Na definição de inversa, basta verificar uma das igualdades - A inversa é única!)

Prova:

1. $(A.B)(B^{-1}.A^{-1}) \overset{\text{Associat.}}{=} A(B.B^{-1})A^{-1} = A.Id_n.A^{-1} = A.A^{-1} = Id_n$.

   Analogamente, $(B^{-1}.A^{-1})(A.B) = Id_n$.
2. Como $A.B = Id_n$, então $\det A . \det B = \det(A.B) = \det Id_n = 1$, logo $\det A \neq 0$. Portanto A admite inversa. Temos então

   $B = Id_n.B = (A^{-1}.A)B \overset{\text{Associat.}}{=} A^{-1}(A.B) = A^{-1}.Id_n = A^{-1}$. □

Propriedades da Matriz Inversa

1. Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ admitem inversa, então a matriz $A.B$ admite inversa e $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.
2. Dada $A \in M_n(\mathbb{R})$, se existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $A.B = Id_n$, então A admite inversa e $B = A^{-1}$. (Na definição de inversa, basta verificar uma das igualdades - A inversa é única!)

Prova:

1. $(A.B)(B^{-1}.A^{-1}) \overset{\text{Associat.}}{=} A(B.B^{-1})A^{-1} = A.Id_n.A^{-1} = A.A^{-1} = Id_n$.

   Analogamente, $(B^{-1}.A^{-1})(A.B) = Id_n$.

2. Como $A.B = Id_n$, então $\det A . \det B = \det (A.B) = \det Id_n = 1$, logo $\det A \neq 0$. Portanto A admite inversa. Temos então

   $$B = Id_n.B = (A^{-1}.A)B \overset{\text{Associat.}}{=} A^{-1}(A.B) = A^{-1}.Id_n = A^{-1}. \quad \square$$

Propriedades da Matriz Inversa

1. Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ admitem inversa, então a matriz $A.B$ admite inversa e $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.
2. Dada $A \in M_n(\mathbb{R})$, se existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $A.B = Id_n$, então A admite inversa e $B = A^{-1}$. (Na definição de inversa, basta verificar uma das igualdades - A inversa é única!)

Prova:

1. $(A.B)(B^{-1}.A^{-1}) \overset{\overset{\text{Associat.}}{\downarrow}}{=} A(B.B^{-1})A^{-1} = A.Id_n.A^{-1} = A.A^{-1} = Id_n$.

   Analogamente, $(B^{-1}.A^{-1})(A.B) = Id_n$.
2. Como $A.B = Id_n$, então $\det A . \det B = \det(A.B) = \det Id_n = 1$, logo $\det A \neq 0$. Portanto A admite inversa. Temos então

   $$B = Id_n.B = (A^{-1}.A)B \overset{\overset{\text{Associat.}}{\downarrow}}{=} A^{-1}(A.B) = A^{-1}.Id_n = A^{-1}.$$ $\square$

Propriedades da Matriz Inversa

1. Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ admitem inversa, então a matriz $A.B$ admite inversa e $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.
2. Dada $A \in M_n(\mathbb{R})$, se existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $A.B = Id_n$, então A admite inversa e $B = A^{-1}$. (Na definição de inversa, basta verificar uma das igualdades - A inversa é única!)

Prova:

1. $(A.B)(B^{-1}.A^{-1}) \overset{\text{Associat.}}{=} A(B.B^{-1})A^{-1} = A.Id_n.A^{-1} = A.A^{-1} = Id_n.$

   Analogamente, $(B^{-1}.A^{-1})(A.B) = Id_n$.

2. Como $A.B = Id_n$, então $\det A . \det B = \det (A.B) = \det Id_n = 1$, logo $\det A \neq 0$. Portanto A admite inversa. Temos então

   $B = Id_n.B = (A^{-1}.A)B \overset{\text{Associat.}}{=} A^{-1}(A.B) = A^{-1}.Id_n = A^{-1}.$ □

Propriedades da Matriz Inversa

1. Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ admitem inversa, então a matriz $A.B$ admite inversa e $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.
2. Dada $A \in M_n(\mathbb{R})$, se existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $A.B = Id_n$, então A admite inversa e $B = A^{-1}$. (Na definição de inversa, basta verificar uma das igualdades - A inversa é única!)

