# Transformações lineares e matrizes

## Propriedades

**Álgebra Linear**

Mariana Silveira - Cristian Coletti

Universidade Federal do ABC

## Aula passada

$U$, $V$ espaço vetorial, $T : U \to V$ T.L, $B$ base para $U$, $C$ base para $V$. Dado $u \in U$

- $$[F(u)]_C = [F]_{BC}\ [u]_B.$$
- $B = \{u_1, ..., u_n\}$ e $C = \{v_1, ..., v_m\}$ bases de $U$ e $V$ respectivamente.

$$\begin{aligned} F(u_1) &= a_{11}v_1 + ... + a_{m1}v_m \\ &\vdots \\ F(u_n) &= a_{1n}v_1 + ... + a_{mn}v_m \end{aligned}$$

$$[F]_{B,C} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

## Exemplo

$B = \{(1,1),(0,1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$ e $C = \{3x, -1, x + x^2\}$ base de $P_2(\mathbb{R})$. Encontre a T.L. $T : \mathbb{R}^2 \to P^2(\mathbb{R})$ tal que

$$[T]_{B,C} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Modo (I):

$$\begin{aligned} T(1,1) &= 0.3x + (-1).(-1) + (-1).(x + x^2) \\ &= 1 - x - x^2, \\ T(0,1) &= 2.3x + 0.(-1) + 3.(x + x^2) \\ &= 9x + 3x^2. \end{aligned}$$

Dado $u = (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a, b) = \alpha(1, 1) + \beta(0, 1)$. Logo,

$$\begin{aligned} \alpha &= a \\ \alpha + \beta &= b. \end{aligned}$$

Então $\alpha = a$ e $\beta = b - a$, e

$$\begin{aligned} (a, b) &= a(1, 1) + (b - a)(0, 1) \\ T(a, b) &= aT(1, 1) + (b - a)T(0, 1) \\ T(a, b) &= a(1 - x - x^2) + (b - a)(9x + 3x^2) \\ T(a, b) &= a.1 + (-10a + 9b)x + (-4a + 3b)x^2 \end{aligned}$$

Modo (II) (Pela fórmula $[F(u)]_C = [F]_{BC}\ [u]_B$).

Dado $u = (a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$[u]_B = \begin{bmatrix} a \\ b - a \end{bmatrix}$$

Então

$$[T(u)]_C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b - a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b - 2a \\ -a \\ -4a + 3b \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} T(a, b) &= (2b - 2a)(3x) + (-a)(-1) + (-4a + 3b)(x + x^2) \\ T(a, b) &= a.1 + (-10a + 9b)x + (-4a + 3b)x^2 \end{aligned}$$

Modo (II) (Pela fórmula $[F(u)]_C = [F]_{BC}\ [u]_B$).

Dado $u = (a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$[u]_B = \begin{bmatrix} a \\ b - a \end{bmatrix}$$

Então

$$[T(u)]_C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b - a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b - 2a \\ -a \\ -4a + 3b \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} T(a, b) &= (2b - 2a)(3x) + (-a)(-1) + (-4a + 3b)(x + x^2) \\ T(a, b) &= a.1 + (-10a + 9b)x + (-4a + 3b)x^2 \end{aligned}$$

## Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Fixadas $B$, $C$ bases canônicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ respectivamente, encontre $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ T.L. tal que: $(i)[T]_{BC} = A$ e que $(ii)$: $[T(u)]_C = A\ \ [u]_B$ para $u \in \mathbb{R}^3$.

Seja $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Então

$$[u]_B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

com $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$

Logo

$$[T(u)]_C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - 3y + 5z \\ 2x + 4y - z \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= (x - 3y + 5z)(1, 0) + (2x + 4y - z)(0, 1) \\ T(x, y, z) &= (x - 3y + 5z, 2x + 4y - z) \end{aligned}$$

Observem a relação entre $[T]_{B,C}$ e $T$ quando fixamos as bases canônicas!

Observação: Quando $B$, $C$ são as bases canônicas, em geral usamos a notação $[T]_{B,C} = [T]$.

## Teorema

*Sejam $U, V, W$ espaços vetoriais, e $B$, $C$, $D$ bases de $U, V, W$ respectivamente. Se $T_1 : U \to V$ e $T_2 : V \to W$ são transformações lineares, então $T_2 \circ T_1 : U \to W$ é linear*

$$[T_2 \circ T_1]_{B,D} = [T_2]_{C,D}[T_1]_{B,C}$$

- Exercício: Prove o Teorema acima.

