Mudança de base

Álgebra Linear

Mariana Silveira - Cristian Coletti

Universidade Federal do ABC

Mudança de Base

- Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n e seja $B = \{u_1, ..., u_n\}$ uma base ordenada para V. Dado $u \in V$, existem $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ únicos tais que

$$u = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n$$

A n-upla $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ são as coordenadas de u com realação à base B.

$$[u]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}_B \tag{1}$$

Seja $C = \{v_1, ..., v_n\}$ uma base ordenada para V. Dado $u \in V$, existem únicos $\beta_1, ..., \beta_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n$$

$$[u]_C = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}_C \tag{2}$$

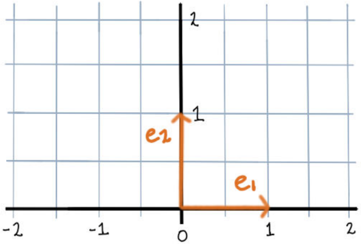
- Qual é a relação entre $[u]_B$ e $[u]_C$?
- Porque mudar de base?
- Para simplificar a resolução do problema em questão

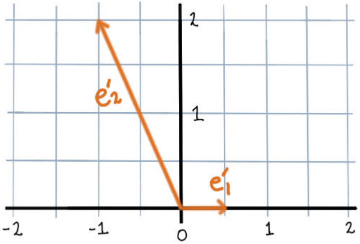
Exemplo: Motivação

Seja $B = \{e_1, e_2\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^2$ e seja $B' = \{e_1', e_2'\}$ uma outra base de $\mathbb{R}^2$ tal que

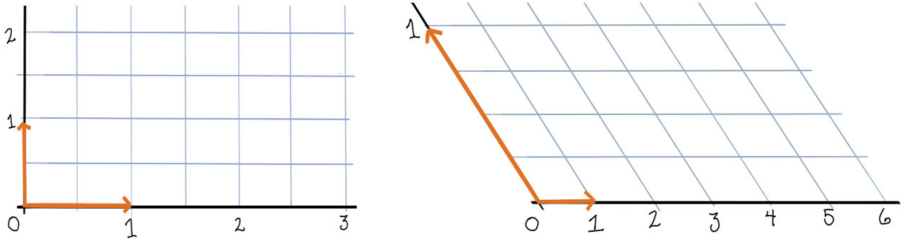
$$e_1' = \frac{1}{2}e_1 \quad \text{e} \quad e_2' = -e_1 + 2e_2$$

Assim, temos que



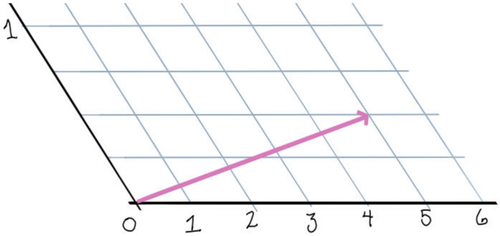


Cada base induzirá seu próprio sistema de coordenadas, indicando o ângulo e a orientação de cada eixo, e a unidade de medida de cada eixo



Podemos escrever qualquer vetor de $\mathbb{R}^2$ como uma combinação linear dos elementos de uma base.

$$v = e_1 + 2e_2 \quad \text{e} \quad w' = 5e_1' + \frac{1}{2}e_2'$$



A matriz de coordenadas de v na base B é $[1\ 2]^t$ e a matriz de coordenadas de w' na base B' é $[5\ \frac{1}{2}]^t$.

Como B e C são duas bases para V, então existe uma única familia $a_{ij},\ 1 \leq i, j \leq n$, tais que

$$\begin{aligned}
u_1 &= a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + ... + a_{n1}v_n \\
u_2 &= a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + ... + a_{n2}v_n \\
&\vdots \\
u_n &= a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + ... + a_{nn}v_n
\end{aligned}$$

A matriz quadrada de ordem n

$$M_{BC} = \begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1}\ a_{n2} \ldots a_{nn} \end{bmatrix}$$

é chamada matriz mudança de base de B para C.

$$M_{BC} = \begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1}\ a_{n2} \ldots a_{nn} \end{bmatrix}$$

Os vetores da base antiga são expresados como combinação linear dos vetores da nova base.

Observe que as coordenadas de u_j em relação à base C estão na coluna j da matriz M_{BC}.

