Solução de Sistemas Lineares Parte II

Regra de Cramer

Álgebra Linear

Mariana Silveira - Cristian Coletti

Universidade Federal do ABC

Regra de Cramer

Este método de resolução de sistemas lineares aplica-se somente para sistemas lineares em que o número de equações é igual ao número de incógnitas.

Considere

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

e sua forma matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A_{n\times n}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X_{n\times 1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{B_{n\times 1}}$$

Regra de Cramer

Este método de resolução de sistemas lineares aplica-se somente para sistemas lineares em que o número de equações é igual ao número de incógnitas.

Considere

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

e sua forma matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A_{n\times n}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X_{n\times 1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{B_{n\times 1}}$$

Regra de Cramer

Se $\det A \neq 0$, ou seja, A tem inversa, então

$$\begin{aligned} AX = B &\Leftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \\ &\Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \\ &\Leftrightarrow Id_nX = A^{-1}B \\ &\Leftrightarrow X = A^{-1}B \\ &\Leftrightarrow X = \frac{\text{Adj } A}{\det A} B \quad \leftarrow S \text{ é compatível determinado} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix}}_{\text{Adj } A} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Regra de Cramer

Se $\det A \neq 0$, ou seja, A tem inversa, então

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$
$$\Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B$$
$$\Leftrightarrow Id_n X = A^{-1}B$$
$$\Leftrightarrow X = A^{-1}B$$
$$\Leftrightarrow X = \frac{\text{Adj } A}{\det A} B \quad \leftarrow S \text{ é compatível determinado}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix}}_{\text{Adj } A} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Regra de Cramer

Se $\det A \neq 0$, ou seja, A tem inversa, então

$$\begin{aligned}
AX = B &\Leftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \\
&\Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \\
&\Leftrightarrow Id_n X = A^{-1}B \\
&\Leftrightarrow X = A^{-1}B \\
&\Leftrightarrow X = \frac{\text{Adj } A}{\det A} B \quad \leftarrow S \text{ é compatível determinado}
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix}}_{\text{Adj } A} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Regra de Cramer

Se $\det A \neq 0$, ou seja, A tem inversa, então

$$\begin{aligned}
AX = B &\Leftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \\
&\Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \\
&\Leftrightarrow Id_n X = A^{-1}B \\
&\Leftrightarrow X = A^{-1}B \\
&\Leftrightarrow X = \frac{\text{Adj } A}{\det A} B \quad \leftarrow S \text{ é compatível determinado}
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix}}_{\text{Adj } A} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Regra de Cramer

Se $\det A \neq 0$, ou seja, A tem inversa, então

$$\begin{aligned} AX = B &\Leftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \\ &\Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \\ &\Leftrightarrow Id_n X = A^{-1}B \\ &\Leftrightarrow X = A^{-1}B \\ &\Leftrightarrow X = \frac{\text{Adj } A}{\det A} B \quad \leftarrow S \text{ é compatível determinado} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix}}_{\text{Adj } A} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Regra de Cramer

Se $\det A \neq 0$, ou seja, A tem inversa, então

$$
\begin{aligned}
AX = B &\Leftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \\
&\Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \\
&\Leftrightarrow Id_n X = A^{-1}B \\
&\Leftrightarrow X = A^{-1}B \\
&\Leftrightarrow X = \frac{\text{Adj } A}{\det A} B \quad \leftarrow S \text{ é compatível determinado}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix}}_{\text{Adj } A} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}
$$

Regra de Cramer

Se $\det A \neq 0$, ou seja, A tem inversa, então

$$
\begin{aligned}
AX = B &\Leftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \\
&\Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \\
&\Leftrightarrow Id_n X = A^{-1}B \\
&\Leftrightarrow X = A^{-1}B \\
&\Leftrightarrow X = \frac{\text{Adj } A}{\det A} B \quad \leftarrow S \text{ é compatível determinado}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix}}_{\text{Adj } A} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}
$$

Regra de Cramer

Se $\det A \neq 0$, ou seja, A tem inversa, então

$$
\begin{aligned}
AX = B &\Leftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \\
&\Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \\
&\Leftrightarrow Id_n X = A^{-1}B \\
&\Leftrightarrow X = A^{-1}B \\
&\Leftrightarrow X = \frac{\text{Adj } A}{\det A} B \quad \leftarrow S \text{ é compatível determinado}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix}}_{\text{Adj } A} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}
$$

Regra de Cramer

Logo

$$x_i = \frac{\Delta_{1i} b_1 + \Delta_{2i} b_2 + \cdots + \Delta_{ni} b_n}{\det A}$$

$\det A = a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + a_{in}\Delta_{in}$

$\det A = a_{1j}\Delta_{1j} + a_{2j}\Delta_{2j} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nj}$

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1\Delta_{1i} + b_2\Delta_{2i} + \cdots + b_n\Delta_{ni} \\ \uparrow \\ i\text{−ésima} \end{array}$$

Matriz obtida da matriz dos coeficientes substituindo a i-ésima coluna pela coluna dos temos independentes.

