Transformações lineares e matrizes

Definições e exemplos

Álgebra Linear

Mariana Silveira - Cristian Coletti

Universidade Federal do ABC

Aula passada

- Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita. Dada uma transformação linear $T : U \to V$, temos

$$dim\ U = dim\ N(T) + dim\ Im\ (T)$$

- Se $dim\ U = dim\ V$

  T é injetora $\iff$ T é sobrejetora $\iff$ T é bijetora $\iff$ T leva base de U em base de V.
- U e V são isomorfos se existe um isomorfismo (T.L. bijetora) entre U e V.
- U e V (de dimensão finita) são isomorfos $\iff$ $dim\ U = dim\ V$

Matriz de uma transformação linear

Sejam U e V espaços vetoriais de dimensões n e m respectivamente. Fixemos $B = \{u_1, ..., u_n\}$ e $C = \{v_1, ..., v_m\}$ bases de U e V respectivamente. Nessas condições (bases fixadas) vamos mostrar que

(I) Para cada T.L. $F : U \to V$ podemos associar uma única matriz $A_{m\times n}$.

(II) Para cada matriz $A_{m\times n}$ podemos associar uma única T.L. $F : U \to V$.

(I) Como $C = \{v_1, ..., v_m\}$ é uma bases para V, existem $a_{ij}\,'s \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} F(u_1) &= a_{11}v_1 + ... + a_{m1}v_m \\ F(u_2) &= a_{12}v_1 + ... + a_{m2}v_m \\ &\vdots \\ F(u_n) &= a_{1n}v_1 + ... + a_{mn}v_m \end{aligned}$$

Consideremos a matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

A matriz A é chamada **matriz de F com relação as bases B e C.**

Notação: A matriz A é denotada por $[F]_{BC}$.

Fixemos $B = \{u_1, ..., u_n\}$ e $C = \{v_1, ..., v_m\}$ bases de U e V respectivamente.

Vamos mostrar que, dado $u \in U$

$$[F(u)]_C = [F]_{BC} \ [u]_B.$$

Como $B = \{u_1, ..., u_n\}$ é base de U temos que

$$u = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n$$

e

$$[u]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Por outro lado,

$$F(u) = F(\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n) = \alpha_1 F(u_1) + ... + \alpha_n F(u_n)$$

F é determinada pelo seu valor nos elementos da base.

Escrevendo os vetores $F(u_1), ..., F(u_n)$ como combinação linear dos elementos da base C e substituindo na expressão para $F(u)$ tem-se que

$$F(u) = \alpha_1(a_{11}v_1 + ... + a_{m1}v_m) + ... + \alpha_n(a_{1n}v_1 + ... + a_{mn}v_m)$$

Reagrupando,

$$F(u) = (a_{11}\alpha_1 + ... + a_{1n}\alpha_n)v_1 + ... + (a_{m1}\alpha_1 + ... + a_{mn}\alpha_n)v_m$$

Por outro lado, se

$$[F(u)]_C = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}$$

$$F(u) = \beta_1 v_1 + ... + \beta_m v_m$$

Portanto

$$\begin{aligned} \beta_1 &= a_{11}\alpha_1 + ... + a_{1n}\alpha_n \\ &\vdots \\ \beta_m &= a_{m1}\alpha_1 + ... + a_{mn}\alpha_n \end{aligned}$$

Reescrevendo o sistema na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

$$[F(u)]_C = [F]_{BC} \;\; [u]_B.$$

Exemplo

$$\begin{aligned} F: \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\to (x+y, x-y) \end{aligned}$$

$B = C = \{(1,0), (0,1)\}$

(a) Encontre $[F]_{BB}$

(b) Se $[u]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, encontre $[F(u)]_B$

Vejamos (a)

$$F(1,0) = (1,1) = 1(1,0) + 1(0,1)$$

$$F(0,1) = (1,-1) = 1(1,0) + (-1)(0,1)$$

$[F]_{BB} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Vejamos (b)