## Teorema

*Sejam $U$, $V$ espaços vetoriais, e $B$, $C$ bases de $U$, $V$ respectivamente. Se $T : U \to V$ é um isomorfismo, então*

$$[T^{-1}]_{CB} = ([T]_{BC})^{-1}$$

Demonstração: Pelo teorema anterior, $[T^{-1}]_{CB}[T]_{BC} = [T^{-1} \circ T]_{B,B} = [I]_{B,B}$

## Corolário

*Se $T : U \to V$ é T.L e $B$, $C$ são bases para $U$ e $V$ respectivamente, então $T$ é um isomorfismo se, e somente se, $\det\, [T]_{B,C} \neq 0$.*

## Teorema

*Sejam $U$, $V$ espaços vetoriais, e $B$, $C$ bases de $U$, $V$ respectivamente. Se $T : U \to V$ é um isomorfismo, então*

$$[T^{-1}]_{CB} = ([T]_{BC})^{-1}$$

Demonstração: Pelo teorema anterior, $[T^{-1}]_{CB}[T]_{BC} = [T^{-1} \circ T]_{B,B} = [I]_{B,B}$

## Corolário

*Se $T : U \to V$ é T.L e $B$, $C$ são bases para $U$ e $V$ respectivamente, então $T$ é um isomorfismo se, e somente se, $\det\, [T]_{B,C} \neq 0$.*

## Teorema

*Sejam $U$, $V$ espaços vetoriais, e $B$, $C$ bases de $U$, $V$ respectivamente. Se $T : U \to V$ é um isomorfismo, então*

$$[T^{-1}]_{CB} = ([T]_{BC})^{-1}$$

Demonstração: Pelo teorema anterior, $[T^{-1}]_{CB}[T]_{BC} = [T^{-1} \circ T]_{B,B} = [I]_{B,B}$

## Corolário

*Se $T : U \to V$ é T.L e $B$, $C$ são bases para $U$ e $V$ respectivamente, então $T$ é um isomorfismo se, e somente se, $\det [T]_{B,C} \neq 0$.*

## Exemplo

Sejam $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ , $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tais que

$$[T_1]_{B,C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$[T_2]_{C,D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Com $B = \{(1, 0, ), (0, 2)\}$, $C = \{(\frac{1}{3}, 0, -3), (1, 1, 1), (2, 0, 5)\}$ e $D = \{(2, 0, ), (1, 1)\}$
Encontre $T_2 \circ T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. $T_2 \circ T_1$ é um isomorfismo?

$$[T_2 \circ T_1]_{B,D} = [T_2]_{C,D}.[T_1]_{B,C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$T_2 \circ T_1(1,0) = 1(2,0) + 0(1,1) = (2,0)$,

$T_2 \circ T_1(0,2) = -2(2,0) + 0(1,1) = (-4,0)$.

Dado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$(x,y) = \alpha(1,0) + \beta(0,2)$. Portanto,

$$\begin{array}{rcl} x & = & \alpha \\ y & = & 2\beta. \end{array}$$

Assim, $\alpha = x$ e $\beta = \frac{y}{2}$ e

$(x,y) = x(1,0) + \frac{y}{2}(0,2)$. Logo,

$$\begin{array}{rcl} T_2 \circ T_1(x,y) & = & xT(1,0) + \dfrac{y}{2}T(0,2) \\ & = & x(2,0) + \dfrac{y}{2}(-4,0) = (2x-2y,0) \end{array}$$

como *det* $[T_2 \circ T_1]_{B,D} = 0$ então $T_2 \circ T_1$ não é isomorfismo!

## Observação

Sejam $B$, $C$ duas bases para um espaço vetorial $V$ e $I : V \to V$ o operador identidade. $B = \{u_1, ..., u_n\}$, $C = \{v_1, ..., v_n\}$. Vamos construir $[I]_{B,C}$:

$$\begin{aligned} u_1 &= I(u_1) = a_{11}v_1 + ... + a_{n1}v_n \\ u_2 &= I(u_2) = a_{12}v_1 + ... + a_{n2}v_n \\ &\vdots \\ u_n &= I(u_n) = a_{1n}v_1 + ... + a_{nn}v_n. \end{aligned}$$

Elementos da base antiga como combinação linear dos elementos da base nova! Então $[I]_{B,C} = M_{B,C}$.

