Coordenadas

Álgebra Linear

Mariana Silveira - Cristian Coletti

Universidade Federal do ABC

Coordenadas

- Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n e seja $B = \{u_1, ..., u_n\}$ uma base de V.
- Como B gera V, então dado $u \in V$ existem $\alpha_1, ..., \alpha_r \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n$$

Como os elementos de B são LI, podemos verificar que $\alpha_1, ..., \alpha_r$ são únicos (a não ser pela sua ordem).

Suponha que

$$u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$$

$$u = \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_n u_n$$

Então

$$u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n = \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_n u_n$$

$$(\alpha_1 - \beta_1)u_1 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)u_n = 0$$

Como $u_1, \ldots, u_n$ são LI, então

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \beta_1 &= 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \beta_1 \\ &\vdots \\ \alpha_n - \beta_n &= 0 \Longrightarrow \alpha_n = \beta_n \end{aligned}$$

Base ordenada

Definição

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Uma base ordenada para V é uma base de V para qual fixamos uma ordem (fixamos quem é o primeiro vetor, quem é o segundo vetor, etc.)

Exemplo

$V = \mathbb{R}^3$

$$B_1 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

$$B_2 = \{(0,1,0),(0,0,1),(1,0,0)\}$$

São bases ordenadas diferentes.

- Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita n e seja $B = \{u_1, ..., u_n\}$ uma base ordenada de V.

- Para cada $u \in V$ existe uma única n-upla $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ tal que

$$u = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n$$

Os escalares $\alpha_1, ..., \alpha_n$ são as coordenadas de u com relação à base B. A matriz das coordenadas de u com relação à base B é

$$[u]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}_B \quad \text{ou} \quad [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n]^t$$

Exemplos

- $V = \mathbb{R}^2$
- $B_1 = \{(1,0),(0,1)\}$
- $u = (5,1)$
- $(5,1) = 5(1,0) + 1(0,1)$

$$[u]_{B_1} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}_{B_1} \tag{1}$$

- $B_2 = \{(1,1),(0,1)\}$
- $(5,1) = \alpha(1,1) + \beta(0,1)$
- $\alpha = 5$, $1 = \alpha + \beta \rightarrow \beta = 1 - 5 = -4$

$$[u]_{B_2} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}_{B_2} \tag{2}$$

Exemplos

- $V = \mathbb{R}^2$
- $B_3 = \{(0,1),(1,0)\}$
- $u = (5,1)$
- $(5,1) = 1(0,1) + 5(1,0)$

$$[u]_{B_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}_{B_3} \tag{3}$$

Observação: A ordem dos vetores na base influencia a matriz das coordenadas!

Exemplo

Encontre as coordenadas de

$$p(t) = 2 + t + t^2 \in P_2(\mathbb{R})$$

1. Em relação à base $C = \{1, t, t^2\}$ (base canônica) de $P_2(\mathbb{R})$;
2. Em relação à base $B = \{1, 1 + t, 1 + t^2\}$;

- Solução: 1) $C = \{1, t, t^2\}$

$$p(t) = 2.1 + 1.t + 1.t^2$$

$$[p]_C = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_C \tag{4}$$

- Solução: 2) $B = \{1, 1+t, 1+t^2\}$

$$p(t) = \alpha.1 + \beta(1+t) + \gamma(1+t^2)$$
$$p(t) = (\alpha+\beta+\gamma).1 + \beta t + \gamma t^2$$
$$2.1 + 1.t + 1.t^2 = (\alpha+\beta+\gamma).1 + \beta t + \gamma t^2$$

- $\alpha + \beta + \gamma = 2$
- $\beta = 1$
- $\gamma = 1$ então $\alpha = 0$

$$p(t) = 0.1 + 1.(1+t) + 1.(1+t^2)$$

$$[p]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_B \tag{5}$$

Exemplo

Determine as coordenadas do vetor $(1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$

1. Em relação à base canônica
2. En relação à base $\{(0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$

Solução:

1. $C = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

$$(1, 2, 3) = 1.(1, 0, 0) + 2.(0, 1, 0) + 3.(0, 0, 1)$$

$$[(1, 2, 3)]_C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}_C \tag{6}$$

2. $B = \{(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$

$$(1,2,3) = \alpha.(0,0,1) + \beta.(0,1,1) + \gamma.(1,1,1)$$

$$\begin{aligned} \gamma &= 1 \\ \beta + \gamma &= 2 \\ \alpha + \beta + \gamma &= 3 \end{aligned}$$

$$[(1,2,3)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_B \tag{7}$$

Exemplo

Determine as coordenadas de

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

em relação à base

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_B = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \theta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= 2 \\ \beta + \gamma &= 1 \\ \beta &= 1 \\ \theta &= 1 \end{aligned}$$

Então $\gamma = 0$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_B$$