Núcleo e Imagem de uma Transformação Linear

Relação entre transformação linear e uma base

Álgebra Linear

Mariana Silveira - Cristian Coletti

Universidade Federal do ABC

Aula Passada

- U e V espaços vetoriais
- **Uma transformação linear (T.L.)** de U em V é uma aplicação $T : U \to V$ tal que:
- (TL1) $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2) \forall u_1, u_2 \in U$
- (TL2) $T(\alpha u) = (u),\ \alpha \in \mathbb{R},\ u \in U$
- $T(0) = 0$
- W SV de $U \Rightarrow T(W)$ SV de V

Núcleo e Imagem de uma T.L

Definição

Sejam U e V espaços vetoriais e $T : U \to V$ Uma transformação linear (T.L.). Chamamos de núcleo de T, e denotamos por $N(T)$ ou $Ker(T)$ o conjunto

$$N(T) = \{u \in U, T(U) = 0\} \subset U$$

A imagem de T é

$$ImT = \{v \in V, v = T(u), u \in U\} = \{T(u), u \in U\} \subset V$$

Notação: $T(U) = ImT$

Exemplos

1.) Seja

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\to x - y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N(T) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : T(x, y) = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\} \\ &= \{(x, x) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(1, 1), x \in \mathbb{R}\} = [(1, 1)] \end{aligned}$$

$ImT = \mathbb{R}$, pois dado $z \in \mathbb{R}$, $z = T(z, 0)$.

1.) Seja

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\to (x, 2y, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N(T) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / T(x, y, z) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z), (x, 2y, 0) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z), x = y = 0\} \\ &= \{(0, 0, z), z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{z(0, 0, 1), z \in \mathbb{R}\} = [(0, 0, 1)] \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
ImT &= \{(x, 2y, 0), x, y \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(x, 0, 0) + (0, 2y, 0), x, y \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(1, 0, 0)x + (0, 2, 0)y, x, y \in \mathbb{R}\} \\
&= [(1, 0, 0), (0, 2, 0)]
\end{aligned}
$$

Observação

A imagem de uma T.L é sempre um subespaço vetorial de V. De fato, dados $T : U \to V$ T.L. W subespaço vetorial de U tem-se que $T(U)$ é um subespaço vetorial de V.

Proposition

Sejam U, V espaços vetoriais e $T : U \to V$ uma transformação linear. Então

1. *$N(T)$ é um subespaço vetorial de U.*
2. *T é injetora se, e somente se, $N(T) = \{0\}$*

Demonstração de 1. Vejamos que:

- $N(T) \neq \emptyset$

  Como $T(0) = 0$ então $0 \in N(T)$

- $N(T)$ é fechado p/soma

  Sejam $u_1, u_2 \in N(T)$. Então $T(u_1) = 0, \; T(u_2) = 0$. Logo,

  $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2) = 0 + 0 = 0$. Portanto $u_1 + u_2 \in N(T)$.

- $N(T)$ é fechado p/produto

  Sejam $u \in N(T)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Logo $T(u) = 0$. Portanto,

  $T(\alpha u) = \alpha T(u) = \alpha.0 = 0$, ou seja, $\alpha u \in N(T)$.

Demonstração de 2.

- ($\Rightarrow$) Suponhamos que T seja injetora ($T(u) = T(v) \iff u = v$).
  Seja $u \in N(T)$ então $T(u) = 0$, ou seja, $T(u) = T(0)$.
  Como T é injetora, então $u = 0$. Portanto $N(T) = \{0\}$.
- ($\Leftarrow$) Suponhamos que $N(T) = \{0\}$. Sejam u_1, u_2 tal que $T(u_1) = T(u_2)$.
  Então $T(u_1) - T(u_2) = 0$, $T(u_1 - u_2) = 0$. Logo $u_1 - u_2 \in N(T) = \{0\}$, ou seja, $u_1 - u_2 = 0$. Portanto $u_1 = u_2$ e T é injetora.

Observação: Se $\{u_1, ..., u_n\}$ é LI e T é injetora, então $\{T(u_1), ..., T(u_n)\}$ é LI.

De fato, considere a combinação linear $\alpha_1 T(u_1) + ... + \alpha_n T(u_n) = 0$

usando $TL_1, TL_2 \iff T(\alpha_1(u_1) + ... + \alpha_n(u_n)) = 0$, isto é

$\alpha_1(u_1) + ... + \alpha_n(u_n) \in N(T)$

como T injetora, $N(T) = \{0\} \iff \alpha_1(u_1) + ... + \alpha_n(u_n) = 0$

Como $\{u_1, ..., u_n\}$ é LI $\iff \alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$

então $\{T(u_1), ..., T(u_n)\}$ é LI.

Exemplo

Determine bases para o núcleo e para a imagem de T. T é injetora?

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \to (x + 2y, x + y, x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N(T) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / T(x, y) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x + 2y, x + y, x) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + 2y = 0, x + y = 0, x = 0\} \\ &= \{(0, 0, 0)\} \end{aligned}$$

$B = \emptyset$ é base para $N(T)$

Continuação do Exemplo

$$\begin{aligned} ImT &= \{T(x,y),(x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(x+2y, x+y, x)/x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x,x,x)+(2y,y,0)/x,y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(1,1,1)x+(2,1,0)y/x,y \in \mathbb{R}\} \\ &= [(1,1,1),(2,1,0)] \end{aligned}$$

$B = \{(1,1,1),(2,1,0)\}$ é base para ImT, como $N(T) = \{0\}$ então T é injetora.