Prova:

1. $(A.B)(B^{-1}.A^{-1}) \overset{\substack{\text{Associat.} \\ \downarrow}}{=} A(B.B^{-1})A^{-1} = A.Id_n.A^{-1} = A.A^{-1} = Id_n$.

   Analogamente, $(B^{-1}.A^{-1})(A.B) = Id_n$.

2. Como $A.B = Id_n$, então $\det A . \det B = \det(A.B) = \det Id_n = 1$, logo $\det A \neq 0$. Portanto A admite inversa. Temos então

   $B = Id_n.B = (A^{-1}.A)B \overset{\substack{\text{Associat.} \\ \downarrow}}{=} A^{-1}(A.B) = A^{-1}.Id_n = A^{-1}$. □

Propriedades da Matriz Inversa

1. Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ admitem inversa, então a matriz $A.B$ admite inversa e $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.
2. Dada $A \in M_n(\mathbb{R})$, se existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $A.B = Id_n$, então A admite inversa e $B = A^{-1}$. (Na definição de inversa, basta verificar uma das igualdades - A inversa é única!)

Prova:

1. $(A.B)(B^{-1}.A^{-1}) \overset{\text{Associat.}}{=} A(B.B^{-1})A^{-1} = A.Id_n.A^{-1} = A.A^{-1} = Id_n$.

   Analogamente, $(B^{-1}.A^{-1})(A.B) = Id_n$.

2. Como $A.B = Id_n$, então $\det A.\det B = \det(A.B) = \det Id_n = 1$, logo $\det A \neq 0$. Portanto A admite inversa. Temos então

   $B = Id_n.B = (A^{-1}.A)B \overset{\text{Associat.}}{=} A^{-1}(A.B) = A^{-1}.Id_n = A^{-1}$. $\square$

Propriedades da Matriz Inversa

1. Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ admitem inversa, então a matriz $A.B$ admite inversa e $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.
2. Dada $A \in M_n(\mathbb{R})$, se existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $A.B = Id_n$, então A admite inversa e $B = A^{-1}$. (Na definição de inversa, basta verificar uma das igualdades - A inversa é única!)

Prova:

1. $(A.B)(B^{-1}.A^{-1}) \overset{\text{Associat.}}{=} A(B.B^{-1})A^{-1} = A.Id_n.A^{-1} = A.A^{-1} = Id_n$.

   Analogamente, $(B^{-1}.A^{-1})(A.B) = Id_n$.
2. Como $A.B = Id_n$, então $\det A.\det B = \det(A.B) = \det Id_n = 1$, logo $\det A \neq 0$. Portanto A admite inversa. Temos então

   $B = Id_n.B = (A^{-1}.A)B \overset{\text{Associat.}}{=} A^{-1}(A.B) = A^{-1}.Id_n = A^{-1}$. □

Propriedades da Matriz Inversa

1. Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ admitem inversa, então a matriz $A.B$ admite inversa e $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.
2. Dada $A \in M_n(\mathbb{R})$, se existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $A.B = Id_n$, então A admite inversa e $B = A^{-1}$. (Na definição de inversa, basta verificar uma das igualdades - A inversa é única!)

Prova:

1. $(A.B)(B^{-1}.A^{-1}) \overset{\text{Associat.}}{=} A(B.B^{-1})A^{-1} = A.Id_n.A^{-1} = A.A^{-1} = Id_n$.

   Analogamente, $(B^{-1}.A^{-1})(A.B) = Id_n$.
2. Como $A.B = Id_n$, então $\det A . \det B = \det (A.B) = \det Id_n = 1$, logo $\det A \neq 0$. Portanto A admite inversa. Temos então

   $B = Id_n.B = (A^{-1}.A)B \overset{\text{Associat.}}{=} A^{-1}(A.B) = A^{-1}.Id_n = A^{-1}$. □

Propriedades da Matriz Inversa

1. Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ admitem inversa, então a matriz $A.B$ admite inversa e $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.
2. Dada $A \in M_n(\mathbb{R})$, se existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $A.B = Id_n$, então A admite inversa e $B = A^{-1}$. (Na definição de inversa, basta verificar uma das igualdades - A inversa é única!)

