Transformações Lineares

Definições e Propriedades

Álgebra Linear

Mariana Silveira - Cristian Coletti

Universidade Federal do ABC

Transformações lineares

Definição

- *Dados dois conjuntos U e V não vazios, Uma* **aplicação** $T : U \to V$ *é uma relação que a cada $u \in U$ associa um único elemento, denotado por $T(u)$, em V.*

$$\begin{aligned} T: \quad U &\to V \\ u &\to T(u) \end{aligned}$$

- *Uma aplicação T é* **injetiva** *se*

$$T(u_1) = T(u_2) \Leftrightarrow u_1 = u_2$$

- Dada Uma aplicação T, a imagem de T é o conjunto

$$Im(T) = \{T(u),\ u \in U\} \subset V$$

  Dizemos que T é **sobrejetora** se $Im(T) = V$, ou seja, dado $v \in V$, $u \in U$ tal que $T(u) = v$.

- Dizemos que T é **bijetora** se T é injetora e sobrejetora.

Definição

Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Uma **transformação linear** *$T : U \to V$ é uma aplicação que satisfaz as seguintes propriedades*

1. *(TL1)* $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2) \forall u_1, u_2 \in U$
2. *(TL2)* $T(\alpha u) = \alpha T(u), \ \alpha \in \mathbb{R}, \ u \in U$

Quando $U = V$ dizemos que T é um operador linear.

Exemplos:

1.) Transformação linear nula

$$\begin{aligned} T : U &\to V \\ u &\to T(u) = 0 \end{aligned}$$

1. (TL1) $T(u_1 + u_2) = 0 = T(u_1) + T(u_2)$
2. (TL2) $T(\alpha u) = 0 = \alpha 0 = \alpha T(u), \ \alpha \in \mathbb{R}, \ u \in U$

2.)

$$\begin{aligned} I : U &\to V \\ u &\to I(u) = u \end{aligned}$$

1. (TL1) $I(u_1 + u_2) = u_1 + u_2 = I(u_1) + I(u_2)$
2. (TL2) $I(\alpha u) = \alpha u = \alpha I(u), \ \alpha \in \mathbb{R}, \ u \in U$

- Dada Uma aplicação T, a imagem de T é o conjunto

$$Im(T) = \{T(u),\ u \in U\} \subset V$$

Dizemos que T é **sobrejetora** se $Im(T) = V$, ou seja, dado $v \in V$, $u \in U$ tal que $T(u) = v$.

- Dizemos que T é **bijetora** se T é injetora e sobrejetora.

Exemplos

Observação

Toda transformação linear $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é da forma $T(x) = kx,\ k \in \mathbb{R}$. De fato,

$$T(x) = T(1.x) = T(1).x = k.x$$

Assim, o gráfico de uma transformação linear de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é sempre uma reta passando pela origem.

Exemplos

4.) $U = V = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to x^2 \end{aligned}$$

1. (TL1) $T(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \neq x_1^2 + x_2^2 = T(x_1) + T(x_2)$
2. (TL2) $T(\alpha x) = \alpha^2 x^2 \neq \alpha T(x),\ \alpha \in \mathbb{R},\ x \in U = \mathbb{R}$

Não é transformação linear.

5.) $U = V = \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\to (x, 2x + y) \end{aligned}$$

Exemplos

$T(x, y) = (x, 2x + y)$

1. (TL1) Sejam $u_1 = (x_1, y_1)$, $u_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$u_1 + u_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\begin{aligned} T(u_1 + u_2) &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= (x_1 + x_2, 2(x_1 + x_2) + y_1 + y_2) \\ &= (x_1 + x_2, (2x_1 + y_1) + (2x_2 + y_2)) \\ &= (x_1, (2x_1 + y_1)) + (x_2, (2x_2 + y_2)) = T(u_1) + T(u_2). \end{aligned}$$

2. (TL2) Sejam $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$
   $T(\alpha u) = T(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x, 2\alpha x + \alpha y) = \alpha(x, 2x + y) = \alpha T(u)$.

