Teorema do Núcleo e da Imagem

Álgebra Linear

Mariana Silveira - Cristian Coletti

Universidade Federal do ABC

Revisão

- U e V espaços vetoriais.
- $T : U \to V$ uma transformação linear (T.L.).
- $N(T) = \{u \in U, T(U) = 0\}$ núcleo de T
- $N(T)$ é subespaço vetorial de U.
- $Im(T)$ é subespaço vetorial de V.
- $\{u_1, ..., u_n\}$ é LI e T injetora então $\{T(u_1), ..., T(u_n)\}$ é LI.
- Uma T.L é determinada por seus valores em uma base de U.

Teorema do Núcleo e da Imagem de uma T.L

Teorema

Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita. Dada uma transformação linear $T : U \to V$, temos

$$dim\ U = dim\ N(T) + dim\ Im\ (T)$$

Demonstração: Seja $B_N = \{u_1, ...u_r\}$ uma base para $N(T)$. Pelo teorema do completamento, podemos estender B_N para uma base de U.
$B_U = \{u_1, ...u_r, w_1, ..., w_s\}$ com $dim\ N(T) = r$ e $dim\ U = r + s$

Continuação da Demonstração

- Vamos mostrar que $B_I = \{T(w_1), ..., T(w_s)\}$ é uma base para $Im(T)$.
- Afirmação: B_I é LI.

  De fato, suponha que

$$\alpha_1 T(w_1) + ... + \alpha_s T(w_s) = 0.$$

  Como T é linear, temos que

$$T(\alpha_1 w_1 + ... + \alpha_s w_s) = 0.$$

- Assim,

$$\alpha_1 w_1 + ... + \alpha_s w_s \in N(T).$$

Como B_N é base para $N(T)$, então

$$\alpha_1 w_1 + ... + \alpha_s w_s = \beta_1 u_1 + ... + \beta_r u_r$$

e, portanto,

$$\alpha_1 w_1 + ... + \alpha_s w_s - \beta_1 u_1 - ... - \beta_r u_r = 0.$$

Como B_U é LI pois é base de U podemos concluir que

$$\alpha_1 = ... = \alpha_s = \beta_1 = ... = \beta_r = 0.$$

Continuação da Demonstração

- Vamos mostrar que B_I gera $Im(T)$.
- Seja $w \in Im(T)$, então $w = T(u)$ para algum $u \in U$. Como B_U é base para U,

$$u = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_r u_r + \beta_1 w_1 + ... + \beta_s w_s$$

Agora, usando o fato que a aplicação T é uma transformação linear e que B_N é uma base do núcleo da transformação T, podemos concluir

$$
\begin{aligned}
w &= T(\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_r u_r + \beta_1 w_1 + ... + \beta_s w_s) \\
&= \alpha_1 T(u_1) + ... + \alpha_r T(u_r) + \beta_1 T(w_1) + ... + \beta_s T(w_s) \\
&= \beta_1 T(w_1) + ... + \beta_s T(w_s).
\end{aligned}
$$

Lembre que $u_1, \ldots, u_s$ formam uma base do $N(T)$ e, portanto,

$$T(u_1) = \ldots = T(u_s) = 0.$$

Podemos concluir que $w \in [T(w_1), ..., T(w_s)]$. Para finalizar observemos que

$$\dim\, U = r + s = \dim\, N(T) + \dim\, Im(T).$$

Exemplo

Determine bases para o núcleo e a imagem de

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\to (x + y, 2x + y, 3x + y) \end{aligned}$$

Núcleo de F

$$\begin{aligned} N(F) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / F(x, y, z) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z), (x + y, 2x + y, 3x + y) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z), x + y = 0,\ 2x + y = 0,\ 3x + y = 0\} \end{aligned}$$

$$x + y = 0$$

$$2x + y = 0$$

$$3x + y = 0$$

Continuação do Exemplo

Então $x = y = 0$

$$\begin{aligned} N(F) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = 0\} \\ &= \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3\} = [(0, 0, 1)] \end{aligned}$$

$B_N = \{[(0, 0, 1)]\}$ é base para $N(F)$ com $dim\ N(F) = 1$ Imagem de F

Modo I:

$$\begin{aligned} dim\ \mathbb{R}^3 &= dim\ N(F) + dim\ Im\ (F) \\ 3 &= 1 + dim\ Im\ (F) \end{aligned}$$

portanto, $dim\ Im\ (F) = 2$

$$\begin{aligned} F(1, 0, 0) &= (1, 2, 3) \\ F(0, 1, 0) &= (1, 1, 1) \end{aligned}$$

$B = \{(1, 2, 3), (1, 1, 1)\}$ é um conjunto de 2 vetores LI em um espaço vetorial de dimensão 2. Portanto B é base para $Im\ (F)$.