Exemplo

- $V = P_1(\mathbb{R})$
- $B = \{1, t\}$, $C = \{1, 1+t\}$.
- Encontre M_{BC}

Solução:

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha.1 + \beta.(1+t) \Longrightarrow \beta = 0,\ \alpha = 1 \\ t &= \alpha.1 + \beta.(1+t) \Longrightarrow \alpha + \beta = 0,\ \beta = 1 \to \alpha = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1 = 1 &= 1.1 + 0.(1+t) \\ u_2 = t &= -1.1 + 1.(1+t) \end{aligned}$$

$$M_{BC} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Seja V espaço vetorial e $B = \{u_1, ...u_n\}$ base para V. Encontre M_{BB}

$$\begin{aligned} u_1 &= 1u_1 + 0u_2 + ... + 0u_n \\ &\vdots \\ u_n &= 0u_1 + 0u_2 + ... + 1u_n \end{aligned}$$

Então

$$M_{BB} = Id_n$$

Exemplo

Sejam $B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ e $C = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ bases para $\mathbb{R}^3$. Encontre a matriz mudança de base de B para C, M_{BC}.

$$\begin{aligned} u_1 = (1,1,1) &= 1.(1,0,0) + 1.(0,1,0) + 1.(0,0,1) \\ u_2 = (1,1,0) &= 1.(1,0,0) + 1.(0,1,0) + 0.(0,0,1) \\ u_3 = (1,0,0) &= 1.(1,0,0) + 0.(0,1,0) + 0.(0,0,1) \end{aligned}$$

$$M_{BC} = \begin{bmatrix} 1\,1\,1 \\ 1\,1\,0 \\ 1\,0\,0 \end{bmatrix}$$

Proposição

Sejam V um espaço vetorial de dimensão n, $B = \{u_1, u_2, ...u_n\}$, $C = \{v_1, v_2, ...v_n\}$ duas bases ordenadas de V e seja M_{BC} a matriz de mudança de base de B para C.

Dado $u \in V$ temos:

$$[u]_C = M_{BC}[u]_B$$

Demonstração:

Suponha que $u = x_1u_1 + ... + x_nu_n$ e $u = y_1v_1 + ... + y_nv_n$

$$[u]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_B \quad [u]_C = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}_C \tag{3}$$

Seja $M_{BC} = [a_{ij}]$ a matriz de mudança de base de B para C

$$M_{BC} = \begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \dots a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1}\ a_{n2} \dots a_{nn} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} u &= x_1 u_1 + \dots + x_n u_n \\ &= x_1(a_{11} v_1 + \dots + a_{n1} v_n) + \dots + x_n(a_{1n} v_1 + \dots + a_{1n} v_n) \\ &= (a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n) v_1 + \dots + (a_{n1} x_1 + \dots + a_{nn} x_n) v_n \qquad (4) \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$u = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n \qquad (5)$$

De (4) e (5) concluimos que

$$
\begin{aligned}
y_1 &= a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n && (6)\\
\vdots & && (7)\\
y_n &= a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n && (8)
\end{aligned}
$$

Escrevendo o sistema na forma matricial

$$
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1}\ a_{n2} \ldots a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.
$$

Isto é,

$$[u]_C = M_{BC} \cdot [u]_B$$

Proposição

Sejam V um espaço vetorial de dimensão n, B, C bases para V. A matriz mudança de base é invertível e

$$M_{CB} = (M_{BC})^{-1}.$$

Demonstração: Se B, C, D são bases ordenadas de V

Afirmação: $M_{CD}.M_{BC} = M_{BD}$. (Sem prova)

Então

$$M_{CB}.M_{BC} = M_{BB} = Id_n \qquad \text{e, por tanto,}$$

$$M_{CB} = (M_{BC})^{-1}.$$

Exemplo

Consideremos em $\mathbb{R}^3$ as bases

$$B = \{e_1, e_2, e_3\}$$

e

$$C = \{g_1, g_2, g_3\}$$

tais que

$$\begin{aligned} e_1 &= g_1 + g_3 & (9) \\ e_2 &= 2g_1 + g_2 + g_3 & (10) \\ e_3 &= g_1 + 2g_2 + g_3 & (11) \end{aligned}$$

1. Determine M_{BC} e M_{CB}
2. Se

$$[u]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

   encontre $[u]_C$
3. Se

$$[u]_C = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

   encontre $[u]_B$

Demonstração:

1.

$$M_{BC} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{CB} = (M_{BC})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ Exercício.}$$

2. Sendo que $[u]_C = M_{BC}[u]_B$, temos que $[u]_C$ é dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

3. $[u]_B = M_{CB}[u]_C =$

$$\begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$