Exemplos

6.) $U = \mathbb{R}^3,\ V = M_2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^3 &\to M_2(\mathbb{R}) \\ (x, y, z) &\to \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1. (TL1) Sejam $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $u_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$

$$u_1 + u_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

$$\begin{aligned} T(u_1 + u_2) &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ y_1 + y_2 & z_1 + z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ y_1 & z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ y_2 & z_2 \end{bmatrix} \\ &= T(u_1) + T(u_2). \end{aligned}$$

Continuação do exemplo 6

2. (TL2) Sejam $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
T(\alpha u) &= F(\alpha x, \alpha y, \alpha z) \\
&= \begin{bmatrix} \alpha x & \alpha y \\ \alpha y & \alpha z \end{bmatrix} \\
&= \alpha \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} \\
&= \alpha T(u).
\end{aligned}
$$

Propriedades de uma transformação linear

Sejam U, V espaços vetoriais e $T : U \rightarrow V$ uma transformação linear. Então

i) $T(0) = 0$

ii) $T(-u) = -T(u)$ $u \in U$

iii) $T(u_1 - u_2) = T(u_1) - T(u_2)$

iv) Se W é subespaço vetorial de U então $T(w)$ é subespaço vetorial de V

v) $T(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(u_i)$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $u_i \in U$

Demonstrações

(i)

$$T(0) = F(0+0) = T(0) + T(0)\ (TL1)$$

$$T(0) = T(0) + T(0)$$

$$0 = T(0)$$

(ii)

$$T(u) + T(-u) = T(u + (-u)) = T(0) = 0$$

Onde $T(-u)$ é o oposto de $T(u)$ em V, ou seja, $T(-u) = -T(u)$

Demonstrações

(iv) Seja W subespaço vetorial de U

$$T(W) = \{T(u), u \in W\}$$

- $$T(W) \neq \emptyset$$

  Como $0 \in W$ então $T(0) \in T(W)$, logo $0 \in T(W)$.
- $T(W)$ é fechado para a soma

  Sejam $v_1, v_2 \in T(W)$. Então

  $v_1 = T(u_1)$, $u_1 \in W$ e $v_2 = T(u_2)$, $u_2 \in W$

  Como W é subespaço vetorial então $u_1 + u_2 \in W$.

  Portanto $v_1 + v_2 = T(u_1) + T(u_2) = T(u_1 + u_2) \in T(W)$

Continuação da demonstração de (iv)

- $T(W)$ é fechado para o produto Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $v \in T(W)$. Então $v = T(u)$, $u \in W$
$$\alpha T(v) = T(\alpha v) \in T(W)$$
já que W é subespaço vetorial, então $\alpha v \in W$.

Exemplos

(1) $U = V = P_n(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} D : P_n(\mathbb{R}) & \to P_n(\mathbb{R}) \\ p & \to p' \end{aligned}$$

Operador derivada

1. (TL1) $D(p+q) = D(p) + D(q), \ \forall p, q \in P_n(\mathbb{R})$
2. (TL2) $D(\alpha p) = \alpha D(p), \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, p \in P_n(\mathbb{R})$

Exemplos

2.) $U = V = \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\to k(x, y) \end{aligned}$$

É transformação linear,
se $k > 1$ é expansão e
se $0 < k < 1$ é contração.

Exemplo (Reflexão)

3.) $U = V = \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} T_1 : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\to (x, -y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2 : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\to (-x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_3 : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\to (-x, -y) \end{aligned}$$

São transformações lineares.

Exemplos

4.) Rotação com $U = V = \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{bmatrix} x \\ \\ \\ y \end{bmatrix} & \to \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \\ \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

É transformação linear.

5.)

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \to (x + a, y + b) \end{aligned}$$

$$T(0,0) = (a,b) \neq (0,0)$$

Não é transformação linear.