Continuação do Exemplo

Modo II:

$$
\begin{aligned}
Im(F) &= \{(x+y, 2x+y, 3x+y),\ x, y, \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(x, 2x, 3x) + (y, y, y),\ x, y, \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x(1,2,3) + y(1,1,1),\ x, y, \in \mathbb{R}\} \\
&= [(1,2,3), (1,1,1)]
\end{aligned}
$$

Observação: Não esquecer de verificar que $(1,2,3)$ e $(1,1,1)$ sejam L.I.

Exemplo

Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$ cujo núcleo seja $N(T) = [(0,1,1)]$

Queremos uma base para $\mathbb{R}^3$ que contenha $(0,1,1)$. Observemos que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Os vetores nas linhas da matriz A são LI e a matriz está na forma escalonada. Logo, $B = \{(1,0,0)(0,1,1)(0,0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ com a propriedade desejada.

Continuação do Exemplo: Vamos achar a $Im\,(T)$

Sabemos que $dim\ N(T) = 1$ então pelo teorema do núcleo e da imagem temos:

$$\begin{aligned} dim\,\mathbb{R}^3 &= dim\ N(F) + dim\ Im\,(T) \\ 3 &= 1 + dim\ Im\,(T) \end{aligned}$$

portanto, $dim\ Im\,(T) = 2$. Definindo T na base B

$$T(1,0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$T(0,1,1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$T(0,0,1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

As matrizes (1) e (3) são dois vetores LI em $M_2(\mathbb{R})$.

Continuação do Exemplo: Encontremos a transformação linear T

$$(x, y, z) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 1) + \gamma(0, 0, 1)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= x \\ \beta &= y \\ \beta + \gamma &= z \end{aligned}$$

Então $\gamma = z - y$. Portanto

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 1) + (z - y)(0, 0, 1)$$

$$T(x, y, z) = xT(1, 0, 0) + yT(0, 1, 1) + (z - y)T(0, 0, 1)$$

Usando que $(0, 1, 1) \in N(T)$

$$T(x, y, z) = x\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (z - y)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & z - y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Corolário

Sejam U, V espaços vetoriais tais que $\dim U = \dim V = n < \infty$. Seja $T : U \to V$ uma transformação linear. Então são equivalentes

1. *T é injetora*
2. *T é sobrejetora*
3. *T é bijetora*
4. *T leva base de U em base de V.*

Demonstração de (1.) $\Rightarrow$ (2.). T injetora então $N(T) = \{0\}$. Então, pelo teorema do núcleo e da imagem, temos que

$$\begin{aligned} \dim U &= dim\, N(T) + dim\, Im\,(T) \\ n &= dim\, Im\,(T) \end{aligned}$$

Logo, $Im\,(T)$ é um subespaço de V com a mesma dimensão que a de V. Portanto, $Im\,(T) = V$, isto é, T é sobrejetora.

Demonstração de (2.) $\Rightarrow$ (1.) T sobrejetora então $Im\,(T) = V$ Pelo teorema do núcleo e da imagem temos:

$$\begin{aligned} dimU &= dim\, N(T) + dim\, Im\,(T) \\ n &= dim\, N(T) + n \end{aligned}$$

Portanto, $dim\, N(T) = 0$, ou seja, $N(T) = \{0\}$ e T é injetora.

Demonstração de (1.) $\Rightarrow$ (3.)

$$(1.) \Rightarrow (1.) + (2.) \Rightarrow (3.)$$

Demonstração de (3.) $\Rightarrow$ (1.). Óbvio.

Demonstração de (1.) $\Rightarrow$ (4.) T injetora.

Seja $\{u_1, ..., u_n\}$ LI, base de U. Segue da observação, $\{T(u_1), ..., T(u_n)\}$ tem n elementos e é subconjunto LI de V. Como $dim\ V = n$ então $\{T(u_1), ..., T(u_n)\}$ é uma base de V.

Demonstração de (4.) $\Rightarrow$ (1.). Vamos mostrar que $N(T) = \{0\}$. Seja $u \in N(T)$ e $\{u_1, ..., u_n\}$ uma base de U.

Por hipótese, $\{T(u_1), ..., T(u_n)\}$ é uma base de V e ainda temos que

$$u = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n \ .$$

Portanto,

$$\begin{array}{rcl} T(u) & = & T(\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n). \text{ Assim,} \\ 0 & = & \alpha_1 T(u_1) + ... + \alpha_n T(u_n) \end{array}$$

Como temos uma combinação linear dando zero e $\{T(u_1), ..., T(u_n)\}$ é base para V, temos que $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$. Em outras palavras, $u = 0$.