Prova:

1. $(A.B)(B^{-1}.A^{-1}) \overset{\text{Associat.}}{=} A(B.B^{-1})A^{-1} = A.Id_n.A^{-1} = A.A^{-1} = Id_n$.

   Analogamente, $(B^{-1}.A^{-1})(A.B) = Id_n$.

2. Como $A.B = Id_n$, então $\det A . \det B = \det(A.B) = \det Id_n = 1$, logo $\det A \neq 0$. Portanto A admite inversa. Temos então

$$B = Id_n.B = (A^{-1}.A)B \overset{\text{Associat.}}{=} A^{-1}(A.B) = A^{-1}.Id_n = A^{-1}.$$

$\square$

Propriedades da Matriz Inversa

1. Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ admitem inversa, então a matriz $A.B$ admite inversa e $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.
2. Dada $A \in M_n(\mathbb{R})$, se existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $A.B = Id_n$, então A admite inversa e $B = A^{-1}$. (Na definição de inversa, basta verificar uma das igualdades - A inversa é única!)

Prova:

1. $(A.B)(B^{-1}.A^{-1}) \overset{\text{Associat.}}{=} A(B.B^{-1})A^{-1} = A.Id_n.A^{-1} = A.A^{-1} = Id_n$.

   Analogamente, $(B^{-1}.A^{-1})(A.B) = Id_n$.

2. Como $A.B = Id_n$, então $\det A . \det B = \det (A.B) = \det Id_n = 1$, logo $\det A \neq 0$. Portanto A admite inversa. Temos então

   $$B = Id_n.B = (A^{-1}.A)B \overset{\text{Associat.}}{=} A^{-1}(A.B) = A^{-1}.Id_n = A^{-1}.$$

$\square$

Propriedades da Matriz Inversa

1. Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ admitem inversa, então a matriz $A.B$ admite inversa e $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.
2. Dada $A \in M_n(\mathbb{R})$, se existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $A.B = Id_n$, então A admite inversa e $B = A^{-1}$. (Na definição de inversa, basta verificar uma das igualdades - A inversa é única!)

Prova:

1. $(A.B)(B^{-1}.A^{-1}) \overset{\overset{\text{Associat.}}{\downarrow}}{=} A(B.B^{-1})A^{-1} = A.Id_n.A^{-1} = A.A^{-1} = Id_n$.

   Analogamente, $(B^{-1}.A^{-1})(A.B) = Id_n$.

2. Como $A.B = Id_n$, então $\det A . \det B = \det (A.B) = \det Id_n = 1$, logo $\det A \neq 0$. Portanto A admite inversa. Temos então

   $$B = Id_n.B = (A^{-1}.A)B \overset{\overset{\text{Associat.}}{\downarrow}}{=} A^{-1}(A.B) = A^{-1}.Id_n = A^{-1}.$$

Propriedades da Matriz Inversa

1. Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ admitem inversa, então a matriz $A.B$ admite inversa e $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.
2. Dada $A \in M_n(\mathbb{R})$, se existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $A.B = Id_n$, então A admite inversa e $B = A^{-1}$. (Na definição de inversa, basta verificar uma das igualdades - A inversa é única!)

Prova:

1. $(A.B)(B^{-1}.A^{-1}) \overset{\text{Associat.}}{\overset{\downarrow}{=}} A(B.B^{-1})A^{-1} = A.Id_n.A^{-1} = A.A^{-1} = Id_n$.

   Analogamente, $(B^{-1}.A^{-1})(A.B) = Id_n$.

2. Como $A.B = Id_n$, então $\det A . \det B = \det (A.B) = \det Id_n = 1$, logo $\det A \neq 0$. Portanto A admite inversa. Temos então

   $$B = Id_n.B = (A^{-1}.A)B \overset{\text{Associat.}}{\overset{\downarrow}{=}} A^{-1}(A.B) = A^{-1}.Id_n = A^{-1}. \qquad \square$$

Propriedades da Matriz Inversa

3. Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ admite inversa, então A^t admite inversa e $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
4. Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ admite inversa e $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, então $k.A$ admite inversa e $(k.A)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$.
5. Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ admite inversa e $m \in \mathbb{Z}_+$, então A^m admite inversa e $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$.