Regra de Cramer

Logo

$$x_i = \frac{\Delta_{1i}b_1 + \Delta_{2i}b_2 + \cdots + \Delta_{ni}b_n}{\det A}$$

$$\det A = a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + a_{in}\Delta_{in}$$
$$\det A = a_{1i}\Delta_{1i} + a_{2i}\Delta_{2i} + \cdots + a_{ni}\Delta_{ni}$$

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ \uparrow \\ i\text{–ésima} \end{array} = b_1\Delta_{1i} + b_2\Delta_{2i} + \cdots + b_n\Delta_{ni}$$

Matriz obtida da matriz dos coeficientes substituindo a *i*-ésima coluna pela coluna dos temos independentes.

Regra de Cramer

Logo

$$x_i = \frac{\Delta_{1i}b_1 + \Delta_{2i}b_2 + \cdots + \Delta_{ni}b_n}{\det A}$$

$\det A = a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + a_{in}\Delta_{in}$

$\det A = a_{1i}\Delta_{1i} + a_{2i}\Delta_{2i} + \cdots + a_{ni}\Delta_{ni}$

$$\left|\begin{array}{ccccc} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{array}\right| = b_1\Delta_{1i} + b_2\Delta_{2i} + \cdots + b_n\Delta_{ni}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & \uparrow & & \\ & & {}_{i-}\text{ésima} & & \end{array}$$

Matriz obtida da matriz dos coeficientes substituindo a i-ésima coluna pela coluna dos temos independentes.

Regra de Cramer

Portanto

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

$\leftarrow$ determinante da matriz obtida da matriz dos coeficientes substituindo a i-ésima coluna pela coluna dos temos independentes.

$\leftarrow$ determinante da matriz A.

Obs: Só posso usar a Regra de Cramer quando o número de incógnitas é igual ao número de equações e quando o determinante da matriz dos coeficientes é diferente de 0.

Regra de Cramer

Portanto

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

$\leftarrow$ determinante da matriz obtida da matriz dos coeficientes substituindo a i-ésima coluna pela coluna dos temos independentes.

$\leftarrow$ determinante da matriz A.

Obs: Só posso usar a Regra de Cramer quando o número de incógnitas é igual ao número de equações e quando o determinante da matriz dos coeficientes é diferente de 0.

Exemplo

$$S: \begin{cases} 2x - 3y + 7z = 1 \\ x + 3z = 5 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det A \overset{\text{Coluna 1}}{\overset{\downarrow}{=}} 2(-6) + 1(-1)(-11) = -1 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-1} \overset{\text{Coluna 1}}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{1(-6) + 5(-1)(-11)}{-1} = -49$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-1} \overset{\text{Linha 3}}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{(-1)9}{-1} = 9 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-1} \overset{\text{Linha 3}}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{2(-1)9}{-1} = 18$$

Exemplo

$$S:\begin{cases} 2x-3y+7z=1 \\ x+3z=5 \\ 2y-z=0 \end{cases} \qquad A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det A \overset{\text{Coluna 1}}{\overset{\downarrow}{=}} 2(-6)+1(-1)(-11) = -1 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-1} \overset{\text{Coluna 1}}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{1(-6)+5(-1)(-11)}{-1} = -49$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-1} \overset{\text{Linha 3}}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{(-1)9}{-1} = 9 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-1} \overset{\text{Linha 3}}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{2(-1)9}{-1} = 18$$

Exemplo

$$S: \begin{cases} 2x - 3y + 7z = 1 \\ x + 3z = 5 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det A \overset{\substack{\text{Coluna 1}\\ \downarrow}}{=} 2(-6) + 1(-1)(-11) = -1 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-1} \overset{\substack{\text{Coluna 1}\\ \downarrow}}{=} \frac{1(-6) + 5(-1)(-11)}{-1} = -49$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-1} \overset{\substack{\text{Linha 3}\\ \downarrow}}{=} \frac{(-1)9}{-1} = 9 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-1} \overset{\substack{\text{Linha 3}\\ \downarrow}}{=} \frac{2(-1)9}{-1} = 18$$

Exemplo

$$S:\begin{cases} 2x-3y+7z=1 \\ x+3z=5 \\ 2y-z=0 \end{cases} \qquad A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det A \overset{\text{Coluna 1}}{\overset{\downarrow}{=}} 2(-6)+1(-1)(-11) = -1 \neq 0$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-1} \overset{\text{Coluna 1}}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{1(-6)+5(-1)(-11)}{-1} = -49$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-1} \overset{\text{Linha 3}}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{(-1)9}{-1} = 9 \qquad z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-1} \overset{\text{Linha 3}}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{2(-1)9}{-1} = 18$$

Exemplo

$$S : \begin{cases} 2x - 3y + 7z = 1 \\ x + 3z = 5 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det A \overset{\substack{\text{Coluna 1} \\ \downarrow}}{=} 2(-6) + 1(-1)(-11) = -1 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-1} \overset{\substack{\text{Coluna 1} \\ \downarrow}}{=} \frac{1(-6) + 5(-1)(-11)}{-1} = -49$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-1} \overset{\substack{\text{Linha 3} \\ \downarrow}}{=} \frac{(-1)9}{-1} = 9 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-1} \overset{\substack{\text{Linha 3} \\ \downarrow}}{=} \frac{2(-1)9}{-1} = 18$$