Exemplo

Considere a transformação linear

$$\begin{aligned} F \quad : \quad & \mathbb{R}^4 \to M_2(\mathbb{R}) \\ & (x, y, z, w) \to \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- F é linear (verificar)
- $$\begin{aligned} N(F) &= \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 / T(x, y, z, w) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 / \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \{(0, 0, 0, 0)\} \end{aligned}$$

  portanto F é injetora.
- Como $dim\, \mathbb{R}^4 = dim\, M_2(\mathbb{R}) = 4$ então F é sobrejetora.

Isomorfismos e Automorfismos

Definição

• *Sejam U e V espaços vetoriais.*

Um **Isomorfismo** *entre U e V é uma transformação linear bijetora $T : U \to V$.*

• *Se $T : U \to V$ é um isomorfismo e $U = V$, dizemos que T é um* **Automorfismo**.

• *Quando existe um isomorfismo entre U e V dizemos que U e V são* **Isomorfos**.

Exemplo

1. $$\begin{aligned} I \quad : \quad & U \to U \\ & x \to x \end{aligned}$$

   O operador identidade é um automorfismo.

2. $$\begin{aligned} T \quad : \quad & \mathbb{R}^4 \to M_2(\mathbb{R}) \\ & (x, y, z, w) \to \begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix} \end{aligned}$$

   O exemplo anterior é um isomorfismo.

Proposição

Se F é um isomorfismo então F^{-1} também é um isomorfismo.

Demonstração: Basta mostrar que F^{-1} é linear.

$$F : U \to V, \quad F^{-1} : V \to U$$

$(TL1)$ Sejam $v_1,\ v_2 \in V$.

Como F é sobrejetora $v_1 = F(u_1)$, $v_2 = F(u_2)$, $u_1,\ u_2 \in U$.

Então:

$$\begin{aligned}
F^{-1}(v_1 + v_2) &= F^{-1}(F(u_1) + F(u_2)) \\
&= F^{-1}(F(u_1 + u_2)) \quad \text{(F é T.L.)} \\
&= u_1 + u_2 \quad \text{(F é injetora)} \\
&= F^{-1}(v_1) + F^{-1}(v_2)
\end{aligned}$$

$(TL2)$ Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$, $v \in V$.

Tome $u = F^{-1}(v)$ pois $v = F(u)$

$$\begin{aligned} F^{-1}(\alpha v) &= F^{-1}(\alpha F(u)) \\ &= F^{-1}(F(\alpha u)) \quad \text{(F é T.L.)} \\ &= \alpha u \quad \text{(F é injetora)} \\ &= \alpha F^{-1}(v) \end{aligned}$$

Teorema

Dois espaços vetoriais U e V de dimensão finita são isomorfos se e somente se, $dim\ U = dim\ V$

Demonstração:

($\Rightarrow$) Se U e V são isomorfos então existe $F : U \to V$ isomorfismo. Pelo teorema do núcleo e da imagem

$$dim\ U = dim\ N(F) + dim\ Im\ (F) \tag{4}$$

Como F é injetora

$$N(F) = \{0\} \tag{5}$$

Como F é sobrejetora

$$Im\ (F) = V \tag{6}$$

Substituindo (5) e (6) em (7)

$$dim\ U = 0 + dim\ V \tag{7}$$

Continuando com a demonstração:

($\Leftarrow$) Suponha que $dim\ U = dim\ V = n$. Sejam $B = \{u_1, ..., u_n\}$, $C = \{v_1, ..., v_n\}$ bases de U e V respec. Sejam $F : U \to V$ a única T.L. tal que $F(u_1) = v_1, ..., F(u_n) = v_n$.

Vamos provar que F é injetora:

Seja $u \in N(F)$, como B é base de U

$$\begin{aligned}
u &= \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n \\
F(u) &= F(\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n) \\
0 &= \alpha_1 F(u_1) + ... + \alpha_n F(u_n) \quad (u \in N(F) \text{ e } \text{F é T.L.}) \\
0 &= \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n
\end{aligned}$$

Continuando com a demonstração:

$$0 = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$$

Como $\{v_1, ..., v_n\}$ é L.I. então

$$\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$$

Portanto

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n \\ u &= 0 \end{aligned}$$

Segue que $N(F) = \{0\}$ ou seja F é injetora.
Pelo corolário do teorema do núcleo e da imagem (F é injetora se e somente se, F é sobrejetora quando $dim\ U = dim\ V$), F é um isomorfismo

Exemplos

1. $\mathbb{R}^4$ e $M_2(\mathbb{R})$ são isomorfos.

2. $\mathbb{R}^2$ e $P_1(\mathbb{R})$ são isomorfos.

3. $\mathbb{R}^3$ e $P_2(\mathbb{R})$ são isomorfos.

Mais geralmente $\mathbb{R}^{n+1}$ e $P_n(\mathbb{R})$ são isomorfos.