## Proposição

*Sejam $B$, $C$ bases para um espaço vetorial $V$ e $T : V \to V$ uma transformação linear. Então*

$$[T]_{CC} = M_{BC}\,[T]_{B,B}\,(M_{BC})^{-1}.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} [T]_{CC} &= \, = [I \circ T \circ I]_{C,C} \\ &= [I]_{B,C}[T]_{B,B}[I]_{C,B} \\ &= M_{BC}[T]_{B,B}M_{CB} \\ &= M_{BC}[T]_{B,B}(M_{BC})^{-1}. \end{aligned}$$

## Exemplo

Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma T.L tal que

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule $[T]_{B,B}$, $B = \{(1,1),(0,2)\}$ Denotando por $C$ a base canônica de $\mathbb{R}^2$, temos

$$[T]_{B,B} = M_{CB}[T](M_{CB})^{-1}$$

$M_{BC} = (M_{CB})^{-1}$

$$\begin{aligned} (1,1) &= 1(1,0) + 1(0,1) \\ (0,2) &= 0(1,0) + 2(0,1) \end{aligned}$$

$$M_{BC} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_{CB} = (M_{BC})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$[T]_{B,B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

## Remark

*O conjunto de todas as T.L de um espaço vetorial $U$ em um espaço vetorial $V$, que denotamos por $\mathcal{L}(U, V)$, munido com a soma $(T_1 + T_2)(u) = T_1(u) + T(u_2)$ e o produto por escalar $(\alpha T)(u) = \alpha T(u)$ é um espaço vetorial. Quando $U = V$ denotamos este espaço por $\mathcal{L}(U)$.*

## Definição

*Dadas duas matrizes $P$ e $Q$ de ordem $n$ dizemos que $P$ e $Q$ são* **semelhantes** *se existe uma matriz invertível $M$ tal que $Q = M^{-1}PM$.*

Exemplo: $T \in \mathcal{L}(V)$, $B$, $C$ bases para $V$. Vimos que

$$[T]_{C,C} = (M_{CB})^{-1}[T]_{B,B}M_{CB}$$

Matriz mudança de base de $C$ para $B$.

Então $[T]_{C,C}$ e $[T]_{B,B}$ são semelhantes.

## Definição

*Dizemos que uma matriz é* **diagonalizável** *se é semelhante a uma matriz diagonal.*

## Definição

*Dadas duas matrizes $P$ e $Q$ de ordem $n$ dizemos que $P$ e $Q$ são* **semelhantes** *se existe uma matriz invertível $M$ tal que $Q = M^{-1}PM$.*

Exemplo: $T \in \mathcal{L}(V)$, $B$, $C$ bases para $V$. Vimos que

$$[T]_{C,C} = (M_{CB})^{-1}[T]_{B,B}M_{CB}$$

Matriz mudança de base de $C$ para $B$.

Então $[T]_{C,C}$ e $[T]_{B,B}$ são semelhantes.

## Definição

*Dizemos que uma matriz é* **diagonalizável** *se é semelhante a uma matriz diagonal.*

## Definição

*Dadas duas matrizes $P$ e $Q$ de ordem $n$ dizemos que $P$ e $Q$ são* **semelhantes** *se existe uma matriz invertível $M$ tal que $Q = M^{-1}PM$.*

Exemplo: $T \in \mathcal{L}(V)$, $B$, $C$ bases para $V$. Vimos que

$$[T]_{C,C} = (M_{CB})^{-1}[T]_{B,B}M_{CB}$$

Matriz mudança de base de $C$ para $B$.
Então $[T]_{C,C}$ e $[T]_{B,B}$ são semelhantes.

## Definição

*Dizemos que uma matriz é* **diagonalizável** *se é semelhante a uma matriz diagonal.*

## Definição

*Dadas duas matrizes $P$ e $Q$ de ordem $n$ dizemos que $P$ e $Q$ são* **semelhantes** *se existe uma matriz invertível $M$ tal que $Q = M^{-1}PM$.*

Exemplo: $T \in \mathcal{L}(V)$, $B$, $C$ bases para $V$. Vimos que

$$[T]_{C,C} = (M_{CB})^{-1}[T]_{B,B}M_{CB}$$

Matriz mudança de base de $C$ para $B$.

Então $[T]_{C,C}$ e $[T]_{B,B}$ são semelhantes.

## Definição

*Dizemos que uma matriz é* **diagonalizável** *se é semelhante a uma matriz diagonal.*