Prova:

3. $A^t(A^{-1})^t \overset{\text{Transposta Prod.}}{=} (A^{-1}.A)^t = Id_n^t = Id_n$.

4. Exercício.

5. Exercício. $\square$

Propriedades da Matriz Inversa

3. Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ admite inversa, então A^t admite inversa e $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
4. Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ admite inversa e $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, então $k.A$ admite inversa e $(k.A)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$.
5. Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ admite inversa e $m \in \mathbb{Z}_+$, então A^m admite inversa e $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$.

Prova:

3. $A^t(A^{-1})^t \overset{\text{Transposta Prod.}}{\overset{\downarrow}{=}} (A^{-1}.A)^t = Id_n^t = Id_n.$

4. Exercício.

5. Exercício. $\square$

Propriedades da Matriz Inversa

3. Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ admite inversa, então A^t admite inversa e $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
4. Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ admite inversa e $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, então $k.A$ admite inversa e $(k.A)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$.
5. Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ admite inversa e $m \in \mathbb{Z}_+$, então A^m admite inversa e $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$.

Prova:

3. $A^t(A^{-1})^t \overset{\text{Transposta Prod.}}{\overset{\downarrow}{=}} (A^{-1}.A)^t = Id_n^t = Id_n$.

4. Exercício.

5. Exercício. □

Propriedades da Matriz Inversa

3. Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ admite inversa, então A^t admite inversa e $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
4. Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ admite inversa e $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, então $k.A$ admite inversa e $(k.A)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$.
5. Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ admite inversa e $m \in \mathbb{Z}_+$, então A^m admite inversa e $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$.

Prova:

3. $A^t(A^{-1})^t \overset{\substack{\text{Transposta Prod.} \\ \downarrow}}{=} (A^{-1}.A)^t = Id_n^t = Id_n$.

4. Exercício.

5. Exercício. $\square$

Cálculo da Matriz inversa utilizando operações elementares nas linhas

Teorema 3: Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ admite inversa se, e somente se, a matriz escalonada reduzida linha-equivalente a A é a matriz Id_n. Nesse caso, se aplicarmos na matriz Id_n a mesma sequência de operações elementares que aplicamos para escalonar a matriz A, a matriz obtida é a matriz A^{-1}.

$$A \xrightarrow{E_1, E_2, \ldots, E_m} Id_n \xrightarrow{E_1, E_2, \ldots, E_m} A^{-1}$$

Prova:($\Leftarrow$)

Afirmação: Realizar uma operação elementar nas linhas de uma matriz equivale a multiplicar uma Matriz Elementar (matriz obtida de Id_n por uma operação elementar) por A.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Cálculo da Matriz inversa utilizando operações elementares nas linhas

Teorema 3: Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ admite inversa se, e somente se, a matriz escalonada reduzida linha-equivalente a A é a matriz Id_n. Nesse caso, se aplicarmos na matriz Id_n a mesma sequência de operações elementares que aplicamos para escalonar a matriz A, a matriz obtida é a matriz A^{-1}.

$$A \xrightarrow{E_1, E_2, \ldots, E_m} Id_n \xrightarrow{E_1, E_2, \ldots, E_m} A^{-1}$$

Prova:($\Leftarrow$)

Afirmação: Realizar uma operação elementar nas linhas de uma matriz equivale a multiplicar uma Matriz Elementar (matriz obtida de Id_n por uma operação elementar) por A.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Cálculo da Matriz inversa utilizando operações elementares nas linhas

Teorema 3: Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ admite inversa se, e somente se, a matriz escalonada reduzida linha-equivalente a A é a matriz Id_n. Nesse caso, se aplicarmos na matriz Id_n a mesma sequência de operações elementares que aplicamos para escalonar a matriz A, a matriz obtida é a matriz A^{-1}.

$$A \xrightarrow{E_1, E_2, \ldots, E_m} Id_n \xrightarrow{E_1, E_2, \ldots, E_m} A^{-1}$$

Prova:($\Leftarrow$)