Como $[u]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$[F(u)]_B = [F]_{B,B}\,[u]_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$F(u) = 5(1,0) - 1(0,1)$$

e assim

$$F(u) = (5,-1).$$

Exemplo

$$\begin{aligned} F: \quad \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\to (z, x+y) \end{aligned}$$

(a) Determine a matriz de F em relação às bases B e C sendo $B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e $C = \{(1,3),(2,5)\}$ de $\mathbb{R}^2$

(b) Se $[u]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, encontre $[F(u)]_C$

Vejamos (a)

$$F(1,1,1) = (1,2) = \alpha(1,3) + \beta(2,5)$$

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta &= 1 \\ 3\alpha + 5\beta &= 2 \end{aligned}$$

Então $\beta = 1$, $\alpha = 1 - 2 = -1$

$$F(1,1,1) = -1(1,3) + 1(2,5)$$

$$F(1,1,0) = (0,2) = \alpha(1,3) + \beta(2,5)$$

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta &= 0 \\ 3\alpha + 5\beta &= 2 \end{aligned}$$

Então $\beta = -2$, $\alpha = -2\beta = 4$

$$F(1,1,0) = 4(1,3) - 2(2,5)$$

$$F(1,0,0) = (0,1) = \alpha(1,3) + \beta(2,5)$$

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta &= 0 \\ 3\alpha + 5\beta &= 1 \end{aligned}$$

Então $\beta = -1$, $\alpha = -2\beta = 2$

$$F(1,0,0) = 2(1,3) - 1(2,5)$$

$$[F]_{BC} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Vejamos (b)

Como $[u]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$[F(u)]_C = [F]_{B,C}\,[u]_B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F(u) = 2(1,3) + 0(2,5)$$

$$F(u) = (2,6).$$

II- Fixadas $B = \{u_1, ..., u_n\}$ e $C = \{v_1, ..., v_n\}$ bases de U e V respectivamente, Seja $A_{m \times n}$ a matriz

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Definimos a transformação linear $F : U \to V$ tal que para cada $u \in U$

$$[F(u)]_C = A\,[u]_B$$

Exemplo

Sejam $B = \{(1,1),(0,1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$
e $C = \{(1,0,1),(2,0,1),(0,1,0)\}$ base de $\mathbb{R}^3$.
Encontre a transformação linear $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$[F]_{B,C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Modo I: (Pela definição de $[F]_{B,C}$)

$$F((1,1)) = 1(1,0,1) + 0(2,0,1) + 1(0,1,0) = (1,1,1),$$

$$F((0,1)) = 1(1,0,1) + 1(2,0,1) + 2(0,1,0) = (3,2,2).$$

Assim, se $[u]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$ então $[F(u)]_C = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$.

e

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Isto é,

$$F(u) = \beta_1 v_1 + ... + \beta_m v_m.$$

Dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x, y) = \alpha(1, 1) + \beta(0, 1)$$

e

$$\begin{aligned} x &= \alpha & (1) \\ y &= \alpha + \beta. & (2) \end{aligned}$$

Então $\alpha = x$ e $\beta = y - x$,

$$(x, y) = x(1, 1) + (y - x)(0, 1)$$

$$F(x, y) = xF(1, 1) + (y - x)F(0, 1)$$

$$F(x, y) = x(1, 1, 1) + (y - x)(3, 2, 2)$$

$$F(x, y) = (3y - 2x, 2y - x, 2y - x)$$

Modo II: Vimos que $[F(u)]_C = [F]_{BC}\ [u]_B$. Dado $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$[u]_B \overset{\text{calculado no modo I}}{\overset{\downarrow}{=}} \begin{bmatrix} x \\ y - x \end{bmatrix}.$$

$$[F(u)]_C = [F]_{B,C}\ [u]_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y - x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y - x \\ y - x \\ x + 2y - 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y - x \\ 2y - x \end{bmatrix}.$$

Então,

$$\begin{aligned} F(x, y) &= y(1, 0, 1) + (y - x)(2, 0, 1) + (2y - x)(0, 1, 0) \\ &= (y + 2y - 2x, 2y - x, y + y - x) \\ &= (3y - 2x, 2y - x, 2y - x). \end{aligned}$$