Exemplo

$$S: \begin{cases} 2x - 3y + 7z = 1 \\ x + 3z = 5 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \det A &\overset{\text{Coluna 1}}{\overset{\downarrow}{=}} 2(-6) + 1(-1)(-11) \\ &= -1 \neq 0 \end{aligned}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-1} \overset{\text{Coluna 1}}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{1(-6) + 5(-1)(-11)}{-1} = -49$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-1} \overset{\text{Linha 3}}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{(-1)9}{-1} = 9 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-1} \overset{\text{Linha 3}}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{2(-1)9}{-1} = 18$$

Exemplo

$$S : \begin{cases} 2x - 3y + 7z = 1 \\ x + 3z = 5 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det A \overset{\overset{\text{Coluna 1}}{\downarrow}}{=} 2(-6) + 1(-1)(-11) = -1 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-1} \overset{\overset{\text{Coluna 1}}{\downarrow}}{=} \frac{1(-6) + 5(-1)(-11)}{-1} = -49$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-1} \overset{\overset{\text{Linha 3}}{\downarrow}}{=} \frac{(-1)9}{-1} = 9 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-1} \overset{\overset{\text{Linha 3}}{\downarrow}}{=} \frac{2(-1)9}{-1} = 18$$

Exemplo

$$S:\begin{cases} 2x-3y+7z=1\\ x+3z=5\\ 2y-z=0\end{cases} \qquad A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 7\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

$$\det A \overset{\text{Coluna 1}}{\overset{\downarrow}{=}} 2(-6)+1(-1)(-11) = -1 \neq 0$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 7\\ 5 & 0 & 3\\ 0 & 2 & -1\end{vmatrix}}{-1} \overset{\text{Coluna 1}}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{1(-6)+5(-1)(-11)}{-1} = -49$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7\\ 1 & 5 & 3\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}}{-1} \overset{\text{Linha 3}}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{(-1)9}{-1} = 9$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1\\ 1 & 0 & 5\\ 0 & 2 & 0\end{vmatrix}}{-1} \overset{\text{Linha 3}}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{2(-1)9}{-1} = 18$$

Exemplo

$$S: \begin{cases} 2x - 3y + 7z = 1 \\ x + 3z = 5 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det A \overset{\substack{\text{Coluna 1} \\ \downarrow}}{=} 2(-6) + 1(-1)(-11) = -1 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-1} \overset{\substack{\text{Coluna 1} \\ \downarrow}}{=} \frac{1(-6) + 5(-1)(-11)}{-1} = -49$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-1} \overset{\substack{\text{Linha 3} \\ \downarrow}}{=} \frac{(-1)9}{-1} = 9 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-1} \overset{\substack{\text{Linha 3} \\ \downarrow}}{=} \frac{2(-1)9}{-1} = 18$$

Exemplo

$$S : \begin{cases} 2x - 3y + 7z = 1 \\ x + 3z = 5 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det A \overset{\substack{\text{Coluna 1} \\ \downarrow}}{=} 2(-6) + 1(-1)(-11) = -1 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-1} \overset{\substack{\text{Coluna 1} \\ \downarrow}}{=} \frac{1(-6) + 5(-1)(-11)}{-1} = -49$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-1} \overset{\substack{\text{Linha 3} \\ \downarrow}}{=} \frac{(-1)9}{-1} = 9 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-1} \overset{\substack{\text{Linha 3} \\ \downarrow}}{=} \frac{2(-1)9}{-1} = 18$$

Regra de Cramer

Obs: Embora seja muito útil, já que nos dá uma fórmula explícita para a solução do sistema, não é usada para cálculo numérico devido ao número grande de operações.

det $A_{n\times n} \rightarrow n!$ parcelas e cada parcela é um produto de n fatores.

$$(n-1)n! + (n!-1) = n.n! - 1 \text{ operações}$$

Como temos que calcular $n+1$ determinantes, o número de operações envolvidas é $(n+1)(n.n!-1)$.

Regra de Cramer

Obs: Embora seja muito útil, já que nos dá uma fórmula explícita para a solução do sistema, não é usada para cálculo numérico devido ao número grande de operações.

$\det A_{n\times n} \to n!$ parcelas e cada parcela é um produto de n fatores.

$$(n-1)n! + (n!-1) = n.n! - 1 \text{ operações}$$

Como temos que calcular $n+1$ determinantes, o número de operações envolvidas é $(n+1)(n.n!-1)$.

Regra de Cramer

Obs: Embora seja muito útil, já que nos dá uma fórmula explícita para a solução do sistema, não é usada para cálculo numérico devido ao número grande de operações.

$\det A_{n\times n} \to n!$ parcelas e cada parcela é um produto de n fatores.

$$(n-1)n! + (n!-1) = n.n! - 1 \text{ operações}$$

Como temos que calcular $n+1$ determinantes, o número de operações envolvidas é $(n+1)(n.n!-1)$.