Teorema

Sejam U e V dois espaços vetoriais, $B = \{u_1, ..., u_n\}$ uma base para U. Dados $v_1, ..., v_n$ elementos arbitrários de V, existe uma única transformação linear $T : U \to V$ tal que:

$$T(u_1) = v_1, ..., T(u_n) = v_n$$

Uma transformação linear fica determinada pelo seu valor nos elementos de uma base.

Demonstração

- Existência

  Seja $u \in U$. Então

$$u = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n$$

  $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$

  Defina

$$T(u) = \alpha_1 T(u_1) + ... + \alpha_n T(u_n)$$

$$T(u) = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$$

  Logo, T existe.

- T é linear: Exercício

- Unicidade:

  Seja $F : U \to V$ uma T.L. tal que $F(u_1) = v_1, ..., F(u_n) = v_n$.

  Seja $u \in U$. Vamos mostrar que $F(u) = T(u)$.

  Como B é base,

$$u = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n$$

$$\begin{aligned} F(u) &= F(\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n) \\ &= \alpha_1 F(u_1) + ... + \alpha_n F(u_n) \\ &= \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = T(u) \end{aligned}$$

  Logo $F(u) = T(u)\ \forall u \in U$, ou seja, $F = T$.

Exemplos

1.) Qual é a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,0) = (2,1,0)$ e $T(0,1) = (0,0,1)$?

$B = \{(1,0),(0,1)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$, logo T existe e é única.

Dado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$

$$\begin{aligned} T(x,y) &= xT(1,0) + yT(0,1) \\ &= x(2,1,0) + y(0,0,1) \\ &= (2x,x,y) \end{aligned}$$

$T(x,y) = (2x,x,y)$

Exemplos

2.) Qual é a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,1) = (3,2,1)$ e $T(0,-2) = (0,1,0)$? $B = \{(1,1),(0,-2)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$, (2 vetores LI num espaço de dimensão 2).

Dado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}(x,y) &= \alpha(1,1) + \beta(0,-2)\\ &= (\alpha, \alpha - 2\beta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha &= x\\ \alpha - 2\beta &= y\end{aligned}$$

logo, $\beta = \frac{\alpha - y}{2} = \frac{x-y}{2}$.

Portanto

$$(x,y) = x(1,1) + \frac{x-y}{2}(0,-2)$$

$$
\begin{aligned}
T(x,y) &= xT(1,1) + \frac{x-y}{2}T(0,-2)\\
&= x(3,2,1) + \frac{x-y}{2}(0,1,0)\\
&= (3x, 2x + \frac{x-y}{2}, x)\\
&= (3x, \frac{5x-y}{2}, x)
\end{aligned}
$$

$T(x,y) = (3x, \frac{5x-y}{2}, x)$

Exemplos

3.) Encontre a T.L.

$T : P_1(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ Tal que $T(1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $T(1+x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

- $B = \{1, 1+x\}$ é base de $P_1(\mathbb{R})$, (2 vetores LI num espaço de dimensão 2).
- Seja $a_0 + a_1x = \alpha.1 + \beta(1+x) \in P_1(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x &= \alpha.1 + \beta(1+x) \\ &= (\alpha+\beta).1 + \beta.x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= a_0 \\ \beta &= a_1 \end{aligned}$$

logo, $\alpha = a_0 - a_1$. Portanto $a_0 + a_1x = (a_0 - a_1).1 + a_1(1+x)$

Continuação do exemplo 3

$$\begin{aligned} T(a_0 + a_1 x) &= (a_0 - a_1).T(1) + a_1 T(1 + x)) \\ &= (a_0 - a_1) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$T(a_0 + a_1 x) = \begin{bmatrix} a_0 - a_1 & 2a_0 - 2a_1 \\ -a_1 & a_1 \end{bmatrix}$$

Exemplos

4.) Determine uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ cujo núcleo seja $N(T) = [(1,0,1)]$ e cuja imagem seja $Im(T) = [(1,1),(0,2)]$. Queremos uma base para $\mathbb{R}^3$ contendo $(1,0,1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

conjunto de vetores nas linhas é L.I. (matriz na forma escalonada)

- $B = \{(1,0,1),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é base de $\mathbb{R}^3$ contendo $(1,0,1)$, (3 vetores LI num espaço de dimensão 3).
- Determine T na base B.

$$\begin{aligned} T(1,0,1) &= (0,0) \\ T(0,1,0) &= (1,1) \\ T(0,0,1) &= (0,2) \end{aligned}$$

Determinamos T. Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) = \alpha(1,0,1) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= x \\ \beta &= y \\ \alpha + \gamma &= z \end{aligned}$$

logo, $\gamma = z - x$.

Continuação do exemplo 4

$$(x, y, z) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 0) + (z - x)(0, 0, 1)$$

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= xT(1, 0, 1) + yT(0, 1, 0) + (z - x)T(0, 0, 1) \\ &= x(0, 0) + y(1, 1) + (z - x)(0, 2) \\ &= x(y, y) + (0, 2z - 2x) \end{aligned}$$

$$T(x, y, z) = (y, y + 2z - 2x)$$