Afirmação: Realizar uma operação elementar nas linhas de uma matriz equivale a multiplicar uma Matriz Elementar (matriz obtida de Id_n por uma operação elementar) por A.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Cálculo da Matriz inversa utilizando operações elementares nas linhas

Teorema 3: Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ admite inversa se, e somente se, a matriz escalonada reduzida linha-equivalente a A é a matriz Id_n. Nesse caso, se aplicarmos na matriz Id_n a mesma sequência de operações elementares que aplicamos para escalonar a matriz A, a matriz obtida é a matriz A^{-1}.

$$A \xrightarrow{E_1, E_2, \ldots, E_m} Id_n \xrightarrow{E_1, E_2, \ldots, E_m} A^{-1}$$

Prova:($\Leftarrow$)

Afirmação: Realizar uma operação elementar nas linhas de uma matriz equivale a multiplicar uma Matriz Elementar (matriz obtida de Id_n por uma operação elementar) por A.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Cálculo da Matriz inversa utilizando operações elementares nas linhas

- Permutação de linhas.

$$\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \leftarrow \text{ equivale a } \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{obtida de } Id_n \text{ por } L_1 \leftrightarrow L_2} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- Multiplicação de uma linha por uma constante não nula.

$$\xrightarrow{L_2 \to kL_2} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \leftarrow \text{ equivale a } \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{obtida de } Id_n \text{ por } L_2 \to kL_2} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Cálculo da Matriz inversa utilizando operações elementares nas linhas

- Permutação de linhas.

$$\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \leftarrow \text{equivale a} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{obtida de } Id_n \text{ por } L_1 \leftrightarrow L_2} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- Multiplicação de uma linha por uma constante não nula.

$$\xrightarrow{L_2 \to kL_2} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \leftarrow \text{equivale a} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{obtida de } Id_n \text{ por } L_2 \to kL_2} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Cálculo da Matriz inversa utilizando operações elementares nas linhas

- Permutação de linhas.

$$\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \leftarrow \text{ equivale a } \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{obtida de } Id_n \text{ por } L_1 \leftrightarrow L_2} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- Multiplicação de uma linha por uma constante não nula.

$$\xrightarrow{L_2 \to kL_2} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \leftarrow \text{ equivale a } \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{obtida de } Id_n \text{ por } L_2 \to kL_2} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Cálculo da Matriz inversa utilizando operações elementares nas linhas

- Permutação de linhas.

$$\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \leftarrow \text{ equivale a } \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{obtida de } Id_n \text{ por } L_1 \leftrightarrow L_2} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- Multiplicação de uma linha por uma constante não nula.

$$\xrightarrow{L_2 \rightarrow kL_2} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \leftarrow \text{ equivale a } \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{obtida de } Id_n \text{ por } L_2 \rightarrow kL_2} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Cálculo da Matriz inversa utilizando operações elementares nas linhas

•Somar a uma linha um múltiplo de outra linha.

$$\xrightarrow{L_2 \to L_2 + kL_3} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{31} & a_{22} + ka_{32} & a_{23} + ka_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

equivale a multiplicar $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{obtida de } Id_n \text{ por } L_2 \to L_2 + kL_3} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Suponha que A é linha-equivalente a Id_n. Segue da Afirmação que

$$Id_n = (E_1 E_2 \ldots E_m)A.$$

Segue da Propriedade 2 que $A^{-1} = (E_1 E_2 \ldots E_m)Id_n$. □

Cálculo da Matriz inversa utilizando operações elementares nas linhas

•Somar a uma linha um múltiplo de outra linha.

$$\xrightarrow{L_2 \to L_2 + kL_3} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{31} & a_{22} + ka_{32} & a_{23} + ka_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

equivale a multiplicar
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{obtida de } Id_n \text{ por } L_2 \to L_2 + kL_3} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Suponha que A é linha-equivalente a Id_n. Segue da Afirmação que

$$Id_n = (E_1 E_2 \dots E_m)A.$$

Segue da Propriedade 2 que $A^{-1} = (E_1 E_2 \dots E_m)Id_n$. □

Cálculo da Matriz inversa utilizando operações elementares nas linhas

•Somar a uma linha um múltiplo de outra linha.

$$\xrightarrow{L_2 \to L_2 + kL_3} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{31} & a_{22} + ka_{32} & a_{23} + ka_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

equivale a multiplicar $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{obtida de } Id_n \text{ por } L_2 \to L_2 + kL_3} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Suponha que A é linha-equivalente a Id_n. Segue da Afirmação que

$$Id_n = (E_1 E_2 \dots E_m)A.$$

Segue da Propriedade 2 que $A^{-1} = (E_1 E_2 \dots E_m)Id_n$. □

Cálculo da Matriz inversa utilizando operações elementares nas linhas

•Somar a uma linha um múltiplo de outra linha.

$$\xrightarrow{L_2 \to L_2 + kL_3} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{31} & a_{22} + ka_{32} & a_{23} + ka_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

equivale a multiplicar $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{obtida de } Id_n \text{ por } L_2 \to L_2 + kL_3} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Suponha que A é linha-equivalente a Id_n. Segue da Afirmação que

$$Id_n = (E_1 E_2 \ldots E_m)A.$$

Segue da Propriedade 2 que $A^{-1} = (E_1 E_2 \ldots E_m) Id_n$. □

Cálculo da Matriz inversa utilizando operações elementares nas linhas

- A mesma sequência de operações que reduzem A à matriz Id_n transformam Id_n na matriz A^{-1}.

- Na prática operamos simultaneamente as matrizes A e Id_n realizando operações elementares nas linhas. Quando obtemos a matriz Id_n na posição de A, a matriz obtida na posição de Id_n é A^{-1}.

- Se A não é linha-equivalente à matriz identidade, então A não tem inversa.

Cálculo da Matriz inversa utilizando operações elementares nas linhas

- A mesma sequência de operações que reduzem A à matriz Id_n transformam Id_n na matriz A^{-1}.
- Na prática operamos simultaneamente as matrizes A e Id_n realizando operações elementares nas linhas. Quando obtemos a matriz Id_n na posição de A, a matriz obtida na posição de Id_n é A^{-1}.

$$[A \mid Id_n] \xrightarrow{E_1, E_2, \ldots, E_m} [Id_n \mid A^{-1}]$$

- Se A não é linha-equivalente à matriz identidade, então A não tem inversa.

Cálculo da Matriz inversa utilizando operações elementares nas linhas

- A mesma sequência de operações que reduzem A à matriz Id_n transformam Id_n na matriz A^{-1}.
- Na prática operamos simultaneamente as matrizes A e Id_n realizando operações elementares nas linhas. Quando obtemos a matriz Id_n na posição de A, a matriz obtida na posição de Id_n é A^{-1}.

$$[A \mid Id_n] \xrightarrow{E_1, E_2, \ldots, E_m} [Id_n \mid A^{-1}]$$

- Se A não é linha-equivalente à matriz identidade, então A não tem inversa.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \to -L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_2]{L_1 \to L_1 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \to -\frac{1}{3} L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \to L_2 - 4L_3]{L_1 \to L_1 + 2L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \to -L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_2]{L_1 \to L_1 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \to -\frac{1}{3} L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \to L_2 - 4L_3]{L_1 \to L_1 + 2L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \to -L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_2]{L_1 \to L_1 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \to -\frac{1}{3} L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \to L_2 - 4L_3]{L_1 \to L_1 + 2L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \to -L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_2]{L_1 \to L_1 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \to -\frac{1}{3} L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \to L_2 - 4L_3]{L_1 \to L_1 + 2L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \to -L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_2]{L_1 \to L_1 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \to -\frac{1}{3} L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \to L_2 - 4L_3]{L_1 \to L_1 + 2L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \to -L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_2]{L_1 \to L_1 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \to -\frac{1}{3} L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \to L_2 - 4L_3]{L_1 \to L_1 + 2L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \to -L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_2]{L_1 \to L_1 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \to -\frac{1}{3} L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \to L_2 - 4L_3]{L_1 \to L_1 + 2L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \to -L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_2]{L_1 \to L_1 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \to -\frac{1}{3} L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \to L_2 - 4L_3]{L_1 \to L_1 + 2L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$